

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМ. Р.Е. АЛЕКСЕЕВА»

---

На правах рукописи

**СЛЮНЯЕВ Алексей Викторович**

**АНОМАЛЬНО ВЫСОКИЕ МОРСКИЕ ВОЛНЫ:  
ФИЗИЧЕСКИЕ МЕХАНИЗМЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Специальность: 25.00.29 – Физика атмосферы и гидросферы

диссертация на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

**Научный консультант:**  
доктор физ.-мат. наук, профессор  
**Е.Н. ПЕЛИНОВСКИЙ**

Нижний Новгород – 2015

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> .....	4
<b>Глава 1 Наблюдения anomalно высоких волн и современное состояние исследований</b> .....	15
1.1 Введение.....	15
1.2 Исторические свидетельства и современные факты.....	16
1.3 Инструментальные измерения.....	30
1.4 Обзор предложенных и оригинальных физико-математических моделей «волн-убийц».....	43
1.5 Заключение.....	46
<b>Глава 2 Формирование anomalно высоких волн с учетом слабой и умеренной нелинейности</b> .....	48
2.1 Введение.....	48
2.2 Уравнения огибающей 5-го порядка для двумерных гравитационных волн на воде.....	52
2.3 Аналитическое описание усиления волн под действием самофокусирующей нелинейности.....	67
2.4 Применение МОЗР для выделения когерентных групп в записях, содержащих anomalные волны.....	79
2.5 Реконструкция событий anomalных волн в рамках численного моделирования.....	87
2.6 Заключение.....	108
<b>Глава 3 Сильнонелинейные сценарии формирования anomalных волн</b> .....	109
3.1 Введение.....	109
3.2 Моделирование «пределных» солитонов огибающей.....	115
3.3 Моделирование бризера (одной моды модуляционной неустойчивости волны Стокса) в рамках исходных уравнений гидродинамики.....	132
3.4 Моделирование динамики мультибризерных полей («супер-волн-убийц»).....	150
3.5 Заключение.....	162
<b>Глава 4 Стохастическое моделирование «волн-убийц» на поверхности глубокой воды</b> .....	164
4.1 Введение.....	164

4.2 Нелинейная динамика нерегулярных волновых групп с заданным начальным спектром.....	169
4.3 Численное моделирование нерегулярных однонаправленных волн с учетом сильной нелинейности.....	180
4.4 «Волны-убийцы» как когерентные состояния в стохастических полях поверхностных волн.....	201
4.5 Заключение.....	216
<b>Глава 5 Аномально высокие волны на встречном струйном течении.....</b>	<b>218</b>
5.1 Введение.....	218
5.2 Линейная теория в рамках модового подхода.....	223
5.3 Нелинейная теория для 3-волновых взаимодействий захваченных мод.....	242
5.4 Нелинейная теория для 4-волновых взаимодействий захваченных мод.....	257
5.5 Численное моделирование возникновения «волн-убийц» на встречном струйном течении в рамках исходных уравнений гидродинамики.....	264
5.6 Заключение.....	277
<b>Заключение.....</b>	<b>280</b>
<b>Приложения:</b>	
Приложение А. Коэффициенты уравнения огибающей высокого порядка.....	284
Приложение Б. Описание программного комплекса для моделирования волн на поверхности воды.....	291
Приложение В. Вывод нелинейного уравнения Шредингера для одной захваченной моды на широком встречном струйном течении.....	301
<b>Публикации автора по теме диссертации.....</b>	<b>309</b>
<b>Библиографический список.....</b>	<b>313</b>

# ВВЕДЕНИЕ

## Актуальность проблемы

«Волны-убийцы» (в англоязычной литературе *rogue waves* или *freak waves*) – одна из наиболее интригующих проблем современной океанологии, которая уже стала причиной широкого спектра исследований: от теоретических до прикладных [Kharif & Pelinovsky, 2003; Куркин и Пелиновский, 2004; Dysthe et al, 2008; Kharif et al, 2009<sup>\*</sup>; Slunyaev et al, 2011<sup>\*</sup>]. Сам термин «волны-убийцы» до настоящего времени остается не определенным однозначно; им определяют опасные морские волны аномально большой высоты (по сравнению с фоновым волнением, – до 30 м), которые редко возникают и на первый взгляд не предсказуемы. Очень быстро исследования «волн-убийц» были обобщены на другие физические среды, где наблюдаются схожие эффекты динамики нелинейных диспергирующих волн, приводящие к возникновению экстремальных событий [Kharif et al, 2009<sup>\*</sup>; Onorato et al, 2013b], и на другие приложения нелинейной динамики. Проблема «волн-убийц» сегодня общепризнана, хотя российскими средствами массовой информации она освещается заметно хуже, чем зарубежными [Lawton, 2001; Hopkin, 2004; Garrett & Gemmrich, 2009; Ridgway, 2010; Пелиновский и Слюняев, 2006, 2007, 2009] (другие ссылки на популярные статьи и научно-популярные фильмы можно найти в Википедии<sup>\*</sup>). Научная важность и практическая значимость проблемы волн-убийц подтверждена, в частности, признанием Европейской Комиссии, поддержавшей два крупных исследовательских проекта (в рамках шестой и седьмой Рамочных программ): MaxWave ("Максимальная волна", завершен в 2003 г. [Rosenthal & Lehner, 2008]) и Extreme Seas ("Экстремальные моря", завершен в 2013 г.). Среди основных задач проекта Extreme Seas, в котором автор принимал участие, была разработка рекомендаций для проектирования безопасных кораблей и определение критериев для оперативного прогноза «волн-убийц». В частности, были проведены испытания нового типа, когда модели кораблей подвергались воздействию бризерных волновых групп, описываемых аналитическими решениями математических моделей [Onorato et al, 2013a].

По имеющимся данным плохие погодные условия продолжают быть одной из основных причин происшествий с кораблями. Катастрофические последствия встреч в море с аномальными волнами освещаются в средствах массовой информации с растущей

---

<sup>\*</sup> [http://en.wikipedia.org/wiki/Rogue\\_wave](http://en.wikipedia.org/wiki/Rogue_wave)

частотой. Среди них недавние случаи аварий, повлекших экологическое загрязнение обширных прибрежных акваторий (Erika – 1999, Prestige – 2002, MSC Napoli – 2007), сопровождавшихся существенным повреждением судов (Queen Elizabeth 2 – 1995, Caledonia Star – 2001, Bremen – 2001, Explorer – 2005, Voyager – 2005, Norwegian Dawn – 2005, Louis Majesty – 2010; MOL Comfort – 2013) и гибелью людей (Voyager – 2005, Norwegian Dawn – 2005, Louis Majesty – 2010). Также хорошо известны случаи ударов неожиданно высоких волн о шельфовые нефтегазовые платформы, которые привели к существенным повреждениям или даже затоплению платформ (Veslefrikk B – 1995, Draupner – 1995, Shiehallion – 1998). «Волны-убийцы» представляют серьезную угрозу постоянно интенсифицирующемуся морскому судоходству и освоению шельфа.

Данные натуральных измерений экстремальных волн являются важнейшим источником первичной информации. К сожалению, на настоящий момент имеющиеся инструментальные данные не способны обеспечить статистическую выборку, достаточную для построения достоверной статистики «волн-убийц». Натурные данные и трудности их использования будут обсуждаться в Главе 1 диссертации. В ряде работ по разработке вероятностного описания экстремальных волн по данным натуральных измерений утверждается о занижении периода их повторения существующими общепринятыми теориями в сотни раз (например, [Stansell, 2004]), то есть, реальные морские волны намного более опасны, чем думалось ранее. В ситуации, когда натурные данные оказываются недостаточными, физическое моделирование в лабораторных условиях, а также математическое моделирование играют ключевую роль. Современное состояние компьютерной техники и уровень развития вычислительных подходов к моделированию поверхностных гравитационных волн позволяет исследовать практически важные задачи, включая расчет обрушающихся волн и стохастическое моделирование волн в относительно больших акваториях.

Фундаментальный вопрос связан с физическими механизмами генерации «волн-убийц», их понимание необходимо для описания явления, в том числе, для выбора адекватных математических моделей. Образование временных областей, характеризующихся большой волновой энергией, может происходить за счет дисперсионной или геометрической фокусировки, на неоднородных течениях и батиметрии, внешнего воздействия атмосферными возмущениями и др. Перечисленные механизмы являются по своей сути линейными, а потому относительно простыми в анализе, в том числе, для учета в формулах расчета вероятности. Наибольший интерес в отношении проблемы аномально высоких волн вызывают нелинейные механизмы, являющиеся более сложными для исследования и учета в статистических моделях. В частности, *эффект самомодуляции волн на глубокой воде* был

предложен для объяснения более частого возникновения высоких ветровых волн, чем это предсказывается общепринятыми квазилинейными теориями [Onorato et al, 2001]. Ранее этот эффект традиционно считался практически нереализуемым для морских условий и потому не учитывался.

Эффекты модуляционной неустойчивости проявляются в разбиении волн на группы. Нелинейные группы могут удерживаться от дисперсионного расплывания возникающими корреляциями фаз взаимодействующих гармоник, что изменяет статистику волн. Такие группы в рамках первого приближения для слабой нелинейности и слабой модуляции [Захаров, 1968; Benney & Roskes, 1969; Hasimoto & Ono, 1972; Davey & Stewartson, 1974] соответствуют точным решениям – солитонам огибающей. Соответствующее эволюционное уравнение [Захаров, 1968], обычно называемое нелинейным уравнением Шредингера (либо нелинейным параболическим уравнением [Таланов, 1965; Беспалов и Таланов, 1966; Власов и Таланов, 1997]), было проинтегрировано методом обратной задачи рассеяния, МОЗР [Захаров и Шабат, 1971; Захаров и др., 1980]. Солитоны огибающей представляют асимптотическое решение начальной задачи для локализованного возмущения на бесконечном интервале, а потому являются ключевыми волновыми структурами. МОЗР представляет собой исключительно удобный аппарат для описания динамики нелинейных волн и может быть использован для предсказания динамики волн, а значит, и создания детерминистского прогноза «волн-убийц». Использованию слабонелинейных решений теории модулированных волн для описания динамики аномальных волн посвящена Глава 2 диссертации. Вопросы существования аналогов таких решений в условиях сильной нелинейности и сильной дисперсии, их роли в динамике реалистичных интенсивных морских волн, включая «волны-убийцы», до недавнего времени оставались открытыми, им посвящена Глава 3. В ней определены возможности и ограничения использования слабонелинейной теории для описания модулированных волн большой крутизны.

В качестве параметра, определяющего силу самомодуляционных эффектов для нерегулярных поверхностных волн, был предложен параметр подобия, следующий из нелинейного уравнения Шредингера [Захаров, 1968; Alber, 1978; Onorato et al, 2001; Janssen, 2003]. Он соответствует «солитонному числу», принятому в нелинейной оптике, и аналогичен параметру Урселла, используемому для определения степени нелинейности волн на мелкой воде. В англоязычной литературе он называется индексом неустойчивости Бенджамина – Фейра (Benjamin – Feir Index, BFI) по именам первооткрывателей модуляционной неустойчивости поверхностных волн на Западе. Параметр *BFI* вводится как отношение характерной крутизны волн (амплитуды, нормированной на волновое число) к

характерной ширине спектра и на настоящий момент является главным претендентом на роль критерия опасности возникновения «волн-убийц» в море.

Сложность применения теории к реальной проблеме заключается в том, что параметры ветровых волн соответствуют случаю, когда «рафинированная» модуляционная неустойчивость ограничивается факторами нерегулярности волн, конечной спектральной ширины, действием эффектов сильной нелинейности (а также другими – неконсервативными – эффектами). В результате, задача описания статистики таких волн оказывается очень сложной; число аналитических работ очень мало, они зачастую используют ряд дополнительных упрощающих предположений и требуют верификации [Alber, 1978; Mori & Janssen 2006, Segur et al, 2005, Wu et al, 2006; Leblanc, 2007; Voronovich et al, 2008; Henderson et al, 2010].

Из-за развития компьютерной техники и появления новых быстрых методов решения уравнений гидродинамики в последние полтора десятилетия стал доступным другой эффективный подход к исследованию статистики нелинейных морских волн – т.н. стохастическое моделирование. При этом классическое для такого рода задач описание в рамках кинетических моделей заменяется моделированием набора реализаций, представляющих собой статистический ансамбль. В этом случае не приходится вводить дополнительных «замыкающих» гипотез. Такой подход совсем недавно стал использоваться для определения связей между спектральными параметрами и статистикой экстремальных волн, необходимыми для практических целей прогноза ветровых морских волн. Исследования автора в этом направлении изложены в Главе 4 диссертации. Сегодня стохастическое численное моделирование используется в качестве правомочной альтернативы физическим экспериментам с нерегулярными волнами. Эти работы привели к внедрению индекса модуляционной неустойчивости BFI в оперативный прогноз Европейского центра среднесрочных прогнозов погоды (ECMWF).

Динамика модуляционно неустойчивых волн на поверхности глубокой жидкости сильно отличается в случаях узкого и относительно широкого углового спектра [Onorato et al, 2002, 2009; Gramstad & Trulsen 2007; Mori et al, 2007; Ruban, 2007, 2009]. Потому одним из важнейших вопросов является выделение ситуаций, когда реализуются узкие спектры морских волн, либо когда условия на узость спектра ослабляются. В Главе 5 рассматривается один из таких случаев, – волны, распространяющиеся против струйного течения. Волны на течении могут иметь локальные области усиления за счет квазилинейных эффектов фокусировки (захвата и блокировки волн); в диссертации предлагаются новые механизмы возникновения «волн-убийц» на течениях, основанные на нелинейной динамике

захваченных волн. Из-за каналирования волн течением их динамика эффективно одномерная, а потому нелинейная самомодуляция волн не ограничивается требованием узкого углового спектра.

В заключение отметим, что регистрации явлений, подобных морским «волн-убийцам», в других средах: в нелинейной оптике, в сверхтекучем гелии, плазме, даже в описании финансовых рынков и т.д., вызвали продолжающийся всплеск интереса [Onorato et al, 2013b; Dudley et al, 2014; Ruban et al, 2010\*]. Первые два приложения особенно интересны тем, что удобны для экспериментального исследования волновой турбулентности [Solli et al, 2007; Yeom & Eggleton, 2007; Ganshin et al, 2008; Kibler et al, 2010]. Тем самым, проблема «волн-убийц» приобрела в физике междисциплинарный характер.

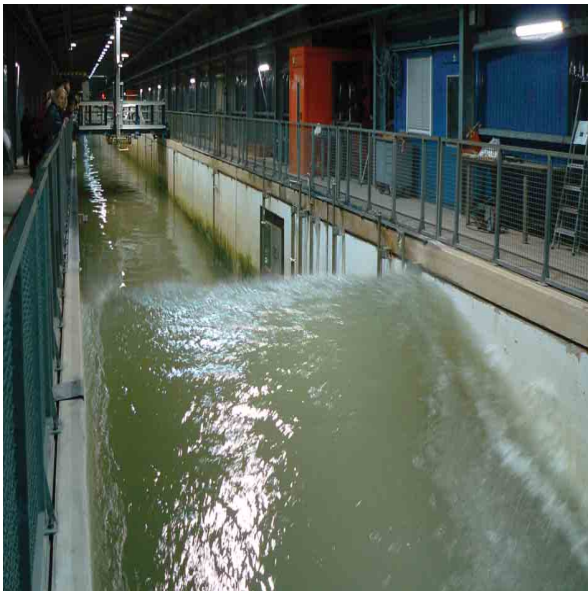
## **Цели и задачи исследования**

Целью диссертационной работы является исследование физических механизмов возникновения аномально высоких морских волн (т.н. «волн-убийц») – экстремальных волн, которые возникают заметно чаще и приобретают большие высоты, чем ожидается из классических линейных теорий – в контексте возможности описания и прогноза.

Основные задачи исследования включают:

- вывод эволюционных уравнений высокого порядка по нелинейности дисперсии, описывающих нелинейную динамику модулированных волн в жидкости конечной глубины;
- предложение новых механизмов, ответственных за генерацию «волн-убийц», связанных с нелинейными эффектами собственной динамики волн;
- разработку численных кодов для моделирования процессов возникновения экстремальных волн;
- численное моделирование эволюции нелинейных волн и стохастической динамики нерегулярных волновых ансамблей, включая воспроизведение условий натуральных и лабораторных измерений экстремальных волн;
- постановку лабораторных экспериментов и анализ результатов измерений;
- выделение ситуаций, когда возможен детерминистский (краткосрочный) прогноз наступления экстремальных ситуаций и разработку методов такого прогноза;
- определение возможностей среднесрочного прогноза наступления ситуаций с высокой вероятностью возникновения экстремальных волн.





(a)



(б)



(в)



(г)

Рис. 0.1. Экспериментальные установки, в которых выполнялись лабораторные измерения: Большой волновой канал Ганновера (а), вид на бассейн Технического университета Берлина (б), лоток Технологического университета Гамбурга (в) и Тель-авивского университета (г).

### Научная ценность и новизна результатов

В диссертации представлены результаты исследования нелинейных механизмов генерации аномально высоких волн на морской поверхности, позволившие построить типичный портрет «волн-убийц» и предложить подходы для вероятностного и детерминистского прогноза опасных волн. Общий подход, используемый в диссертации, можно сформулировать как построение «мостиков», связывающих слабонелинейные теории и сильно нелинейную динамику волн. При этом разработаны новые физико-математические модели для описания модулированных гравитационных волн на поверхности воды, и выполнено численное моделирование приближенных и исходных уравнений гидродинамики. Для описания «волн-убийц» на струйных течениях предложен и развит модовый подход, позволивший перенести результаты нелинейной теории для двумерных модулированных волн на трехмерный случай.

## **Достоверность предложенных методов и решений**

Исследование основывается на теоретических методах исследований динамики нелинейных волн, динамики океана, и современных численных методах. Большинство теоретических результатов, приводимых в диссертации, проверялись в численных и лабораторных экспериментах. При этом использовались различные численные коды, моделирующие уравнения гидродинамики на различных уровнях аппроксимации: от слабо нелинейных до полных. Такой подход позволил проводить сопоставление результатов, что обеспечивает их достоверность. Имеющиеся сопоставления с лабораторными экспериментами в различных случаях показали согласие от удовлетворительного до отличного. Использовались лабораторные данные по результатам экспериментов в пяти различных экспериментальных лотках (Рис. 0.1), обладающих необходимым оборудованием:

- 300-метровый большой волновой канал Университета Ганновера (GWK, руководитель экспериментов проф. Л. Шемер, L. Shemer, Tel-Aviv University, Израиль),
- 110-метровый бассейн Технического университета Берлина (исполнитель экспериментов М. Кляйн, M. Klein, Technical University of Berlin, Германия),
- 15-метровый лоток Технологического университета Гамбурга (исполнитель экспериментов А. Чабчуб, A. Chabchoub, Hamburg University of Technology, Германия),
- 18-метровый лоток Тель-авивского университета (руководитель экспериментов проф. Л. Шемер, L. Shemer, Tel-Aviv University, Израиль),
- 15-метровый канал Университета Кан Нижняя Нормандия (руководитель экспериментов проф. А.Б. Езерский, Université de Caen-Basse Normandie, Франция).

Эти лотки использовались и другими лидирующими исследовательскими группами.

## **Практическое значение работы**

Результаты диссертации могут быть использованы для дальнейших исследований, в том числе, – в направлении прикладных разработок по прогнозу экстремальных морских волн и снижению их негативных последствий: при разработке рекомендаций и норм, направленных на увеличение степени безопасности мореплавания и морепользования. Они использовались в НИР по тематикам нелинейных волн и экстремальных морских волн, включая выполнение государственных контрактов, грантов Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и поддержки ведущих научных школ РФ, грантов Европейского Сообщества, грантов РФФИ.

В частности, результаты исследований использовались при выполнении проекта Европейского Сообщества в рамках 7 Рамочной Программы «Разработки для обеспечения безопасности судов в экстремальных морях» (“Design for Ship Safety in Extreme Seas”,

Extreme Seas, 2009-2013), которые были отмечены именной грамотой Европейского Союза "Чемпионы ЕС в области исследований для развития транспорта – 2014".

### **Личный вклад автора**

Статьи по диссертации опубликованы как в соавторстве (34), так и единолично (5).

Глава 1 является преимущественно обзорной, ее отдельные части написаны в сотрудничестве с Е.Н. Пелиновским и К. Харифом (IRPHE, Марсель, Франция), которым принадлежит идея «нелинейно-дисперсионного» механизма генерации аномальных волн.

В исследованиях, описанных в Главах 2 и 3, автору диссертации принадлежит основная роль на всех этапах, исключая выполнение численных расчетов в рамках модифицированного нелинейного уравнения Шредингера для распространения волн на шельфе, обсуждаемых в Разделе 2.5 (А.В. Сергеева), постановку и проведение лабораторных экспериментов по моделированию рациональных бризеров высокого порядка, упоминаемых в Разделе 3.4 (А. Chabchoub и др.), постановку и проведение лабораторных экспериментов по моделированию волн в мелководном резонаторе, использованных при тестировании численного кода HOSM (А.Б. Езерский и др.). Натурные данные и их первичная обработка инструментальных измерений были предоставлены соавторами.

Постановка и проведение лабораторных экспериментов по моделированию нерегулярных интенсивных волновых групп в Разделе 4.2 принадлежат Л. Шемеру (Tel-Aviv University, Израиль); в остальных работах, описанных в Главе 4, диссертанту принадлежит основная роль. А.В. Сергеева участвовала в лабораторных экспериментах в волновом лотке университета Ганновера, ей принадлежит обработка данных измерений. Она также выполняла вспомогательное численное моделирование и обработку результатов численного моделирования (частично), описываемых в этой главе.

Идея рассмотрения нелинейной динамики волн на струйных течениях в модовой постановке принадлежит В.И. Шприге (Keele University, Великобритания). Результаты, представленные в Разделах 5.2–5.4 (линейная и слабо нелинейная теория для захваченных волн на течении), получены в тесном сотрудничестве с ним. Результаты Раздела 5.5 получены преимущественно автором.

### **Апробация работы**

Основные результаты диссертации были представлены на многочисленных всероссийских и международных конференциях:

конференции по физике нелинейных волн: международные симпозиумы «*Extreme events: Modeling, Analysis, and Prediction*» (Ганновер, Германия, 2013, 2014), международные

конференции “*Rogue Waves*” (Дрезден, Германия, 2011), «*Nonlinear Waves – Theory and Applications*» (Пекин, Китай, 2008, 2010, 2013), “*Solitons, Collapses and Turbulence*” (Черноголовка, 2009, 2012, 2014), «*Wave interactions*» (Линц, Австрия, 2012, 2014), “*Frontiers of Nonlinear Physics*” (Н. Новгород, 2004, 2010), конференция *Wave-Flow Interaction Network* (Кембридж, Великобритания, 2011), , международные симпозиумы “*Topical Problems of Nonlinear Wave Physics*” (Н.Новгород, 2003, 2005), научные школы «*Нелинейные волны*» (Н. Новгород, 2006, 2008, 2012), научные сессии Совета РАН по нелинейной динамике (Москва, 2004, 2006, 2008, 2009, 2011, 2012, 2014);

геофизические конференции: совместная ассамблея Европейского геофизического союза, Американского геофизического союза и Европейского союза наук о Земле (*EGS-AGU-EUG Joint Assembly*, Ницца, Франция, 2003), ежегодные ассамблеи Европейского геофизического союза (*European Geophysical Union General Assembly*, Ницца, Франция, 2004; Вена, Австрия, 2005-2015), совместная ассамблея Международной ассоциации гидрологических наук, Международной ассоциации физической океанографии и Международной ассоциации сейсмологии и физики недр (*IAHS-IAPSO-IASPEI Joint Assembly*, Гетеборг, Швеция, 2013), тематическая конференция по аномальным волнам “*Rogue Waves*” (Брест, Франция, 2008);

конференции по инженерным приложениям нелинейных волн: симпозиумы международного союза теоретической и прикладной механики IUTAM «*Waves in fluids: Effects of non-linearity, rotation, stratification and dissipation*» (Москва, 2012) и «*Complexity of Nonlinear Waves*» (Таллинн, Эстония, 2014), международные конференции *Conf. on Ocean, Offshore and Arctic Engineering* (Роттердам, Нидерланды, 2011), *Conf. on Maritime Technology and Engineering MARTECH-2011* (Лиссабон, Португалия, 2011), *Symp. on Hydraulic and Ocean Engineering* (Килунг, Тайвань, 2012), а также *THESEUS Taiwan Workshop* (Тайнань, Тайвань, 2013), международная школа-конференция “*Advanced Problems in Mechanics*” (С.-Петербург-Репино 2007, 2011), всероссийская конференция “*Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики*” (С. -Петербург, 2014).

Результаты докладывались на семинарах в ИПФ РАН, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, НГТУ им. Р.Е. Алексеева, НИРФИ, Акустического института им. акад. Н.Н. Андреева, Исследовательского института неравновесных проблем (IRPHE, Марсель, Франция), Университета г. Киль (Keele University, Великобритания), Университета восточной Англии (University of East Anglia, Norwich, Великобритания), Университетского колледжа Лондона (University College London, Великобритания), Университета г. Лафборо (Loughborough University, Великобритания) и др.

В 2007 г. цикл работ «Аномально высокие морские волны: физические механизмы и моделирование» был отмечен медалью РАН с премией для молодых ученых РАН.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Асимптотическая теория 5-го порядка по нелинейности и дисперсии для модулированных волн на воде произвольной глубины позволяет во многих случаях получить хорошее описание существенно нелинейной динамики морских волн. С учетом нелинейности порог модуляционной неустойчивости сдвигается с критической глубины  $kh \approx 1.36$  в область более мелкой воды.
2. Оригинальный подход к анализу волновых записей с использованием метода обратной задачи рассеяния демонстрирует присутствие когерентных нелинейных групп в инструментальных записях, содержащих аномально высокие волны, и делает возможным краткосрочный прогноз наступления экстремальных волновых условий.
3. Реконструкция инструментально измеренных аномально высоких волн с помощью численного моделирования дает реалистичную картину события на небольших временах (до 10 мин) в предположении однонаправленных волн.
4. Существуют сильно нелинейные аналоги точных решений слабо нелинейной теории для слабо модулированных волн на поверхности большой глубины типа солитонов огибающей и бризеров.
5. Картина эволюции нерегулярных однонаправленных волн на поверхности глубокой воды с заданным начальным спектром хорошо параметризуется в терминах индекса модуляционной неустойчивости  $BFI$  и характерного времени нелинейности и определяет условия возникновения высокой вероятности больших волн.
6. Асимптотическая слабо нелинейная теория для модулированных захваченных волн на встречных струйных течениях позволяет эффективно описывать процессы нелинейной динамики волн, связанные с распространением солитоноподобных пакетов и возникновением аномально высоких волн.

### **Объём и структура диссертации**

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и трех приложений. Она изложена на 338 страницах, включая 126 рисунков, 11 таблиц, список работ автора, в которых опубликованы основные результаты диссертации (39 наименований), и список цитируемой литературы (365 наименований).

## **Благодарности**

Автор благодарен д.ф.-м.н., профессору Пелиновскому Ефиму Наумовичу за участие и помощь во всем. Автор благодарен профессору Шрире Виктору Исаевичу за опыт, который получил за время работы с ним, и помощь. Автор благодарен всем своим соавторам и коллегам за сотрудничество, взаимодействие и поддержку.

В завершение хочу высказать благодарность своему школьному учителю математики Колесникову Льву Федоровичу за его труд и искренность.

# Глава 1 НАБЛЮДЕНИЯ АНОМАЛЬНО ВЫСОКИХ ВОЛН И СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ

## 1.1 Введение

Объектом исследования диссертации является опасное природное явление "волн-убийц", признание которого научной общественностью на рубеже XX и XXI веков повлекло всплеск научных исследований: сначала, в основном, океанографических, но вскоре – более широких по области применения, включая и чисто математические. В настоящее время бум в изучении экстремальных волновых явлений продолжается, значительную его долю составляют работы в нелинейной оптике, а также в других областях (физика плазмы, твердого тела), помимо океанологических приложений. В этой главе представлены факты, ставшие мотивацией изучения аномально высоких морских волн. Они являются «мерилом» и конечным приложением развиваемых нами теорий; имеющиеся свидетельства позволяют сузить круг поиска физических явлений, ответственных за «волны-убийцы», сформулировать подходящие математические модели и верифицировать полученные результаты и объяснения.

Проблема «волн-убийц» является отчасти скандальной, поскольку затрагивает серьезные финансовые вопросы и спорные судебные разбирательства (стандартизация морских сооружений и кораблей, нормы страхования от несчастных случаев, безопасность морепользования, включая экологическую и безопасность жизни). Объективные и натурные данные, связанные с происшествиями в море (с кораблями и морскими платформами) обычно не доступны для свободного исследования, а иногда специально замалчиваются. С другой стороны, существуют объективные причины и ограничения, влияющие на достоверность и полноту картины доступных для исследования данных о морских волнах. Они создают некоторую степень неопределенности, и потому иногда результаты исследований могут использоваться в спекулятивной форме. По этой причине важным является вопрос оценки достоверности данных.

Существует ряд популярных обзоров по проблеме аномально высоких морских волн. Первой работой была статья [Kharif & Pelinovsky, 2003]; в следующем году вышла русскоязычная монография [Куркин и Пелиновский, 2004]. Далее можно выделить статью [Dysthe et al, 2008] и два недавних обзора, освещающих проблему вне приложения к морским волнам (в частности, в оптике) [Onorato et al, 2013; Dudley et al, 2014]. Представительные сборники статей по проблеме морских «волн-убийц» издавались по итогам тематических

конференций [Olagnon & Athanassoulis, 2001; Olagnon & Prevosto, 2005, 2009], в сборнике [Pelinovsky & Kharif, 2008], в спецвыпусках журналов *European Journal of Mechanics B/Fluids* (2005), *Nonlinear Processes in Geophysics* (2011-2012), *Natural Hazards and Earth System Sciences* (2013-2014). На русском языке в 2011 г. вышел специальный выпуск журнала *Фундаментальная и прикладная гидрофизика* (автор диссертации являлся соредактором выпусков в журналах *Nonlin. Proc. Geophys.*, *Nat. Hazards* и *Фунд. и прикл. гидрофиз.*). Исторические описания событий «волн-убийц» можно найти в русскоязычных работах [Давидан и Лопатухин, 1982; Бадулин и др., 2005; Доценко и Иванов, 2006; Дьяченко и др., 2011].

В соавторстве с проф. К. Харифом и Е. Пелиновским в 2009 г. автором опубликована первая англоязычная монография по проблеме «волн-убийц» [Kharif et al, 2009\*], содержащая обзор наблюдений, теории и результаты моделирования аномальных морских волн. Позднее вышел наш более популярный обзор, подготовленный по приглашению журнала *Contemporary Physics* [Slunyaev et al, 2011\*]. В статье [Didenkulova et al, 2006\*] нами были проанализированы случаи регистраций «волн-убийц» за 2005 год, найденные в средствах массовой информации. Позднее эта работа была продолжена без участия автора диссертации [Nikolkina & Didenkulova, 2011; 2012]. Проблема «волн-убийц» была дана в популярном изложении в русскоязычных статьях [Пелиновский и Слюняев, 2006, 2007, 2009].

Содержание настоящей главы основывается, главным образом, на наших работах [Kharif et al, 2009\* ; Slunyaev et al, 2011\* ; Didenkulova et al, 2006\*].

## **1.2 Исторические свидетельства и современные факты**

Аномально высокие волны, наверное, так и остались бы морским фольклором, если бы не запечатленные аварии, потрясающие людское воображение (как на Рис. 1.2.1). Печально известные несчастные случаи вызвали повышенный интерес к гигантским волнам и заставили поверить в ужасные свидетельства. Длинный, но, очевидно, неполный список катастрофических ситуаций со времен Колумба собирает в Интернете известный океанограф П. Лью (P. Liu)<sup>♥</sup>, множество других описаний может быть найдено в публикациях [Mallory, 1974; Torum & Gudmestad, 1990, Haver & Andersen, 2000; Lawton, 2001; Olagnon & Athanassoulis, 2001; Kharif and Pelinovsky, 2003; Didenkulova et al, 2006\* ; Slunyaev et al, 2009\* ; Nikolkina & Didenkulova, 2011, 2012] и по ссылкам в них. Вот две цитаты из популярных изданий, характеризующие явление:

---

<sup>♥</sup> <http://freaquewaves.blogspot.ru/>



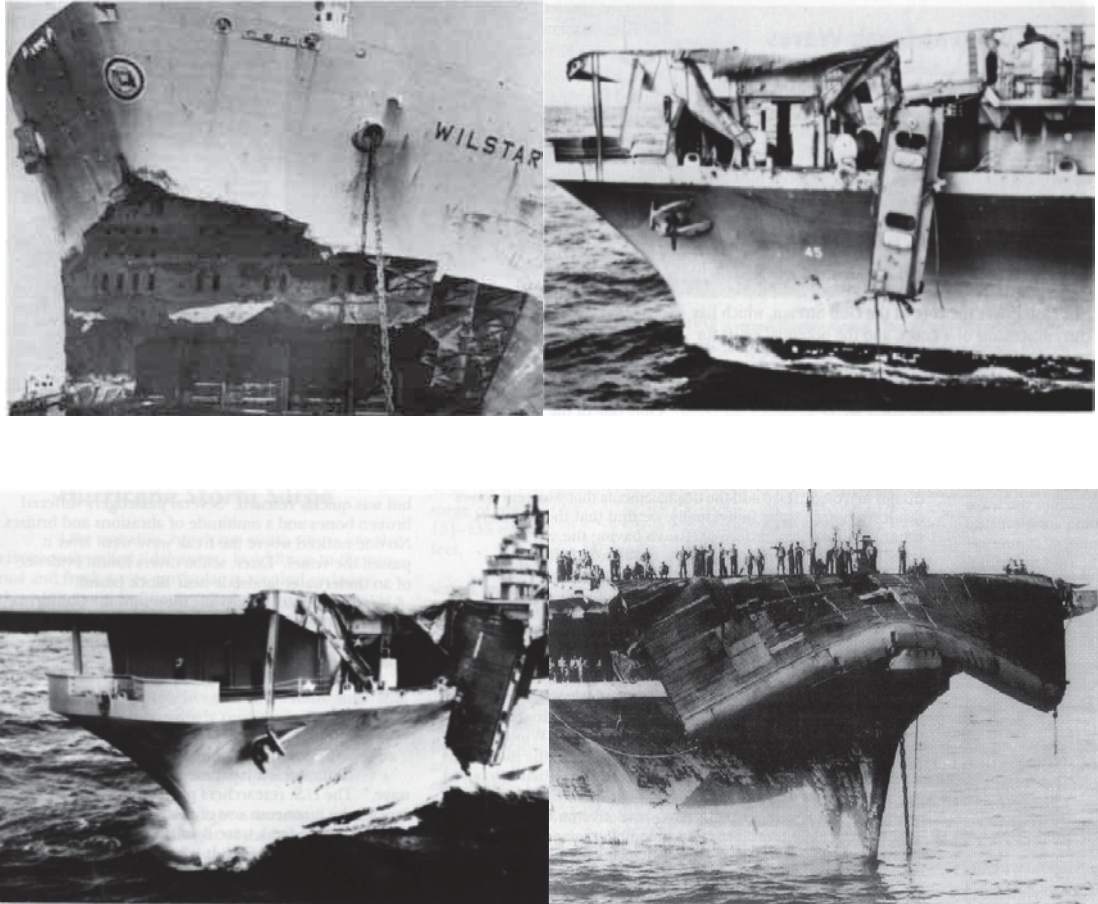


Рис. 1.2.1. Фотографии повреждений, вызванных экстремальными волнами.

– *"It came from nowhere, snapping giant ships in two. No one believed the survivors... until now"*<sup>\*</sup> (обложка New Scientist, 30 июня 2001 г.);

– *"Our captain, who has 20 years on the job, said he never saw anything like it."*<sup>♦</sup> (Сьюзан Робинсон (Susan Robison), представительница Норвежских круизных линий об инциденте с лайнером "Норвежская заря" (Norwegian Dawn), New York Daily News, 17 апреля 2005 г.).

Таким образом, первой трудностью на пути решения проблемы «волн-убийц» стало признание ее существования и перевод в плоскость научного исследования. У разных народов такие волны получили разнообразные названия, дополненные различными терминами после начала серьезного исследования проблемы: *freak waves, rogue waves, freaque waves, cape rollers, mad-dog, rabid-dog waves, abnormal waves, exceptional waves, giant waves, steep wave events, vagues scélérates, killer waves, anomalously high waves, extreme waves.*

<sup>\*</sup> Она пришла из ниоткуда, раскалывая гигантские корабли пополам. Никто не верил выжившим... до сегодня.

<sup>♦</sup> Наш капитан, проработавший уже 20 лет, сказал, что никогда не видел ничего подобного.

В русскоязычной литературе чаще всего используют термины аномально высокие (или просто аномальные) волны, либо «волны-убийцы».

Рассказываемые о разрушительных волнах истории зачастую бывают очень похожи, но могут демонстрировать и заметные различия; они могут быть использованы для лучшего понимания природного явления.

Одними из наиболее впечатляющих ситуаций являются **волны с сильной локализацией**. В качестве примера здесь можно привести случай с танкером World Glory, являвшимся на момент выпуска в 1954 г. самым крупным танкером в мире и самым большим грузовым судном, построенным в США (см. в [Lavrenov, 2003; Kharif et al, 2009\*]). Танкер затонул в 1968 г. в 105 км от Дурбана (см. карту на Рис. 1.2.3а), унеся жизни 22 чел., после того, как был разломлен пополам очень сильной волной (Рис. 1.2.2а). В результате аварии в море попало более 50 млн. литров нефти.

Танкер Prestige (водоизмещение 42 тыс. тонн, длина 250 м) затонул у испанских берегов в 2002 г. абсолютно похожим образом (Рис. 1.2.2б), разлив нефти превзошел предыдущий случай. И хотя окончательный вывод о связи аварии с «волной-убийцей» не бесспорен, очевидно, что корпус корабля оказался не способен выдержать волновую нагрузку. Судно было построено через 20 лет после событий с World Glory, отвечало всем требованиям Американского бюро судоходства (American Bureau of Shipping, ABS) и Международной ассоциации стандартизирующих компаний. Согласно отчету ABS, груз был размещен должным образом, и корпус имел достаточный запас прочности для погодных условий, имевшихся во время аварии (отметим здесь, что позднее этот отчет 2003 г. исчез с интернет-странички ABS).

По данным [Toffoli et al, 2005] число катастрофических аварий с участием волн длиной менее половины длины судна мало, так что в описанных случаях мы можем предположить критическую роль относительно длинных интенсивных волн, вызвавших неожиданно сильно неоднородное распределение нагрузок на корпус кораблей.

В 1995 г. 30-метровую аномальную волну встретил круизный лайнер Queen Elizabeth II во время шторма в северной Атлантике. Капитан вспоминал, что они наблюдали с мостика за **стеной воды** в течение пары минут до того момента, как она ударила корабль существенно выше ватерлинии. Подобное же описание «стены воды» давал один из членов персонала плавающей буровой вышки Veslefrikk B компании Statoil, которая была атакована большой волной в том же году, что привело к значительному ущербу [Haver & Andesen, 2000]. Первый помощник капитана нефтетанкера Esso Languedoc так описывал волну, запечатленную на фотографии на Рис. 1.2.2в:

*«Был шторм, и танкер двигался, опережая море. Поразительная волна пришла с кормы и обрушилась, переклестнув корму. Я не видел ее, пока она не появилась у борта, но она была особенной, много больше, чем остальные» [Lawton, 2001].*

Другой фотографический пример «стены воды» дан на Рис. 1.2.2г.

Последовательности нескольких волн неожиданно большой амплитуды также



(а)



(б)



(в)



(г)

Рис. 1.2.2. События с аномально высокими волнами. (а): Тонущий танкер World Glory (1968 г.) (фото с сайта П. Лью). (б): Тонущий танкер Prestige (2002 г.). (в): Фотография, сделанная на танкере Esso Languedoc у берегов Дурбана в 1980 г. (г): Фотография "стены воды" (из [Faulkner, 2001]).

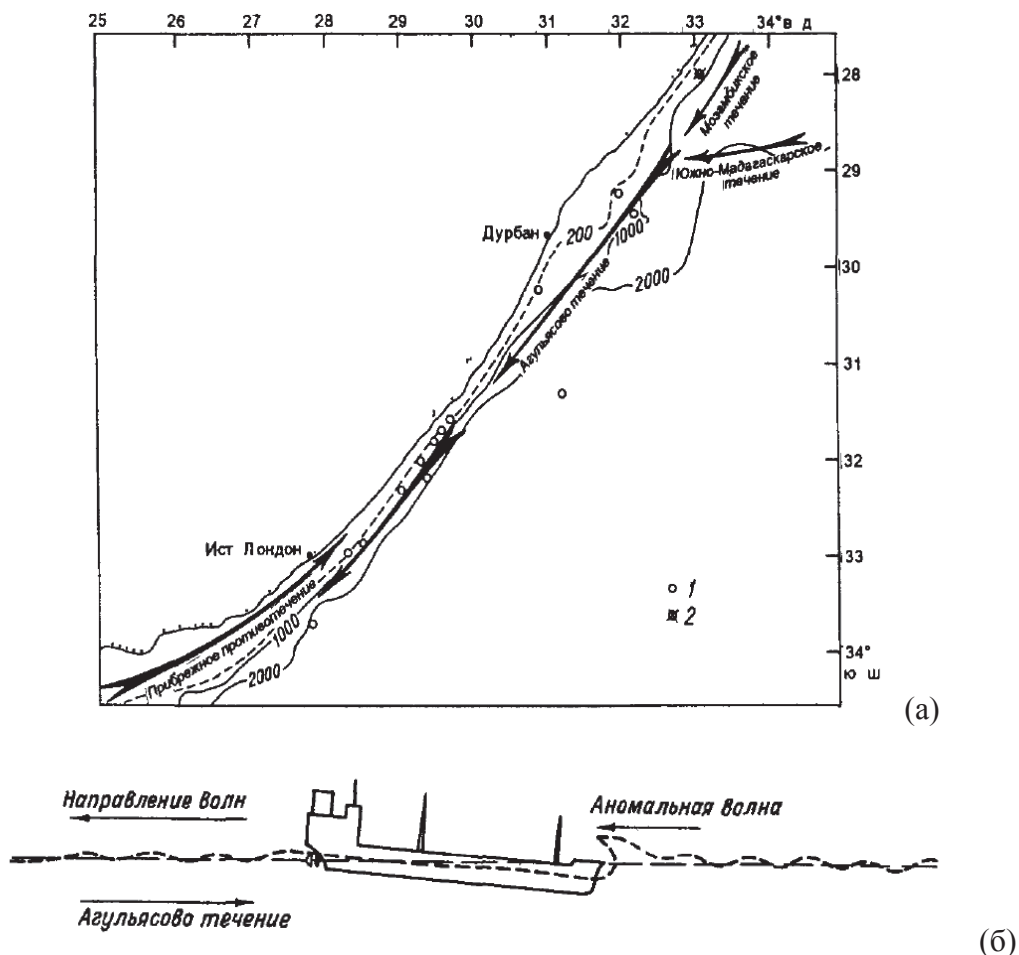


Рис. 1.2.3. Карта юго-восточного побережья Африки с указанием течения мыса Игольного (Agulhas current, стрелками), глубин и событий «волн-убийц» (кружками, перечеркнутый кружок отмечает место инцидента с Таганрогским Заливом) (а), а также схема инцидента с Таганрогским Заливом на течении мыса Игольного (б). Воспроизведено из [Лавренов, 1998].

известны, их часто именуют «три сестры». Одним из известных случаев является встреча французского крейсера Жанна д'Арк (Jeanne d'Arc) со «славной троицей» из трех неожиданно высоких волн [Moreau et al, 2005]. Ситуация для корабля осложнялась поломкой одного из винтов, так что инцидент едва не кончился для корабля плачевно, заняв по времени около 30 с; на русском языке этот случай подробно описан в работе [Дьяченко и др., 2011].

В 1943 г. две последовательных неожиданно высоких волны разбила иллюминаторы круизного лайнера Queen Elizabeth на уровне 28 м выше ватерлинии. Две неожиданно высокие волны перевернули траулер Kotoku в 2006 г.; три другие волны вышвырнули рыболовецкий корабль Starrigavan на мол в 2007 г. [Lawton, 2001].

Разбиение волн на группы является естественным процессом, объясняемым, в частности, действием модуляционной неустойчивости, как будет обсуждаться в Главах 2, 4, 5. Волна, находящаяся в центре группы, естественно, обладает большей высотой и энергией.

В прошлом моряки разных национальностей замечали опасные волновые группы, и очевидно, что вариант названия «три сестры» является аналогом русского «девятого вала» – другого названия чрезвычайно опасной волновой группы. Серфингисты иногда ждут максимальную, седьмую, волну. Последовательность интенсивных волн опасна не только большой амплитудой индивидуальных волн, но может вызывать резонанс корабля или морского сооружения. Важной деталью в отношении «волн-убийц» является то, что роль волновых групп, точнее, нелинейных волновых групп, ранее оказывалась существенно недооцененной, как будет обсуждаться в Главе 4 диссертации.

Советский танкер Таганрогский Залив испытал на себе действие другого типа волны – «дырки в море», которую иногда называют более опасной, чем волна с высоким гребнем, поскольку провал в морской поверхности не заметен капитану до того момента, пока судно не начало в него скатываться. В результате инцидента погиб матрос, и было назначено расследование с привлечением научной экспертизы [Лавренов, 1998; Lavrenov, 1998; 2003].



(а)



(б)

Рис. 1.2.4. Фотография необычной волны у берегов Камчатки, сделанная М. Соколовским (а) и волна, сгенерированная в изогнутом лотке Университета Эдинбурга (б).

Свидетели отмечают, что неожиданная единичная волна появилась перед кораблем и захлестнула корабль. По описанию матросов, ощутивших воздействие волны, судно как бы плавно пошло вниз, скользя по волне, и «зарылось» в вертикальный срез ее фронтальной части. Никто удара не ощутил, волна плавно перекатилась через бак судна, накрыв его слоем воды толщиной более 2 м.

Очень похожие описания, относящиеся ко времени Второй мировой войны, давали капитаны корабля Edinborough Castle, крейсера Birmingham и некоторых других [Haver & Andersen, 2000]. Эти случаи произошли вдоль юго-восточного побережья Африки, известного своим сильным течением мыса Игольного (в описаниях его называют «водяной рекой»), идущим с северо-востока на юго-запад вдоль берега, Рис. 1.2.3а. Корабли опускались вниз по длинному пологому склону волны, а потом встречали высокий гребень (Рис. 1.2.3б). Эти события возродили интерес к исследованию капитана Дж. Мэллори [Mallory, 1974]. Он собрал коллекцию из документированных случаев встреч судов с аномальными волнами на течении мыса Игольного (см. на Рис. 1.2.3а) и проанализировал их, выдвинув гипотезы о механизмах формирования таких волн (суперпозиция нескольких волновых систем плюс эффект блокировки волн на встречном течении), которые позднее были отчасти признаны. Например, схема взаимодействия корабля с волнами на течении на Рис. 1.2.3б в работе [Лавренов, 1998; Lavrenov, 1998; 2003] почти повторяет рисунок из статьи [Mallory, 1974]. Интересно отметить, что причиной всплеска числа фатальных событий с кораблями у берегов Африки в [Давидан и Лопатухин, 1982] указывается война в Египте, из-за которой Суэцкий канал был закрыт, и кораблям, связывающим Европу и Азию, пришлось плыть старым путем, огибая Африканский континент. В этой же книге можно найти другие описания происшествий с кораблями в этой акватории.

В качестве другого недавнего случая можно упомянуть крупное грузовое судно Semfjord, которое перевернулось и затонуло, не успев передать сигнал о помощи, в проливе Пентленд-Ферт (Pentland Firth, Шотландия) в начале января 2015 г. Это место известно сильнейшими приливными течениями (до 5 м/с и больше). Для нашей цели **аномальные волны на течениях** особенно интересны, поскольку в Главе 5 мы предлагаем и развиваем нелинейные механизмы повышения вероятности появления высоких волн на встречных струйных течениях.

Небольшое исследовательское судно NOAA Ballena было опрокинуто неожиданно появившейся **уединенной волной** у берегов Калифорнии в 2000 г. Погода была хорошей с ясным небом и прозрачными волнами зыби высотой 1.5–2 м, как вдруг примерно в 30 м в стороне от судна начала нарастать волна высотой около 4.5 м. Она достигла обрушения и

опрокинулась над кораблем, перевернув его. Другой случай относится к акватории у берега Камчатки, где каякерами наблюдалось около 10 необычных одиночных волн (Рис. 1.2.4а). С моря приходили пологие волны каждые 15-20 с. Аномальные волны вырастали, распространялись примерно на 50 м и обрушивались. Свидетели уточняют, что фотография на Рис. 1.2.4а имеет особый ракурс – словно с торца протяженной (порядка 70 м) волны. Окончательной интерпретации этих волн дано не было, но на Рис. 1.2.4б нами приведена фотография из изогнутого экспериментального бассейна Эдинбурга, где видна волна, очень похожая на изображенную на Рис. 1.2.4а. Таким образом, наиболее вероятным в отношении волны, запечатленной на Рис. 1.2.4а является, на наш взгляд, предположение о геометрической фокусировке волн, вызванной, видимо, особенностями локальной топографии дна. В качестве другой возможности нетривиальных эффектов динамики локализованных волн с образованием аномально высоких волн отметим теоретические работы по взаимодействию планарных солитонов на мелкой воде [Peterson et al, 2003; Porubov et al, 2005; Lavrenov & Porubov, 2006].

Экстремальные события на берегу, схожие по своим характеристикам неожиданности и интенсивности с описанными выше примерами, сейчас кажутся описанными существенно хуже, несмотря на то, что наблюдались давно и часто. Обычно такие события характеризуются внезапным, скоротечным затоплением берега, либо возникновением у кромки воды неожиданно сильных волн, их всплесков и т.п. Определение «волн-убийц» на берегу кажется еще более размытым, чем в случае поверхностных волн в открытом море, и как минимум в некоторых случаях граничит с явлениями штормовых нагонов и метеоцунами, хотя доподлинно причины конкретных явлений зачастую установить не удается. В средствах массовой информации регулярно появляются сообщения о смытых в море неожиданными волнами прогуливающимися по берегу [Didenkulova et al, 2006<sup>\*</sup>; Slunyaev et al, 2011<sup>\*</sup>; Nikolkina & Didenkulova, 2011, 2012].

Другой частый класс экстремальных волновых явлений на берегу относится к неожиданно мощным всплескам волн, зачастую в условиях спокойного моря. Так, в книге [Горский, 1968] упоминаются взбросы воды на 30-40 м в районе Ялты, а в архипелаге Шетландских островов фонарь маяка был разбит на высоте 60 м. В интернете можно найти множество захватывающих фотографий маяков, окутанных брызгами разбивающихся волн, см. также в [Didenkulova et al, 2006<sup>\*</sup>; Nikolkina & Didenkulova, 2011, 2012]. На Тайване сейчас большое внимание уделяется проблеме безопасности рыбаков, которые ловят рыбу с волнозащитных сооружений (вертикальных бетонных стенок) и волноломов. Внезапные сильные всплески волн часто приводят к их гибели. Перехлестнувшие через защитные

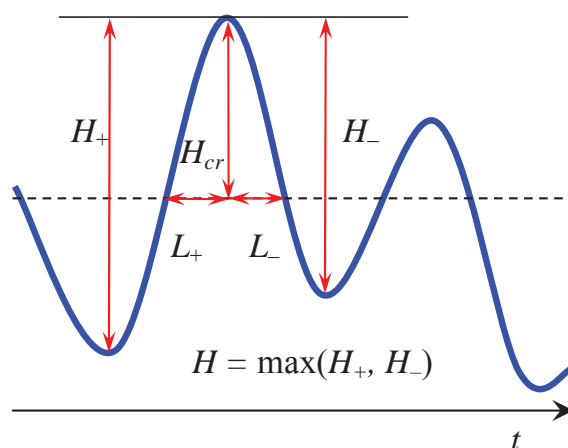


Рис. 1.2.5. Схематическая структура волны на временной записи.

конструкции волны приводили также к повреждению припаркованных автомобилей. Сейчас имеется немало число задокументированных свидетельств, когда «волны-убийцы» приходили совершенно неожиданно. Естественно, что экстремальные волны оказывают повышенное давление на береговые сооружения (см. описания в [Горский, 1968] и более современные свидетельства, основанные на инструментальных измерениях [Peregrine et al, 2005]).

Эффекты возникновения аномально высоких волн в прибрежной полосе и на берегу выходят за рамки настоящей диссертации и не будут в ней рассматриваться.

Приведенная классификация экстремальных волн условна, другие способы разделения аномальных волн на разные классы предлагались неоднократно (например, [Haver & Andersen, 2000; Haver, 2005; Liu & MacHutchon, 2006; Rosenthal & Lehner, 2008; Didenkulova & Anderson, 2010]). Окончательная классификация сейчас вряд ли возможна, особенно учитывая нечеткое определение «аномальной волны». Использование лишь одного критерия превышения по высоте  $H$

$$AI = \frac{H}{H_s} > 2, \quad (1.2.1)$$

где  $H_s$  – значительная высота (см. Рис. 1.2.5), в частности, не делает различий между волнами разной абсолютной высоты. В то же время ясно, что с практической точки зрения волны высоты 10 см, превышающие окружающие в 3 раза, менее опасны, чем 20-метровые волны, пусть и превышающие соседние в 1.5 раза. По этой причине в ряде работ (особенно по измерениям в море) вводится дополнительный критерий на минимальную высоту волны. Другой вопрос касается числа 2, расположенного в правой части неравенства (1.2.1). В других работах используют и другие значения (наиболее часто – 2.2). Фактор 2 в книге



[Holthuijsen, 2007] соотносится с заданием «волны-убийцы» как максимальной волны за типичное время шторма (согласно классической рэлеевской статистике), что делает выбор такого определения осмысленным. Есть вопросы и с выбором значительной высоты  $H_s$ . Использование усредненного параметра для наиболее интенсивных волн снижает влияние мелких волн (ряби), но  $H_s$  определяется для выборок волн, которые могут быть получены разными способами. Эффект статистической неопределенности из-за конечного числа волн в выборке растет с ростом  $H_s$ ; для  $H_s = 6-8$  м в условиях Северного моря он может достигать 7% [Bitner-Gregersen & Magnusson, 2014].

Модификации определения «волны-убийцы» можно найти в [Kjeldsen, 2001; Лопатухин и др., 2003], учитывающие другие геометрические характеристики волны (см. на схеме Рис. 1.2.5) либо другие статистические характеристики выборки волн. Отметим здесь, что в настоящее время анализ инструментальных записей волн разработан для случая



Рис. 1.2.6. Волны, полученные в новом круговом бассейне университета Эдинбурга (результат геометрической фокусировки). (FloWave Ocean Energy Research Facility <http://www.flowavett.co.uk/>)

временных последовательностей смещения поверхности. Для моментальных снимков однонаправленных волн, вообще говоря, подходы анализа волн должны быть модифицированы (это вопрос обсуждается нами в Разделе 4.3). Для измерений двумерной взволнованной поверхности, которые в наши дни становятся доступными, очевидно, требуются новые методы (см. примеры в [Xiao et al, 2013; Sanina, 2014]).

Высота волны – наиболее удобная характеристика, отражающая степень интенсивности волны, но не единственная. Неоднократно отмечалось, что кроме высоты особую опасность представляла специфичная форма волны или последовательности окружающих волн (см. примеры искусственных «волн-убийц», воспроизведенных в экспериментальном бассейне, на Рис. 1.2.6). Нетипичная длина волны или ширина гребня могут стать причиной недопустимого перераспределения нагрузки на корпус корабля и вызвать трагедию, аналогично случаям на Рис. 1.2.2а,б. Для безопасности морских платформ критическим параметром волн является не высота  $H$ , а высота гребня  $H_{cr}$  (см. Рис. 1.2.5), так что в приложении к этой проблеме вместо критерия (1.2.1) используют схожий, но записанный для  $H_{cr}$  (например,  $H_{cr}/H_s > 1.25$  [Krogstad et al, 2009]); иногда критерии на  $H$  и  $H_{cr}$  используют совместно. Пример волны с неожиданно высоким гребнем приведен на Рис. 1.2.7.



Рис. 1.2.7. Фотография волны, захлестнувшей мостик, соединяющий две секции стационарной платформы (фотография получена в частном порядке).

Случаи недопустимо серьезных происшествий, связанных с воздействием морских волн на платформы известны. 15 февраля 1982 г. огромная волна выбила окна и затопила комнату управления буровой установки, обслуживаемой компанией Mobil Oil на Большой Ньюфаундлендской банке (the Grand Banks of Newfoundland). Вышка вскоре опрокинулась и затонула, при этом погибли 84 человека [Lawton, 2001]. Хорошо известная «Новогодняя волна» (см. описание в Разделе 1.3 и Рис. 1.3.4) захлестнула платформу Драпнер (Draupner) в Северном море 1 января 1995 г.; ее высота составила почти 26 м [Karunakaran et al, 1997, Trulsen & Dysthe, 1997].

Наиболее впечатляющие примеры аномальных волн, приводимые в современной литературе, представлены сильно асимметричными волнами с гребнями, очень высокими по сравнению с ложбинами или глубиной места. В сложных метеоусловиях корабли обычно движутся перпендикулярно линиям гребней с малой скоростью. Особое направление движения интенсивной волновой группы, как в случае «трех сестер», описанном выше, может сопровождаться сложным волновым движением и креном судна, препятствующим нормальному безопасному прохождению волн. Крутые волны, даже не очень большой

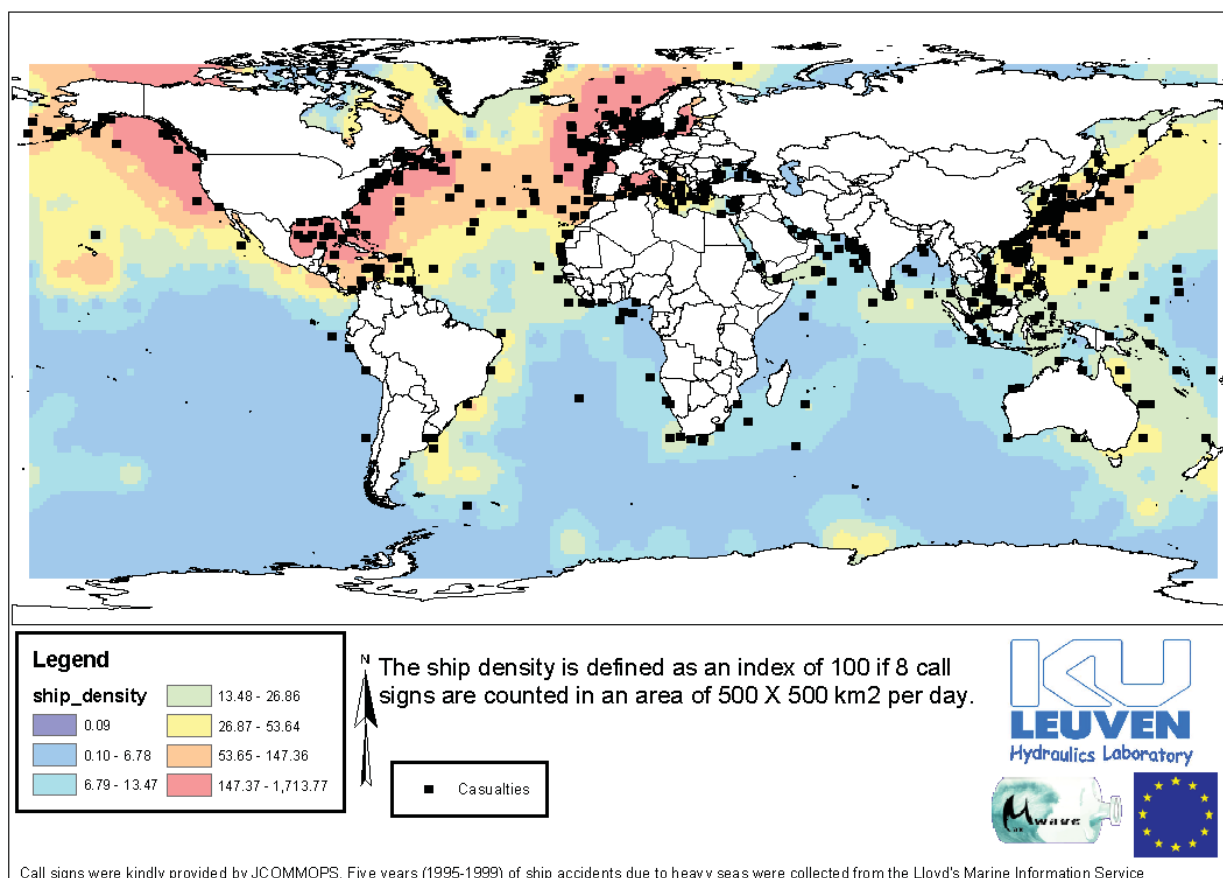


Рис. 1.2.8. Плотность судоходства (цветом) и случаи аварий из-за плохих погодных условий за 1995-1999 гг. (значками) по данным [Toffoli et al, 2005].

высоты, являются причиной опасных для судна процессов, таких как слеминг. Также известно, что обрушающиеся волны оказывают существенно более сильное воздействие на кораблю или сооружение, чем пологие волны схожего размера. Для 15-секундной 30-метровой волны, которую можно встретить в открытом океане, действие ее обрушающейся части в [Чаликов, 2012] оценено в 2 кг тротилового эквивалента. Регистрации аномального давления, оказываемого волнами на стационарные сооружения и платформы, приводились в литературе [Kjeldsen, 2001; Peregrine et al, 2005].

Благодаря относительно большому числу зарегистрированных случаев встреч кораблей с аномально высокими волнами в [Toffoli et al, 2005] была выполнена их статистическая обработка на основе 270 документированных случаев, зарегистрированных в базе Ллойдса (Lloyd's Marine Information Service, LMIS), см. Рис. 1.2.8. В [Toffoli et al, 2005] подчеркивается, что часто происшествия происходили в условиях скрещенных волн (ветровые волны плюс зыбь). При этом не было выявлено каких-либо закономерностей в отношении характеристик волновой поверхности (индекс модуляционной неустойчивости, который будет обсуждаться в Главе 4, не был рассмотрен), водоизмещения кораблей. Более 90% случаев произошло на глубинах свыше 50 м (в коллекции инцидентов, собранных на основе данных печати в [Didenkulova et al, 2013], все случаи – на глубине до 50 м). Из Рис. 1.2.8 явно следует, что регионально места встреч с опасными волнами хорошо коррелируют с местами интенсивного судоходства.

Закончим этот раздел заключением из [Toffoli et al, 2005], что, по всей видимости, как минимум в практических целях нужно использовать разные критерии для определения аномальных волн и «степени аномальности», поскольку конечной целью оценок безопасности являются даже не сами волны, а различные объекты, на которые они действуют. В настоящем исследовании будет использовано упрощенное определение «волны-убийцы» в терминах ее высоты (1.2.1). Также будет подразумеваться, что аномальные волны должны обладать свойством неожиданности, нас будут интересовать физические механизмы, способные обеспечивать быстрый существенный рост амплитуды волн в локальной области, и соответствующая динамика волн.

### **1.3 Инструментальные измерения**

Неожиданность и скоротечность таких волн (имеющиеся свидетельства очевидцев аномальных волн в открытом море обычно говорят о длительности экстремальных событий до 1.5–2 минут, т.е., до ~10 периодов волн) ведут к малому числу фотографических регистраций и зачастую к противоречивым свидетельствам. Наблюдений в форме рассказов и даже фотографий не достаточно для содержательного исследования феномена «волн-

убийц». Инструментальные измерения способны предоставить объективную информацию для анализа и аккуратного исследования физических эффектов, лежащих в основе аномальных морских волн.

Истории инструментальных измерений смещения поверхности уже более 200 лет. По всей видимости, первые измерения (приливных волн) стали проводиться в французском Бресте, начиная с 1806 г. Приливы очень важны для нормальной деятельности портов; с другой стороны, это очень длинные волны, не требующие частых измерений. Первые

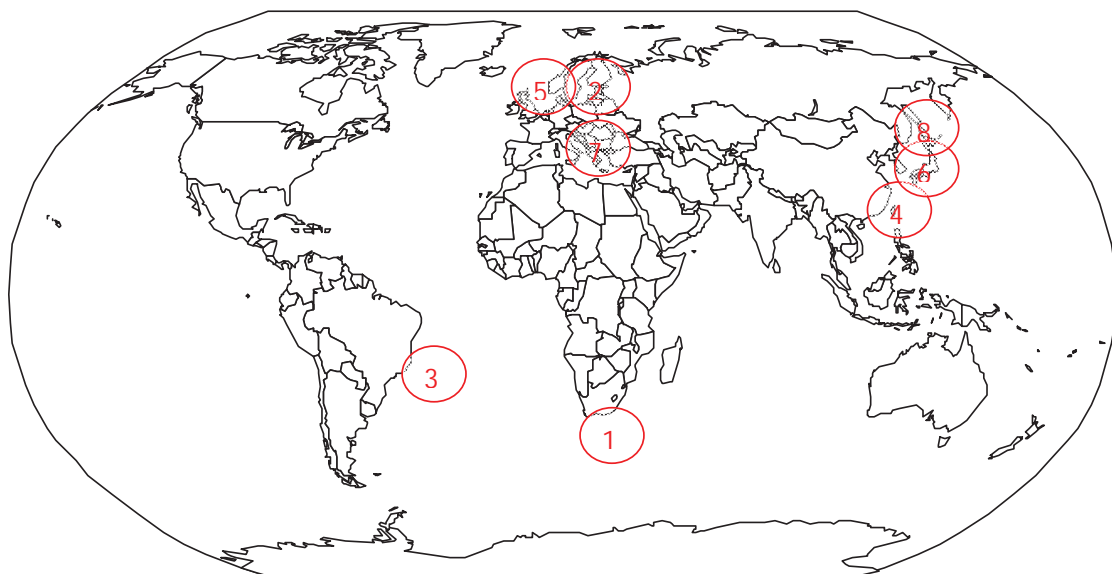


Рис. 1.3.1. Карта мест длительных регистраций поверхностных волн:

1 – у портового города Моссел-Бей (Mossel Bay, 1563 событий, глубина места 100 м, газодобывающая платформа, [Liu & MacHutchon, 2006]);

2 – Балтийское море (414 событий, зарегистрированных буями на глубине 7–20 м [Paprotta et al, 2003], 97 событий зарегистрировано ультразвуковым датчиком, расположенным на треноге на глубине 2.7 м [Didenkulova, 2011]);

3 – у побережья Бразилии у Рио-де-Жанейро (Campos Basin, Rio de Janeiro, 276 событий на глубинах 1050 м и 1250 м, измеренных буями [Pinho et al, 2004]);

4 – вокруг о. Тайвань (буи, расположенные вокруг острова на разных глубинах – от десятка метров до километров. В [Chien et al, 2002] упомянуто 175 событий на глубине 43 м, но общее число регистраций исчисляется как минимум тысячами);

5 – Северное море (измерения со стационарных платформ на глубинах 70–130 м, более 20 тыс. регистраций [Stansell, 2004, 2005; Haver & Andersen, 2000; Christou & Ewans, 2011; 2014]);

6 – Японское море (14 событий на глубине 43 м, ультразвуковой измеритель [Mori et al, 2002]);

7 – Черное море (3 события на глубине 85 м по данным буев [Lopatoukhin et al, 2003; Divinsky et al, 2004\*]);

8 – у о-ва Сахалин (более 1400 событий донным датчиком на мелководье [Кузнецов и др., 2014]).

измерения не отличались ни высокой частотой, ни точностью. Позднее оказалось возможным регистрировать более короткие волны в прибрежной зоне: волны цунами и длинные волны зыби. Волны в открытом море стали измерять с кораблей с приемлемой точностью начиная с середины XX века (здесь уместно упомянуть о существующей с 1784 г. и поныне развивающейся системе регистрации волн с кораблей Voluntary Observing Ship (VOS) [Григорьева и Гулев, 2011]). Регулярные исследования инструментальных измерений морских волн развернулись в 1960-х гг. (см. [Pugh, 1987; Рабинович, 1993]). Сегодня поверхностные колебания в диапазоне ветровых волн измеряют посредством различных устройств: датчиков давления и ультразвуковых датчиков, оборудованных акселерометрами буюв, лазерными альтиметрами, радарами... Измерительные устройства могут размещаться на дне, платформах, самолетах, космических аппаратах. Техническая база непрерывно совершенствуется. В отношении «типичных» аномальных волн, о которых пойдет речь, наиболее подходящими являются, по-видимому, измерения, сделанные смотрящими вниз лазерными альтиметрами, установленными на платформах, и заякоренными буюми. Они являются источником наибольшего объема достоверных данных и обеспечивают длительные измерения, необходимые для регистрации таких редких событий как «волны-убийцы».

### **Проблемы измерений «волн-убийц»**

Аномальные волны относятся к **редким событиям** и могут регистрироваться только при достаточно длительном измерении. В случае мореплавания обычно интересуются наиболее опасной волной, которая встретится судном за время его эксплуатации (например, 25 лет). В случае нефтяных платформ нормы еще строже. При проектировке шельфовой платформы требуется уверенность, что волна, способная замочить платформу (без повреждений конструкции и травмирования обслуживающего персонала), встретится не чаще, чем 1 раз в 100 лет (см. подробнее во введении к Главе 4). В течение 10 000 лет на платформу не должна обрушиться волна, которая привела бы к ее разрушению, серьезному загрязнению окружающей среды, или воспрепятствовала безопасной эвакуации рабочих.

В настоящее время число инструментально измеренных волн (упоминавшихся в открытой печати), удовлетворяющих критерию (1.2.1) или его небольшим модификациям, составляет десятки тысяч. Сводная карта наиболее известных многолетних измерений поверхностных волн представлена на Рис. 1.3.1 с кратким описанием условий, типа измерительного устройства и числа регистраций «волн-убийц». Отмеченные районы относятся как к открытому океану, так и к шельфовой области, открытым или закрытым морям; глубины измерений варьируются от десятков метров до нескольких километров. На Рис. 1.3.1 обозначены заведомо не все длительные измерения. Краткие резюме этих и

некоторых других банков данных долгосрочных измерений содержится в обзоре [Dysthe et al, 2008]. Отметим Северное море, являющееся сейчас местом активной высокотехнологичной добычи нефти и газа. В акваториях России «волны-убийцы» регистрировались в Черном море [Lopatoukhin et al. 2003], у побережья Сахалина [Кузнецов и др., 2014]. Они также измерялись в Таллиннской бухте Балтийского моря [Didenkulova, 2011].

Наиболее представительная известная нам статистика «волн-убийц» собрана в работах [Christou & Ewans, 2011; 2014], она базируется на 122 млн. индивидуальных волн. Этот объем эквивалентен примерно 38 годам непрерывного измерения в одной точке (исходя из периода 10 с) и, согласно распределению Рэля для высот, обеспечивало бы одно событие с превышением  $H/H_s \approx 3.05$ . Записи из Северного моря составили 81% «нормальных» волн из этого банка данных и 92% «волн-убийц», что говорит о территориально неоднородном распределении вероятности высоких волн. Качественно различное отклонение распределения вероятности натуральных «волн-убийц» от распределения Рэля докладывалось в исследованиях, выполненных в акваториях разной глубины. Существенное превышение распределения Рэля получено в работах на глубокой воде [Mori, 2004; Pinho et al, 2004; Stansell, 2004; Liu & MacHutchon, 2006], для относительно мелкого моря распределение примерно ложится на рэлеевское [Mori et al, 2002], либо высокие волны возникают даже реже [Chien et al, 2002; Paprota et al, 2003].

Период аномальной волны не выбивается из ряда периодов «обычных» волн, и в наших оценках мы будем обычно считать волновой период равным 10 с. Появление «волны-убийцы» – зачастую **краткосрочное событие**, ее «время жизни» обычно оценивается не более нескольких минут. Эта черта требует достаточно частых измерений смещения поверхности (в отличие, например, от записи приливных волн или волн цунами). Такое требование вступает в противоречие с необходимостью длительного времени регистрации волн, – в том смысле, что объем данных измерений становится огромным. По нашему опыту, частота измерений 5 Гц в большинстве случаев обеспечивает достаточное временное разрешение регистраций (например, такое разрешение – у записей на Рис. 1.3.3, 1.3.5–1.3.7). Для более чем 50 тыс. часов измерений у южной оконечности Африки, обсуждаемых в [Liu & MacHutchon, 2006], это соответствует примерно  $10^9$  единичным измерениям, а для работы [Christou & Ewans, 2011] – в 10 раз больше. Обычно данные последовательных измерений представлены отрезками 10–30 минут, что объясняется исторически сложившимся требованием к выбору интервала статистической квазистационарности ветровых волн [Лопатухин, 2012]. На практике интервалы последовательных измерений могут идти с

заданной периодичностью (например, волны измеряются в течение 10 минут каждый час) либо при выполнении определенного условия (например, прохождения шторма или превышения значительной высотой заданного уровня). Либо данные последовательных измерений могут быть обработаны аппаратом, и сохранению подлежат только усредненные данные (такие как средняя и максимальная высоты, период волн и проч.), а данные непосредственных измерений стираются. Чередование периодов работы прибора, сохранение только данных статистической обработки, позволяет уменьшить объем данных, а также позволяет делать энергонезависимые устройства, но, естественно, приводит к потере информации об индивидуальных волнах.

Наконец, «волна-убийца» обычно является **экстремальной волной**, что усложняет задачу ее измерения, которое заключается в определении моментальных положений границы раздела между водой и воздухом. Для этой цели применяются различные методы, основанные, например, на отражении оптического, электромагнитного или акустического сигналов от поверхности, слежении за ускорением плавающих буев и т.д. Определение границы раздела между водой и воздухом является нетривиальной задачей в случае наличия воздушных пузырей, брызг, дождя, что нередко в ситуациях очень крутых обрушающихся волн, а также в штормовых условиях. Буи обладают собственной инерцией, искажающей измерения. Вместе с низкой частотой измерений и плохой калибровкой эти проблемы способны полностью перечеркнуть научную ценность экспериментальных результатов.

В работе [Forristall, 2005] приведены примеры, когда данные с нескольких тщательно откалиброванных измерительных систем, расположенных на одной платформе, оказывались

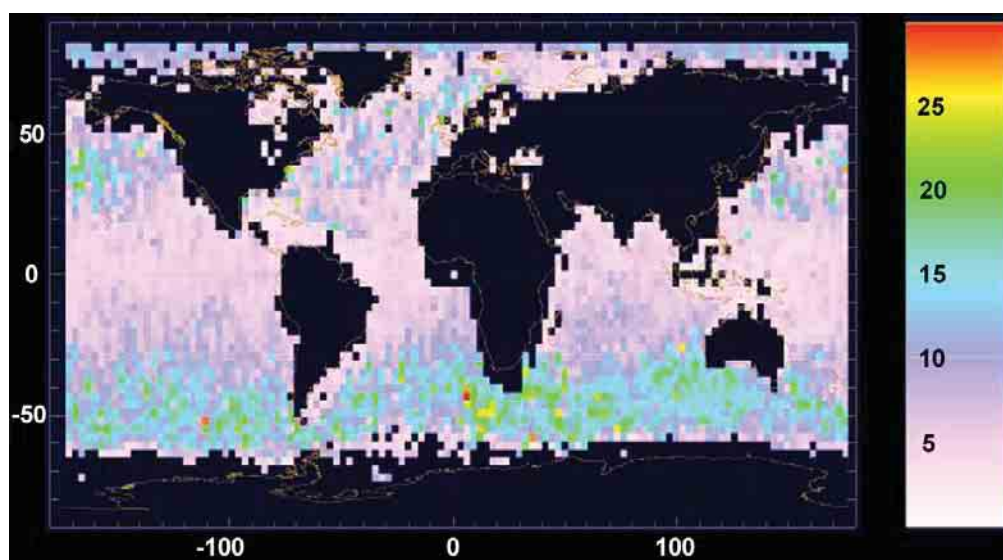


Рис. 1.3.2. Карта регистраций волн максимальной высоты по данным 3-недельных регистраций спутником ERS-2 в августе - сентябре 1996 г. (цветовая шкала дает высоты в метрах) [Rosenthal et al, 2003].



качественно разными. Такие ошибки могут являться следствием различных причин: неисправностью приборов или нештатным режимом их работы, случайными погрешностями, эффектами взаимодействия между волнами и поддерживающими измеритель опорам и проч. Для невысокой частоты измерений ошибка единственного измерения может уменьшить высоту гребня волны до умеренной либо наоборот, увеличить до нереалистичных значений. В [Liu & MacHutchon, 2006] приводятся примеры измерений волн с высотами, превышающими значительный уровень в 4–10 раз: до 70 м при глубине места 100 м. Сами авторы соглашались, что это заведомо ошибочные измерения. Некоторые ошибочные измерения могут быть легко обнаружены и отвергнуты, но другие – нет. В частности, для измерений буями известен эффект занижения высоты гребня [Olagnon & Magnusson, 2004; Bitner-Gregersen & Magnusson, 2005]. Кроме огромного массива данных, отличительной особенностью исследования [Christou & Ewans, 2011] является многоступенчатый контроль достоверности записей. Так, этот контроль отсеял 18% мареограмм без аномальных волн, оставив более полумиллиона достоверных двадцатиминутных записей, и отсеял 84% (!) записей с волнами-убийцами. Таким образом, при наличии огромного массива измерений (было обработано более 3.5 тысяч записей волн-убийц) полученная в итоге статистика

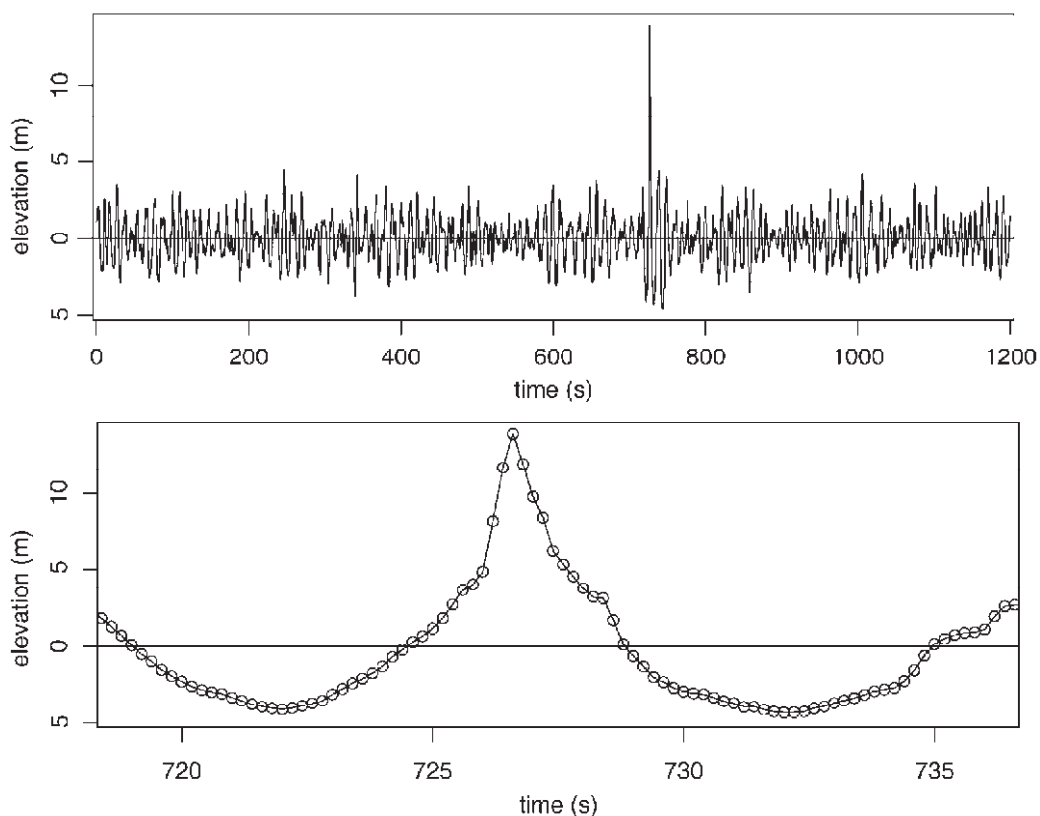


Рис. 1.3.3. Волна из материалов измерений [Stansell, 2005] с максимальным усилением высоты: 20- минутная запись и более подробная развертка максимальной волны (кружками обозначены данные измерений). Измерение лазерным высотомером с платформы в Северном море. Глубина места 126 м,  $AI = 3.19$ ,  $H_{max} = 18.04$  м.

оказывается недостоверной из-за неоднородного контроля качества.

### Временные последовательности, содержащие регистрации «волн-убийц»

Цитата из популярной книжки [Горский, 1968] начала эры измерений ветровых волн дает однозначную оценку максимально достижимых высот волн по представлениям около 40-летней давности:

*«Большинство океанских штормовых волн имеет в высоту 4–4,5 м. Волны выше 6–7 м – довольно редкое явление. Что же касается максимальной высоты волн, то в различных областях океана она может быть разной, но в общем не превышает 20 м».*

Несостоятельность таких представлений стала очевидной лишь недавно под давлением новых фактов. В литературе упоминается осмеянный доклад французского ученого и офицера капитана Д. д'Урвиля (Dumont d'Urville), в 1826 г. заявившего о встрече 30-метровой волны. Даже наличие трех свидетелей не помогло признанию этого наблюдения в качестве достоверного. Другое известное свидетельство относится к 1933 г., тогда 34 м волна была встречена американским кораблем в северной части Тихого океана [Draeger, 1964]. На сегодня существует значительное число инструментальных регистраций волн 30-

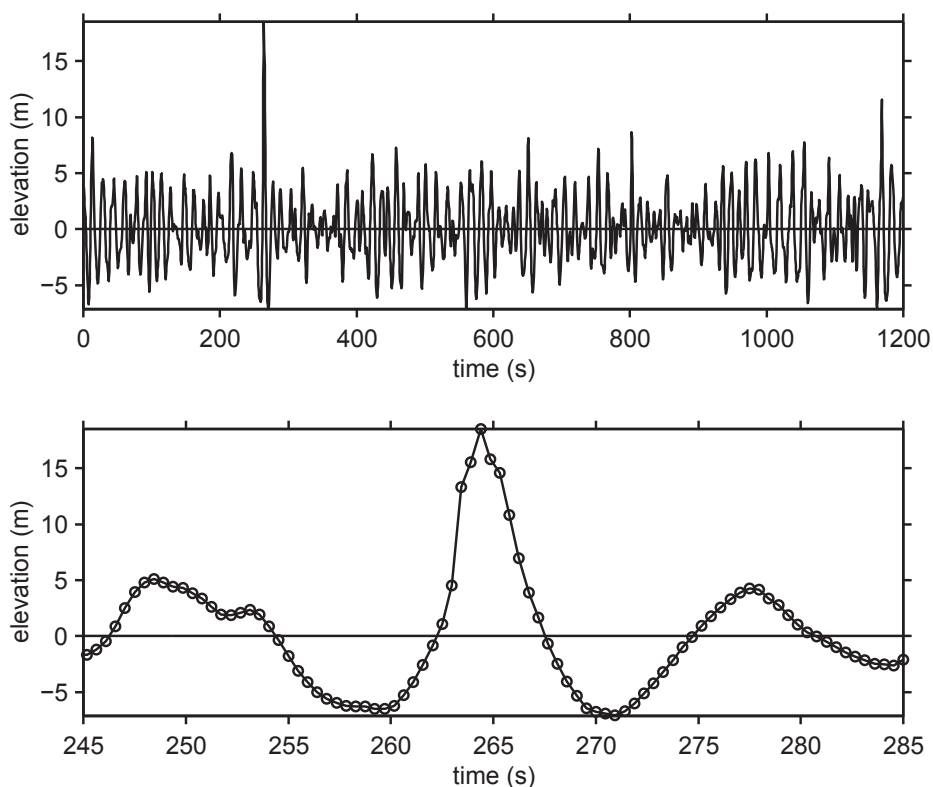


Рис. 1.3.4. "Новогодняя" волна [Haver, 2005], записанная с нефтяной платформы Драугнер во время шторма 1 января 1995 г. Глубина места 85 м,  $AI = 2.24$ ,  $H_{max} = 25.6$  м.

метровой высоты. Например, 30-метровые волны регистрировались во время урагана Льюис в 1995 г. (Halloween Storm, Hurricane Luis [Holliday et al, 2006]), 32.3-метровая волна была измерена во время тайфуна Кроса (typhoon Krosa [Liu et al, 2008]). В 1996 г. спутник европейского космического агентства ERS-2 в течение 3 недель с помощью радара регистрировал взволнованную поверхность Мирового океана. Полученные данные были использованы для реконструкции смещения поверхности и поиска наиболее высоких волн, и обнаружены волны до 29.8 м высоты, Рис. 1.3.2 [Rosenthal et al, 2003] (здесь необходимо отметить, что процедура восстановления смещения поверхности не столь однозначна, и авторы исследования заявляли в различных своих работах о максимальной высоте волн от 25 до 29.8 м). По оценкам на основе уже существующих долгосрочных измерений столетняя волна (то есть максимальная ожидаемая высота волны по измерению в одной точке) в Баренцевом море имеет высоту 24 м, а в Северном море – 30 м [Лопатухин и др., 2003]. Значительная высота волн (среднее значение трети наиболее высоких волн в выборке) более 16 м регистрировалась буями в разных областях северо-западной Атлантики [Turton & Fenna, 2008]; по данным спутниковых измерений значения  $H_s$  могут превосходить порог 20 м [Cardone et al, 2014].

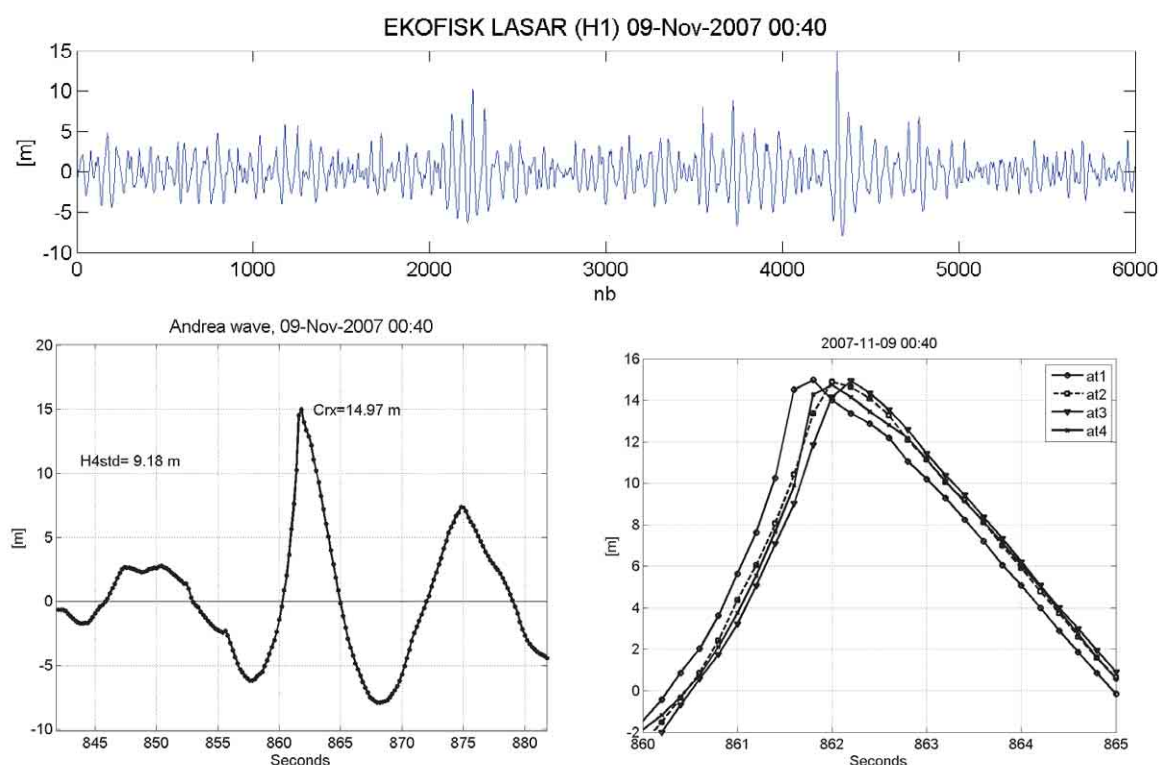


Рис. 1.3.5. Волна Андреа (Andrea wave) [Magnusson & Donelan, 2013] с очень крутым фронтом: 20- минутная запись (вверху), более подробная развертка максимальной волны (внизу слева, точками обозначены данные измерений) и 4 профиля гребня (внизу справа). Измерение лазерными высотомерами с платформы Ekofisk в Северном море. Глубина места 70 м,  $AI = 2.49$ ,  $H_{max} = 22.88$  м.

Как обсуждалось выше, существующий массив измерений поверхностных волн огромен, но он собран из данных для разных условий измерений (глубина места, течения, метеоусловия), измеренных различными устройствами и с заметной долей недостоверности. По этой причине проблема вероятностного описания экстремальных волн по натурным данным до сих пор не решена: разные статистические исследования приводят к противоположным заключениям.

Рассмотрим здесь некоторые примеры инструментальных измерений аномальных волн, помогающих представить типичный портрет аномально высокой волны. На Рис. 1.3.3 приведена запись, сделанная в Северном море, демонстрирующая очень большой коэффициент усиления высоты,  $AI = H/H_s = 3.19$ . По линейной теории (распределение Рэлея) эта волна должна встречаться раз в 200 лет, но по данным своих измерений П. Станселл ([Stansell, 2005]) говорит о превышении этой волной вероятности возникновения примерно в 300 раз.

Уже ставшая классической в проблеме "волн-убийц" запись Новогодней волны (New Year Wave), датируемая 1 января 1995 г., приведена на Рис. 1.3.4. Подобно предыдущему случаю, экстремальной является единичная волна. Ее высота 26 м существенно выше, чем в

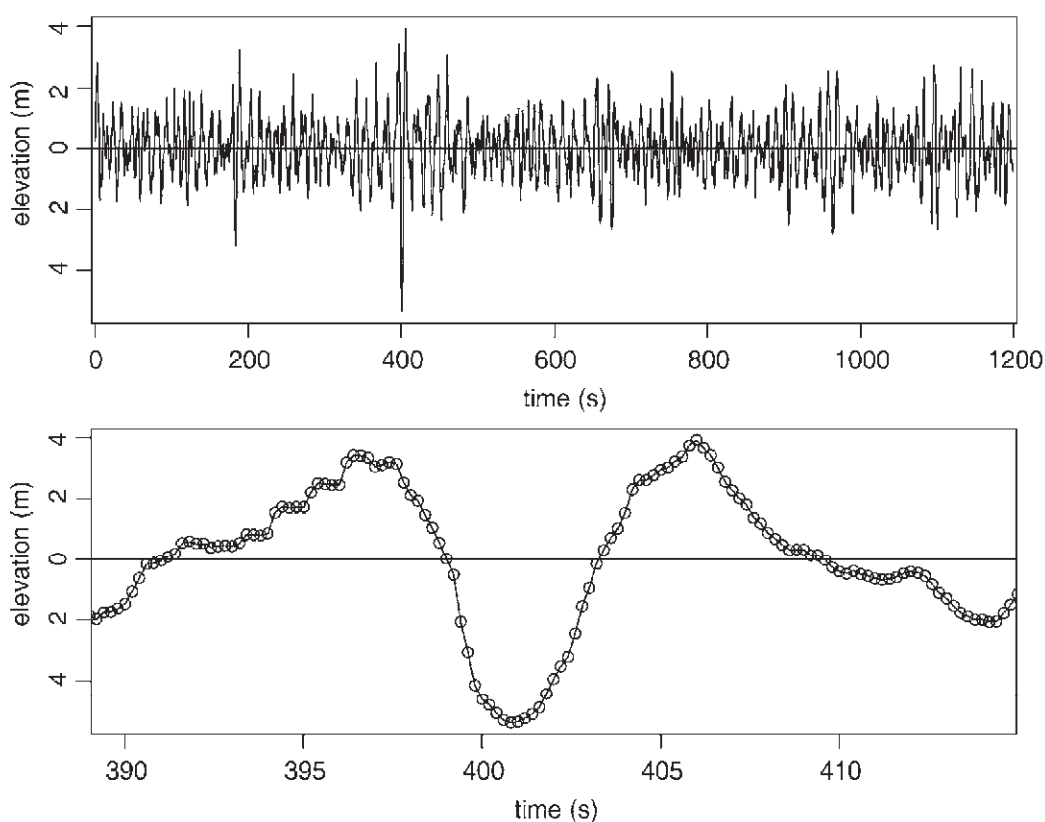


Рис. 1.3.6. "Дырка в море" [Stansell, 2005]. Измерение лазерным высотомером с платформы в Северном море. Глубина места 126 м,  $AI = 2.46$ ,  $H_{max} = 9.3$  м.

случае на Рис. 1.3.3, но при этом наблюдается меньшее превышение фонового волнения,  $AI = 2.24$ . С. Хавер [Haver, 2005] отметил, что ее высота ниже высоты 100-летней волны (ок. 27 м), но высота гребня  $H_{cr} = 18.5$  м – исключительная, ее вероятность близка к годовой вероятности  $10^{-4}$  (т.е., должна встречаться 1 раз в 10 000 лет).

Аномально высокая, близкая к обрушению волна с крутым фронтом ( $AI = 2.49$ ) была измерена во время шторма Андреа (Andrea storm) в ноябре 2007 г. в Северном море [Magnusson & Donelan, 2013] с платформы Ekofisk, причем сразу четырьмя близко расположенными высотомерами, Рис. 1.3.5. Записи аномальных волн в Японском море в [Mori et al, 2002] соответствуют еще более мелкой воде (43 м.), но и там отмечены случаи очень большого усиления волн до  $AI = 2.67$  (т.н. волна Юра, Yura wave).

Пример «дырки в море» дан на Рис. 1.3.6. Хотя абсолютная величина высоты волны не велика, коэффициент усиления очень большой ( $AI = 2.46$ ). В целом, число волн на глубокой воде с высокими гребнями превышает число волн с глубокими ложбинами. Естественным объяснением этого факта может быть вертикальная асимметрия волн Стокса, которая сохраняется и в случае модулированных волн, как будет обсуждаться в Разделе 3.3.

За счет дисперсии волн на глубокой воде число волн во временной записи вдвое

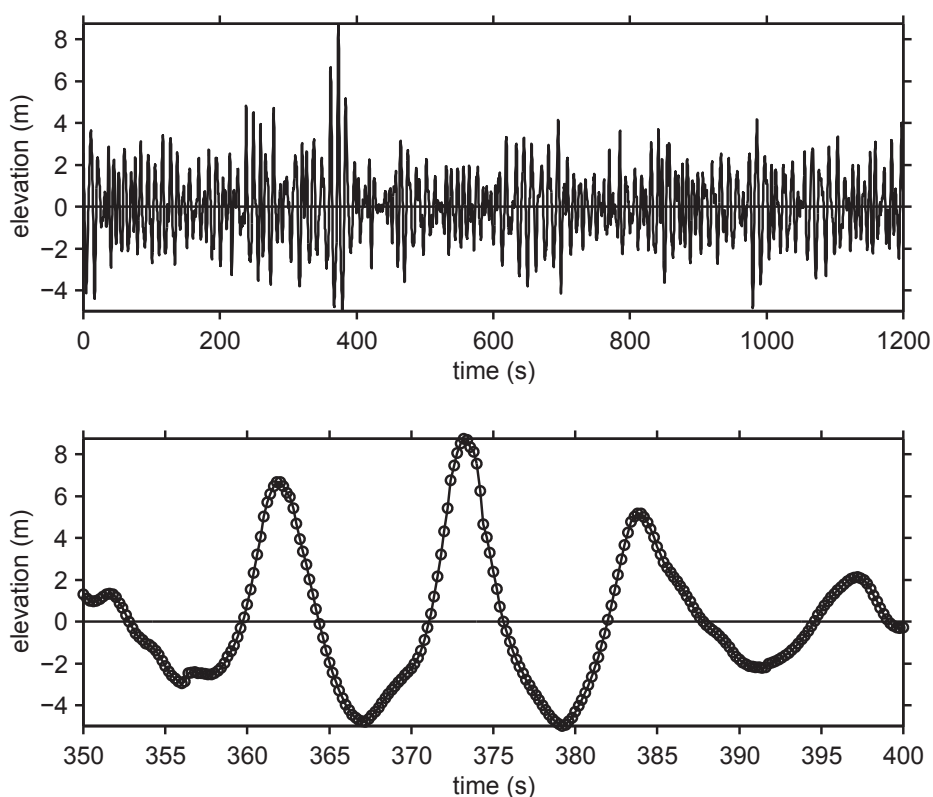


Рис. 1.3.7. Аномальные волны, распространяющиеся группой [Slunyaev, 2006\*]. Измерение лазерным высотомером с платформы North Alwyn в Северном море. Глубина места 126 м,  $AI = 2.23$ ,  $H_{max} = 13.71$  м.

выше, чем число волн на моментальной фотографии. По-видимому, наиболее часто «волны-убийцы» представлены единичной экстремальной волной. В то же время, группы интенсивных волн, когда критерию (1.2.1) удовлетворяют сразу несколько последовательных волн, также регистрировались неоднократно, см. пример на Рис. 1.3.7. Единичные аномальные волны часто формируются на фоне интенсивных групп, как, например, на Рис. 1.3.5, к такому выводу приводит анализ данных, обсуждаемый далее в Разделе 2.4 диссертации. Из-за дисперсии группы бегут вдвое медленнее, чем волны заполнения, потому является ли записанная волна – возвышением или провалом на поверхности воды, зависит от фазы волны, принадлежащей группе. Недавно отмечен эффект замедления скорости гребня, когда он становится очень крутым [Banner et al, 2014], что также может увеличивать вероятность регистрации высоких гребней по отношению к регистрации глубоких ложбин.

На Рис. 1.3.8 дан пример «отечественной» аномальной волны, зарегистрированной в Черном море вблизи Геленджика; она описана и анализировалась в нашей работе [Дивинский и др., 2004\*]. У нее уникальный коэффициент усиления  $AI = 3.9$ , но сам экстремальный гребень представлен на записи всего одной точкой. Частота измерений смещения поверхности на Рис. 1.3.8 немногим чаще, чем 1 раз в секунду; записи на

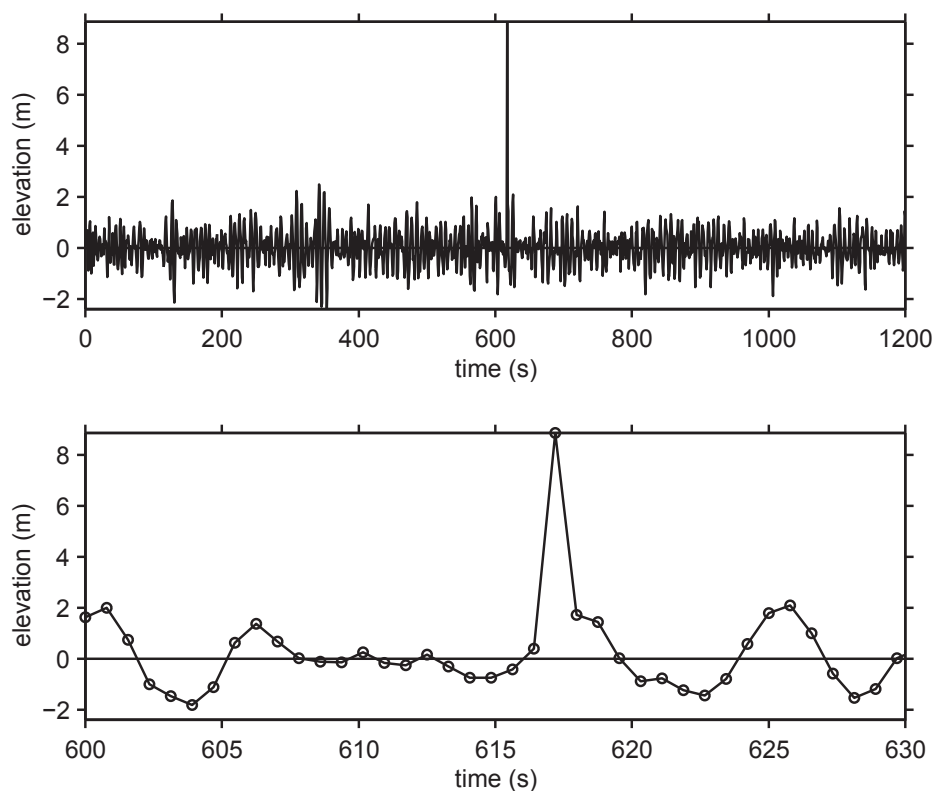


Рис. 1.3.8. Запись аномальной волны с рекордным коэффициентом усиления [Дивинский и др., 2004\*]. Измерение буем в Черном море. Глубина места 85 м,  $AI = 3.91$ ,  $H_{max} = 10.32$  м.

Рис. 1.3.3, 1.3.5–1.3.7 сделаны с частотой 5 Гц, а на Рис. 1.3.4 – с частотой 2.133 Гц и хорошо прописывают профили волн.

### Регистрации трехмерных волн

Как уже упоминалось, можно выделить пирамидальные аномальные волны или «стены воды». В первом случае протяженность гребня сопоставима или даже короче, чем длина волны, а во втором – гребни могут быть очень длинными (для волн зыби – километровой длины). В первом случае нет выделенного направления расположения волновых фронтов, и эта ситуация очень сложна для мореплавания. Во втором случае создаются условия, благоприятные для развития модуляционной неустойчивости и, как будет обсуждаться далее, росту вероятности образования высоких волн.

Трехмерным волнам соответствуют двумерные поверхности раздела между водой и

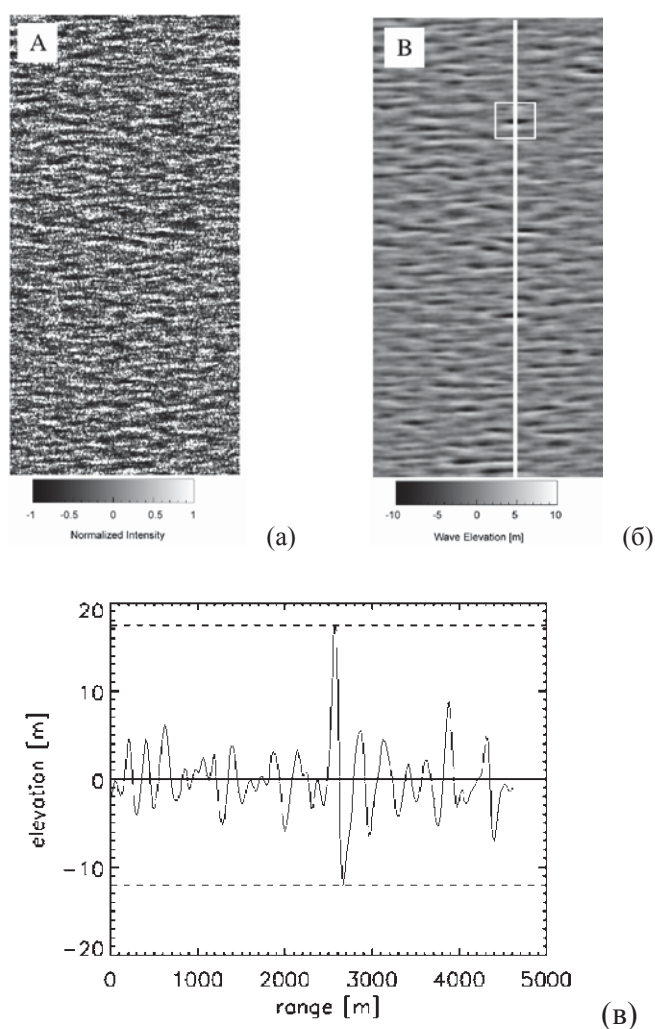


Рис. 1.3.9. Радиолокационное изображение со спутника ERS-2 размером 5 км × 10 км (а), восстановленное поле смещений поверхности (б) и разрез вдоль линии, показанной на панели (б), дающий моментальный снимок смещения поверхности (в).

воздухом. Для ответа на вопрос о форме волны в соседних точках пространства измерений в одной точке, на основе которых базируется наше представление о динамике морских волн, не достаточно. Требуется измерения двумерной поверхности, а лучше – ее динамики. Это задача нового уровня сложности, которая сейчас только начинает решаться. В этой связи многообещающим является использование радаров с синтезированной апертурой, которые могут быть установлены на самолетах, спутниках, а для оценки оперативной обстановки – на кораблях. На настоящее время это единственная технология, позволяющая давать снимки больших областей поверхности с детализацией, достаточной для наблюдения единичных волн.

Аномальные волны могут регистрироваться на основе изображений топографии морской поверхности, полученных с помощью радаров из космоса. Радар с высоты примерно 800 км позволяет сканировать поверхность в полосе 100 км с разрешением 20 м × 20 м. В основе действия локации лежит брэгговское рассеяние на короткой ветровой ряби, модулированной гравитационными волнами. В частности, во время «Новогодней волны» в прилегающей акватории размером 100 км × 100 км было отмечено еще несколько экстремальных событий [Lehner, 2005; Rosenthal & Lehner, 2008]. Другой пример работы такой системы – глобальная карта максимальных волн – приведен на Рис. 1.3.2. Для восстановления смещения поверхности, либо получения двумерного спектра волновых векторов, необходимо расшифровать радиолокационное изображение (Рис. 1.3.9а,б). На Рис. 1.3.9в представлен результат анализа – 5-километровый моментальный продольный разрез взволнованной поверхности с максимальной волной чуть ниже 30 м.

Как уже отмечалось, процедура восстановления смещения поверхности по данным рассеяния еще недостаточно отработана, см. критику, в частности, в обзоре [Dysthe et al, 2008]. На пути построения алгоритмов восстановления поверхности волнения стоят серьезные трудности, и на настоящий момент серьезных подтверждений этих измерений не было. Другая перспективная альтернатива заключается в установке радаров на берегу или на кораблях. В этих случаях восстановление поверхности по полученным изображениям могло бы быть использовано для оперативного прогноза приближающихся аномально больших волн.

### **Критерии опасных состояний моря**

Аномальные волны сильно локализованы во времени (от секунд до нескольких минут) и пространстве (несколько длин волн – от сотни метров до километров). Для столь малых масштабов очень трудно или невозможно обеспечить детерминистский прогноз, учитывая, во-первых, огромную разницу с масштабами внешних сил (ветры, атмосферные фронты,



штормы, течения, геострофические вихри), а, во-вторых – исключительное разнообразие и сложность процессов, сопровождающих динамику ветровых волн. Потому на «метеорологическом» масштабе разумно говорить об усредненных параметрах волн, которые должны характеризовать **состояние моря**. Общепринятые характеристики – значительная высота волн, пиковый период и направление волн во многих случаях достаточны для описания волновой обстановки. Ключевой проблемой «волн-убийц» является установление связей между параметрами морского состояния и степенью опасности волн. В отсутствии достаточной информации из натуральных измерений и в целях упрощения постановки задач проводятся теоретические исследования, одним из примеров которых является настоящая диссертация. Но здесь мы хотим дать короткую сводку имеющихся результатов анализа натуральных данных.

Предпринимаются попытки феноменологического отыскания связей между параметрами состояния моря (отметим, что на практике используется более 100 параметров) и опасностью высоких волн. Многие из этих параметров базируются на спектрах волн, что удобно для преимущества с существующими системами прогноза волновой погоды, использующими кинетические уравнения. В частности, корреляции между данными инцидентов с опасными волнами и характеристиками морского состояния (такими как значительная высота волн, средний период волн, крутизна волн и ширина углового спектра), а также взаимные связи между волновыми параметрами, искались в работе [Toffoli et al, 2005]. Авторы отмечают, что во время инцидентов волновые условия были на удивление спокойными, в то время как характеристики опасных волн – неожиданно экстремальными. Этот вывод противоречит частому ожиданию, что «волны-убийцы» появляются во время штормов. Более 50% случаев произошли при значительной крутизне, превышающей довольно небольшое значение  $k_p H_s / 2 > 0.1$  ( $k_p$  – пиковое волновое число), соответственно, другая половина случаев соответствует условиям  $k_p H_s / 2 < 0.1$ . Также было отмечено, что при умеренной значительной высоте волн крутизна была относительно большой. Около половины инцидентов произошло в условиях скрещенных волн, когда углы распространения ветровых волн и зыби отличались существенно. Более высокая вероятность регистрации аномальных волн в условиях скрещенных волновых систем отмечалась и в [Pinho et al, 2004] по данным натуральных измерений.

Во многих случаях классические параметры оказываются неспособными устойчиво оценивать опасность состояния моря [Olagnon & Magnusson, 2004; Toffoli et al, 2005], существенной оказывается также их временная история. В то же время в [Bitner-Gregersen & Magnusson, 20005] отмечается, что экстремальные события возникают в различные моменты

развития шторма: до, во время и после наступления максимума значительной высоты волн. Другая проблема связана с тем, что некоторые параметры состояния моря (или временной выборки смещения поверхности) отражают присутствие «волны-убийцы» только когда она уже состоялась, и демонстрируют типичные значения, как только аномальная волна уменьшится по высоте или окажется искусственно удаленной из волнового поля. Такие характеристики также не могут быть использованы в качестве индикаторов возникновения высокой вероятности высоких волн.

Разгон, характеризующий степень развития ветровых волн, – один из наиболее важных параметров состояния ветровых волн. Как следует из Рис. 1.3.2, в глобальном масштабе наиболее высокие волны регистрируются на просторных акваториях. С. Лехнер [Lehner, 2005] сообщает, что наиболее высокие волны наблюдались, когда они фокусировались течениями, либо в ситуациях резонанса между ветром и волнами, когда сильный ветер распространялся с групповой скоростью волн (moving fetch, running fetch). Аварии судов, связанные с экстремальными волнами, в большинстве случаев зарегистрированы в условиях скрещенных волновых систем или быстро изменяющихся погодных условий. В [Melville et al, 2005] утверждается, что большие волны могут возникать словно ниоткуда, даже для малых разгонов (25 м).

Обзор критериев, используемых при операционной оценке условий судоходства для малых судов, приведен в [Nielsen et al, 2010]. Такого рода заключение в итоге должно стать практическим приложением теоретических исследований эффекта аномально высоких волн в море. В настоящей диссертации основное внимание уделено эффектам нелинейной самомодуляции волн в условиях узкого спектра или на течениях. Возможности развития детерминистского краткосрочного прогноза, а также вероятностного среднесрочного прогноза будут обсуждаться по мере изложения. Отметим здесь, что использование моделей огибающей позволяет ввести новый уровень масштабов в проблеме (помимо упомянутых – масштабов экстремального события и масштабов внешних сил), – масштаб волновых групп (см. [Cavaleri, 2006]). Тем самым, потенциально горизонт детерминистского прогноза (не для индивидуальных волн, а для групп) может быть расширен, а вероятностное описание может применяться для более крупных энергонесущих структур.

#### **1.4 Обзор предложенных и оригинальных физико-математических моделей «волн-убийц»**

В нашем исследовании развивается подход, отличный от изложенного в предыдущем разделе: основываясь на представлениях о возможных физических механизмах быстрой фокусировки волновой энергии, проводится изучение проявлений и возможностей этих

механизмов в рамках модельных, но максимально приближенных к действительности постановок и уравнений. Результаты исследований по возможности апробируются с использованием лабораторных измерений или данных натурных наблюдений.

Список физических механизмов, предложенных для объяснения «волн-убийц», довольно большой и продолжает пополняться. В исследованиях механизмов возникновения аномальных волн принимают активное участие российские ученые: С.И. Бадулин, А.И. Дьяченко, В.Е. Захаров, С.Ю. Кузнецов, Д.И. Лопатухин, В.П. Рубан, Д.В. Чаликов и др. (см. [Кузнецов, 1977; Захаров и Кузнецов, 1998; Кузнецов и др., 2006; Шамин, 2006, 2008, 2010; Агафонцев, 2008; Захаров и Шамин, 2010, 2012; Рубан, 2010, 2012, 2013, 2014; Дьяченко и др., 2011; Кузнецов и Сапрыкина, 2012; Чаликов, 2012, 2014; Шамин и Юдин, 2013; Шамин и др., 2014, 2015; Сапрыкина и др., 2015; Chalikov & Sheinin, 1998, 2005; Zakharov, 1999; Zakharov et al, 2002, 2006; Chalikov, 2005, 2007, 2009; Dyachenko & Zakharov, 2005; 2008; Ruban, 2005, 2007, 2009; Dyachenko et al, 2013a,b; Zakharov & Gelash, 2013; Gelash & Zakharov, 2014]). Здесь мы сформулируем наиболее существенные для нас основные направления, соответствующие различным физическим явлениям. Обзоры физических механизмов также содержатся в работах [Kharif & Pelinovsky, 2003; Dysthe et al, 2008; Kharif et al, 2009<sup>\*</sup>; Slunyaev et al, 2011<sup>\*</sup>].

### **Геометрическая (пространственная) фокусировка**

Линейный эффект пространственной фокусировки хорошо известен в разных областях физики. Для случая поверхностных волн на воде он вызывается волнами, приходящими в одну область по разным направлениям. Такая ситуация может возникать при интерференции различных волновых систем (например, ветровых волн, созданных разными штормами, либо одновременным присутствием ветровых волн и зыби), рефракцией или дифракцией волн на особенностях батиметрии (подводные холмы, гребни, береговые линии и т.д.), а также на течениях. Пространственная фокусировка способна приводить к значительному усилению волн в фокальных областях. Непредсказуемость образования "волн-убийц" может обеспечиваться изменчивостью картины ветровых волн в зоне шторма, когда малое возмущение траектории волны может приводить к исчезновению каустики в одном месте и ее появлению в другом, возможно, удаленном месте. Учет нелинейности не отменяет эффект геометрической фокусировки, но делает его более сложным: нелинейные поправки к скорости волн меняют положение фокальных областей и поведение в них интенсивности волн [Peregrine & Smith, 1979; Пелиновский, 1982; Пелиновский и др., 1984].

### **Фокусировка из-за дисперсии групповой скорости волн**

Волны на поверхности воды (кроме случая очень мелкой воды) являются диспергирующими. Компоненты волн разных масштабов бегут с разными скоростями, и может так оказаться, что волны разных масштабов сходятся вместе в одной точке пространства в один момент времени, приводя к сложению энергии волн (дисперсионная фокусировка) [Уизем, 1977; Островский и Потапов, 1990]. Процесс дисперсионной фокусировки постоянно происходит в океане. Волны разных масштабов, возникающие из-за изменчивости ветра, случайным образом складываются, приводя к быстрым локальным всплескам интенсивности волн.

Этот эффект воспроизводился во многих экспериментальных лотках, включая распространение волн на течении, в присутствии ветра. В [Pelinovsky & Kharif, 2000] он предлагался для объяснения морских «волн-убийц». Как и в случае геометрической фокусировки, нелинейность делает эффект дисперсионного сложения волн сложнее в описании, но не отменяет его [Pelinovsky et al, 2000; Kharif et al, 2001]. Вместе с тем, эффекты геометрической и дисперсионной группировки волн могут обеспечивать подготовительную стадию для достижения условий модуляционной неустойчивости [Slunyaev et al, 2002; Рубан, 2013; 2014], которая ведет к дополнительному усилению волн.

### **Фокусировка из-за нелинейных неустойчивостей поверхностных волн**

Волны на достаточно глубокой воде подвержены модуляционной неустойчивости по отношению к длинным возмущениям. Картина нелинейных неустойчивостей поверхностных волн сложна (зависит от глубины, интенсивности волн, направления возмущения), но для ситуации не слишком крутых волн это доминирующий тип неустойчивости, обеспечиваемый квазирезонансным взаимодействием четверок волн [McLean, 1984a,b]. Проблема аномально высоких волн придала «второе дыхание» модуляционной неустойчивости, роль которой в динамике и статистике волн на морской поверхности оказалась серьезно недооцененной. Модуляционная неустойчивость широко распространена в разных областях физики [Власов и Таланов, 1997; Zakharov & Ostrovsky, 2009; Onorato et al, 2013], что обеспечивает применимость результатов исследований «волн-убийц» для многих других приложений. Явление неустойчивости проявляется в экспоненциальном росте слабых модуляций, приводящем к концентрации волновой энергии в областях фокусировки. Этот процесс в рамках приближенных нелинейных уравнений описывается решениями, близкими к так называемым гомоклиническим орбитам, что ведет к трудно прогнозируемой хаотической динамике волн [Calini & Schober, 2002].

### **Существенно нелинейные взаимодействия волн**

К этому виду механизмов нами отнесены все другие виды нелинейных взаимодействий волн (солитонов, ударных волн), когда волновая динамика оказывается сложнее, а усиление – существенно больше, чем ожидается в рамках линейного рассмотрения. В частности, таковы эффекты возникновения аномально больших амплитуд при взаимодействии планарных солитонов на мелкой воде [Peterson et al, 2003; Porubov et al, 2005; Lavrenov & Porubov, 2006], росте стоячих волн на мелкой воде достаточно большой амплитуды из-за квадратичной неустойчивости [Ezersky et al, 2009\*; Slunyaev et al, 2009\*], а также нелинейные эффекты, «включающиеся» при достижении волнами большой амплитуды (сильно нелинейные явления). Роль сильной нелинейности будет рассматриваться в диссертации в рамках численного моделирования исходных уравнений гидродинамики и лабораторных измерений сильно нелинейных волн.

### **Взаимодействия с течениями и другие неоднородные условия распространения**

Процессы формирования экстремальных волн на течениях и случаи встреч неожиданно высоких волн на течениях исследовались задолго до признания явления «волн-убийц» на остальной акватории океана [Mallory, 1974; Peregrine, 1976; Smith, 1976]. Присутствие течения изменяет локальное дисперсионное соотношение, что действует на волны так же, как и другие неоднородности условий распространения (например, переменное дно). Эффекты захвата, отражения, блокировки волн течениями схожи с рефракцией и отражением волн на неоднородностях и классически изучались в рамках лучевых подходов. Роль нелинейной самомодуляции волн на встречных течениях активно исследуется в последнее время [Janssen, & Herbers, 2009; Hjelmervik & Trulsen, 2009; Onorato et al, 2011]. В Главе 5 мы фокусируем внимание на наиболее удобном для развития самомодуляции случае – удержания волн струей течения; эта ситуация позволяет значительно ослабить требование на узость углового спектра модуляционно неустойчивых волн.

Отдельный класс механизмов изменения статистики волн связан с эффектами внешнего воздействия на волновую систему (действие ветра, атмосферные фронты, тайфуны и т.д.), которые не рассматриваются в рамках настоящей работы.

Дисперсионная фокусировка является, в первом приближении, линейным эффектом и не изменяет вероятностные свойства волн, потому критическими с точки зрения статистики «волн-убийц» являются нелинейные эффекты, которые находятся в центре нашего внимания. В диссертации сначала будут рассмотрены эффекты нелинейной самомодуляции волн в слабо нелинейном приближении (Главы 2, 4), а потом исследованы эффекты сильной

нелинейности (Главы 2, 3, 4). В рамках диссертации будет рассмотрен, главным образом, случай глубокой воды. В Главе 5 исследуются эффекты нелинейной самомодуляции волн (малых и больших амплитуд) в условиях захвата встречным струйным течением, которое обеспечивает каналирование волновой энергии.

## **1.5 Заключение**

По содержанию Главы 5 можно сделать следующие основные выводы.

1. На настоящий момент не существует достоверного вероятностного описания высоких волн на морской поверхности. Его формулировка на основе натурных измерений пока остается невозможной из-за статистически неоднородных данных, относящимся к различным метео- и географическим условиям. Ключевые параметры, которые должны определять статистику реальных морских волн, также окончательно не сформулированы.
2. Абсолютное большинство инструментальных регистраций аномально высоких волн представлено в виде временных последовательностей смещения поверхности воды. Существует значительное число недостоверных регистраций, которые трудно (или даже невозможно) выделить из массы достоверных измерений. Существующие нормативы строительства морских платформ требуют описания характеристик волн с частотой повторяемости 1 раз в 100 – 10 000 лет (вероятность  $\sim 10^{-9} - 10^{-11}$ ).
3. Многочисленные свидетельства говорят о недооценке вероятности морских волн большой амплитуды. Волны 30-метровой высоты регистрировались в открытом море неоднократно. Можно выделить традиционные ситуации, когда встречи с опасными волнами наиболее вероятны: скрещенные (трехмерные) волны, волны на течениях, прохождение тайфунов и ураганов, резонанс между ветром и волновой системой (running fetch). Этот список ситуаций, однако, не исключает возникновение аномально высоких волн и в других условиях, включая относительно спокойное море. В целом места встреч с «волнами-убийцами» соответствуют районам мореплавания.
4. Используемое в диссертации определение «волны-убийцы» носит условный характер. Под аномальными волнами в исследовании будут подразумеваться волны, возникающие в результате относительно быстрой фокусировки волновой энергии. По данным измерений «волны-убийцы» могут быть представлены как единичными интенсивными волнами разной полярности, так и волновыми группами, времена их жизни оцениваются по наблюдениям не более нескольких минут. Ранее были предложены различные механизмы, способные приводить к фокусировке волновой энергии. Основное внимание в нашей работе будет уделено формированию «волн-убийц» под действием эффектов нелинейности, которые

изменяют статистику волн для линейного приближения (эффекты собственной динамики волн).

# Глава 2 ФОРМИРОВАНИЕ АНОМАЛЬНО ВЫСОКИХ ВОЛН С УЧЕТОМ СЛАБОЙ И УМЕРЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

## 2.1 Введение

В течение длительного времени морское волнение рассматривалось как случайный Гауссов процесс [Longuet-Higgins, 1952]. При этом вероятность высоких волн описывается распределением Рэлея. Если фазы волн не случайны, то статистика волн нетривиальным образом отличается от Гауссовой. Важным шагом в понимании природы этих отличий стал учет эффекта нелинейной самомодуляции волн. Модуляционная неустойчивость была открыта в 1960-х гг., в англоязычной литературе ее называют по именам открывателей [Benjamin & Feir, 1967], хотя приоритет в открытии может оспариваться и другими исследователями [Lighthill, 1967]. Исследованием модуляционной неустойчивости занимались многие ведущие ученые (см. обзор [Zakharov & Ostrovsky, 2009]); сотрудники ИПФ также стояли у истоков теории самомодуляции и самофокусировки [Таланов, 1965; Островский, 1966; Власов и Таланов, 1997].

Развитие неустойчивости описывает нелинейное уравнение Шредингера или нелинейное параболическое уравнение. Первое название восходит к уравнению, выведенному в 1929 г. для квантовой частицы во внешнем поле. В форме уравнения, учитывающего самовоздействие волн, оно получено в теории конденсата Бозе-Эйнштейна для волновой функции конденсата [Питаевский, 1961]. Нелинейное параболическое уравнение было выведено для задач нелинейной оптики [Таланов, 1965; Kelley, 1965], «перевыведено» для описания волновых полей различной физической природы [Островский, 1966; Benney & Newell, 1967; Захаров, 1968] и теперь часто называется нелинейным уравнением Шредингера (НУШ). В приложении к волнам на поверхности воды классическое НУШ было выведено в [Захаров, 1968], а затем [Hasimoto & Ono, 1972; Davey, 1972].

НУШ относится к уравнениям для амплитуды огибающей волнового пакета. Оно описывает качественно разную динамику в зависимости от соотношения коэффициентов, которые являются функциями глубины. Так, в случае достаточно глубокой воды ( $kh > 1.363$ , где  $k$  – волновое число несущей волны, и  $h$  – глубина) НУШ описывает модуляционную неустойчивость. В противоположном случае модуляции волн являются устойчивыми. Модификации НУШ, описывающие трехмерные волны на поверхности воды (две



горизонтальные координаты и одна вертикальная), были получены в работах [Benney & Roskes, 1969; Davey & Stewartson, 1974], в этом случае области модуляционной неустойчивости устроены сложнее.

НУШ имеет значительные ограничения по уровню нелинейности и ширине спектра волн, что зачастую компенсируют учетом слагаемых высших порядков по нелинейности и дисперсии. Такие модели используются, например, для описания коротких импульсов в оптоволоконных линиях [Громов и Таланов, 1996]. Наибольшее применение для описания морских волн нашло уравнение Диста, выведенное впервые в [Dysthe, 1979], и его более поздние модификации [Bakhanov et al, 1994; Trulsen & Dysthe, 1996; Brinch-Nielsen & Jonsson, 1986] (см. также обзор в [Trulsen, 2006]). Важной особенностью модели Диста является учет длинноволнового наведенного течения. В последнее время обобщенные уравнения для огибающей выводятся из гамильтоновых принципов [Агафонцев, 2008; Gramstad & Trulsen, 2011; Рубан, 2012]. В нашей работе обобщенные уравнения выводятся в рамках асимптотического разложения уравнений гидродинамики в исходных переменных с использованием программ символьной математики, что позволяет получать уравнения высокого порядка.

Отметим, что обобщенные уравнения в разных работах записывались в различном виде (в том числе, для различных величин) и зачастую имели противоречащие друг другу коэффициенты; в большинстве случаев они относятся к случаю бесконечно глубокой воды. В работе [Седлецкий, 2003] было получено замкнутое нелинейное уравнение Шредингера для огибающей смещения поверхности с учетом поправок двух порядков для случая произвольной глубины; его коэффициенты в пределе бесконечно глубокой жидкости совпадают с поздними версиями уравнений Диста и Трулсена (например, [Trulsen, 2006]).

Для порогового случая соотношения длины волн и глубины бассейна  $kh \approx 1.363$  кубическая нелинейность оказывается аномально малой, поэтому для учета нелинейных эффектов должна быть учтена нелинейность следующего (пятого) порядка. Полученные для этой ситуации эволюционные модели дают противоречивые результаты [Johnson, 1977; Kakutani & Michihiro, 1983]. Обобщение НУШ в этом случае также исследовалось в работе [Агафонцев, 2008] в рамках гамильтонова формализма (уже после нашей статьи [Слюняев, 2005\*]).

Будучи интегрируемым методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) [Захаров и Шабат, 1971, 1973; Ablowitz et al, 1974], НУШ является уникально удобным нелинейным уравнением в частных производных. Его анализ зачастую значительно упрощается при использовании представлений о его солитонных решениях, теорию для которых

представляет МОЗР. Такой подход активно используется в диссертации. Важно, что из-за временного сдвига между открытием НУШ и способа его точного интегрирования, большой пласт исследований динамики волн в рамках НУШ для оптических задач был получен с помощью приближенных методов анализа. После развития МОЗР и отыскания точных решений НУШ, многие «старые» результаты «переоткрываются» на новом уровне понимания. Бум интереса к «волнам-убийцам» оказался толчком для вывода новых решений НУШ бризерного типа (под бризерами мы будем именовать исключительно солитонные решения на пьедестале). Для целей нашего исследования важно, что бризерные решения описывают нелинейную стадию модуляционной неустойчивости и, тем самым, являются простейшей моделью «волн-убийц» и ключом к пониманию их динамики. При этом в обобщенных моделях огибающей слагаемые высших порядков рассматриваются как поправки, во многих случаях не приводящие к качественным отличиям (например, см. исследование квазисолитонных решений обобщенных ШУШ, типа развиваемых нами далее, в [Gandzha et al, 2015]). С другой стороны, недавно получены точные решения полных уравнений гидродинамики в виде принципиально непотенциальных волновых групп, которые оказываются на первый взгляд очень похожими на обсуждаемые далее бризерные решения приближенных уравнений [Abrashkin & Soloviev, 2013].

В предположении о качественном согласии между динамикой экстремальных волн и описанием в рамках приближенных асимптотических уравнений для модуляций волн (мы ограничиваемся случаем достаточно глубокой воды) информация о солитонной составляющей поля (долгоживущих группах волн) может позволить выполнять краткосрочный прогноз экстремальных волн (на временах порядка единиц десятков периодов, как следует из имеющихся результатов, примерно до 10 мин). Выделение солитонов из измеренных волн впервые было сделано, видимо, в работе [Osborne & Petti, 1994] – для случая мелкой воды в рамках уравнения Кортевега – де Вриза. В приложении к глубокой воде и нелинейному уравнению Шредингера проблеме анализа и интерпретации спектральных данных посвящены работы [Osborne et al, 2005; Islas & Schober, 2005; Schober, 2006; Schober & Calini, 2008], в них во всех используются периодические граничные условия, для которых применение метода обратной задачи рассеяния упирается в использование специальных  $\theta$ -функций. Приложению к динамике морских волн посвящена монография [Osborne, 2010], в ней также используется МОЗР для периодических граничных условий. В диссертации развивается альтернативный подход, базирующийся на МОЗР для задачи с нулевыми граничными условиями на бесконечности, который, на наш взгляд, проще в интерпретации и позволяет получать более устойчивое (к погрешностям в данных) решение.

Настоящая глава посвящена теоретическим моделям разного уровня, применяемым для описания нелинейной динамики модулированных волн. Использование относительно простых математических моделей позволяет использовать мощные методы анализа нелинейных волн, включая МОЗР, получать аналитические решения, способные «схватывать» ключевые эффекты волновой динамики. Обобщенные асимптотические модели высокого порядка обеспечивают связь между решениями для слабой и сильной нелинейности. Содержание этой главы развивает исследование нашей кандидатской диссертации [Слюняев, 2002], где эффекты, связанные с динамикой экстремальных волн изучались исключительно в рамках слабо нелинейных теорий.

В Разделе 2.2 этой главы выводится уравнение для модулированных волн 5-го порядка асимптотических разложений, которое обобщает существующие модели и служит основой для связи решений для слабо нелинейных слабо модулированных волн с описанием в рамках исходных уравнений гидродинамики. Эта связь используется нами в дальнейшем в Разделах 2.4 и 2.5 и Главах 3 и 4. В Разделе 2.3 обсуждаются решения уравнения огибающей 3-го порядка – нелинейного уравнения Шредингера. Эти решения получены с применением метода обратной задачи рассеяния, они описывают солитоноподобные волновые группы, их взаимодействие с фоном, в частности, нелинейную стадию модуляционной неустойчивости и «волны-убийцы». Эти решения будут использованы в качестве первого приближения для моделирования сильно нелинейных волн в Главе 3. Они позволяют развить в Разделе 2.4 подход к анализу инструментальных записей поверхностных волн: выделение долгоживущих нелинейных групп и краткосрочный прогноз максимально достижимых высот волн. Реконструкции экстремальных событий по данным измерений смещения поверхности в одной точке посвящен Раздел 2.5. Для этого используются формулы реконструкции, полученные в Разделе 2.2 и авторские коды уравнений модулированных волн. Достоверность и ограничения использованного подхода реконструкции определяются с помощью контрольного моделирования в рамках исходных уравнений гидродинамики. Основные результаты Главы 2 сформулированы в Разделе 2.6.

По содержанию Главы опубликованы следующие статьи: по Разделу 2.2 [Слюняев, 2005\*], Разделу 2.3 – [Слюняев, 2005\*; Slunyaev, 2006\*; Slunyaev et al, 2009\*; Grimshaw et al, 2010\*; Slunyaev & Shrira, 2013\*], Разделу 2.4 – [Пелиновский и др., 2003\*; Дивинский и др., 2004\*; Slunyaev et al, 2005\*, 2009\*; Slunyaev, 2006\*; Слюняев, 2008\*], Разделу 2.5 – [Дивинский и др., 2004\*; Slunyaev et al, 2005\*, 2011\*, 2014\*; Slunyaev, 2006\*; Sergeeva et al, 2014\*]. Материалы по Разделам 2.3 – 2.5 также вошли в нашу монографию [Kharif et al, 2009\*] и обзор [Slunyaev et al, 2011\*].

## 2.2 Уравнения огибающей 5-го порядка для двумерных гравитационных волн на воде

### Постановка задачи

Постановка задачи для вывода уравнений огибающей высокого порядка имеет классический вид (см., например, [Johnson, 1997] или [Седлецкий, 2003]). Вывод коэффициентов уравнения представляет собой значительную техническую трудность, поэтому был использован пакет символьной математики Maple. Для уменьшения вероятности ошибки были использован следующий подход. Процедура вывода уравнений в данном порядке малости для данной гармоники была написана в универсальном виде, так что вычисление нового уравнения более высокого порядка сводилось практически к повторению блока вывода уравнения с новыми числовыми параметрами – порядком уравнения. Коэффициенты в полученных уравнениях и соотношениях приводились к более простой форме и сверялись с исходными.

Запишем процедуру в формальном виде, удобном для алгоритмизации. Рассматриваются слабонелинейные двумерные волны на поверхности несжимаемой невязкой жидкости под действием силы тяжести. Система уравнений состоит из двух граничных условий на поверхности жидкости

$$\varphi_z = \eta_t + \varphi_x \eta_x, \quad z = \eta, \quad (2.2.1)$$

$$\varphi_t + g\eta + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_z^2) = 0, \quad z = \eta \quad (2.2.2)$$

и уравнения Лапласа для потенциала скорости в толще воды плюс граничное условие непротекания на дне:

$$\Delta\varphi = 0, \quad -h \leq z \leq \eta, \quad (2.2.3)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \quad z = -h. \quad (2.2.4)$$

Здесь  $z$  – вертикальная, а  $x$  – горизонтальная координаты,  $\eta(x, t)$  – смещение поверхности, а  $\varphi(x, z, t)$  – потенциал поля скоростей  $\vec{v} = \nabla\varphi$ ;  $h$  – глубина жидкости. Предположение о слабой модуляции волн (узости спектра) позволяет искать решение в виде суперпозиции гармоник:

$$\begin{pmatrix} \varphi(x, z, t) \\ \eta(x, z, t) \end{pmatrix} = \delta \sum_n \begin{pmatrix} \varphi_n(x, z, t) \\ \eta_n(x, z, t) \end{pmatrix} E^n, \quad E^n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ (1/2) \exp(in\omega t - inkx), & n \neq 0 \end{cases}, \quad (2.2.5)$$

при этом основная (несущая) гармоника обладает частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$ . В (2.2.5)  $\delta \ll 1$  – малая величина, соответствующая малоамплитудному приближению. Для

обеспечения действительных значений  $\varphi(x, z, t)$  и  $\eta(x, t)$  должно выполняться:  $\varphi_{-n} = \varphi_n^*$ ,  $\eta_{-n} = \eta_n^*$ .

Учитывая малость смещений поверхности, граничные условия на границе  $z = \eta(x, t)$ , могут быть записаны для неподвижного уровня  $z = 0$  после разложения функций глубины в ряд Тейлора. Тогда система уравнений на поверхности (2.2.1), (2.2.2) запишется в виде

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\eta^j \partial_z^{j+1} \varphi}{j!} = \eta_t + \eta_x \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\eta^j \partial_z^j \varphi_x}{j!}, \quad z = 0, \quad (2.2.6)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\eta^j \partial_z^j \varphi_t}{j!} + g\eta + \frac{1}{2} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\eta^j \partial_z^j \varphi_x}{j!} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\eta^j \partial_z^{j+1} \varphi}{j!} \right)^2 = 0, \quad z = 0. \quad (2.2.7)$$

Введем медленную координату  $x_1$ , отражающую слабую дисперсию – медленность изменения огибающей в сравнении с длиной волны несущей:

$$\frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_0} + \mu \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (2.2.8)$$

(где  $\mu \ll 1$ ) и медленные времена  $t_i$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial t_3} + \varepsilon^4 \frac{\partial}{\partial t_4} + \dots, \quad (2.2.9)$$

где  $\varepsilon \ll 1$ . Будем искать решение в виде разложения в ряд по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$\begin{pmatrix} \varphi_n \\ \eta_n \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \begin{pmatrix} \varphi_{nm} \\ \eta_{nm} \end{pmatrix}. \quad (2.2.10)$$

Таким образом, потенциал и смещение представлены в виде:

$$\varphi(x, z, t) = \frac{\delta}{2} \sum_{n=-N}^{\infty} E^n \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \varphi_{nm}(x_0, x_1, z, t_i), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2.2.11)$$

$$\eta(x, t) = \frac{\delta}{2} \sum_{n=-N}^{\infty} E^n \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \eta_{nm}(x_0, x_1, t_i), \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.2.12)$$

Малые параметры  $\delta$  и  $\mu$  могут по-разному соотноситься между собой и с  $\varepsilon$ , соответствуя разным условиям (сильная дисперсия по сравнению с нелинейностью или наоборот). Малый параметр  $\varepsilon$  отвечает за разложение искомого решения в асимптотический ряд, и должен подбираться в зависимости от соотношения между  $\delta$  и  $\mu$ . В классическом случае уравнения НУШ, когда кубическая нелинейность появляется в одном порядке с первой дисперсионной поправкой, должно выполняться  $\varepsilon \sim \mu \sim \delta$ . Будем в дальнейшем использовать только один малый параметр  $\varepsilon$ , положив  $\mu = \varepsilon$  и  $\delta = \varepsilon$ .

Основной вклад в решение дает первая гармоника, поэтому полагаем ненулевыми компоненты потенциала нулевого порядка только для первой, минус первой (сопряженной) и

нулевой гармоник:  $\varphi_{n0} = 0$  для  $|n| > 1$ . Член  $\varphi_{00}$  отвечает за среднее (наведенное) течение. Для смещения  $\eta_{n0} = 0$  для  $n \neq \pm 1$ . Так как гармоники, отличные от нулевой, возбуждаются за счет нелинейных взаимодействий между компонентами, то можно положить  $\varphi_{nm} = 0$  и  $\eta_{nm} = 0$  для всех  $|n| > m$ . Эти условия уменьшают объем выкладок, хотя могут быть получены и в процессе решения.

Теперь выражения для функций (2.2.11) и (2.2.12) можно подставить в уравнения (2.2.6) и (2.2.7) с учетом (2.2.8) и (2.2.9) и собирать по очереди слагаемые одной гармоники (степени  $n$  при  $E$ ) и одного порядка малости (степени  $m$  при  $\varepsilon$ ). В дальнейшем будем нумеровать получаемые уравнения двойным индексом  $\{n, m\}$ . Для нахождения замкнутой системы уравнений потребуется решение уравнения Лапласа (2.2.3) с учетом граничного условия (2.2.4). В действительности сначала решалось уравнение Лапласа, далее из динамического граничного условия уравнения (2.2.7) последовательно по порядкам малости находились выражения для компонент смещения  $\eta_{nm}$  и подставлялись в уравнение (2.2.6), которое и давало искомое эволюционное уравнение.

## Решение уравнения Лапласа

С учетом введенных медленных координат и представления функций в виде рядов уравнение Лапласа может быть записано в формализованном виде

$$L_n \varphi_n - 2\mu ink \partial_{x_1} \varphi_n + \mu^2 \partial_{x_1}^2 \varphi_n = 0, \quad L_n = \partial_z^2 - n^2 k^2$$

для всех  $n$ , или

$$L_n \varphi_{nm} - 2ink \partial_{x_1} \varphi_{n,m-1} + \partial_{x_1}^2 \varphi_{n,m-2} = 0 \quad (2.2.13)$$

для всех  $n$  и  $m$ . Разложение уравнения Лапласа (2.2.13) может быть последовательно решено для всех порядков малости  $m \geq 0$ , откуда следуют соответствующие решения для  $0 \leq m \leq 4$  и  $n = 0$ :

$$\{0, 0\}: \quad \varphi_{00} = A_{00}(x_i, t_i), \quad (2.2.14)$$

$$\{0, 1\}: \quad \varphi_{01} = A_{01}(x_i, t_i), \quad (2.2.15)$$

$$\{0, 2\}: \quad \varphi_{02} = A_{02}(x_i, t_i) - \frac{1}{2}(z+h)^2 \partial_{x_1}^2 A_{00}, \quad (2.2.16)$$

$$\{0, 3\}: \quad \varphi_{03} = A_{03}(x_i, t_i) - \frac{1}{2}(z+h)^2 \partial_{x_1}^2 A_{01}, \quad (2.2.17)$$

$$\{0, 4\}: \quad \varphi_{04} = A_{04}(x_i, t_i) - \frac{1}{2}(z+h)^2 \partial_{x_1}^2 A_{02} + \frac{1}{24}(z+h)^4 \partial_{x_1}^4 A_{00}, \quad (2.2.18)$$

а для  $n \neq 0$ :

$$\{n, 0\}: \quad \varphi_{n0} = A_{n0}(x_i, t_i) \frac{\cosh nk(z+h)}{\cosh nkh}, \quad (2.2.19)$$

$$\{n, 1\}: \quad \varphi_{n1} = A_{n1}(x_i, t_i) \frac{\cosh nk(z+h)}{\cosh nkh} + i\partial_{x_1} A_{n0}(z+h) \frac{\sinh nk(z+h)}{\cosh nkh}, \quad (2.2.20)$$

$$\{n, 2\}: \quad \varphi_{n2} = \left( A_{n2}(x_i, t_i) - \partial_{x_1}^2 A_{n0} \frac{(z+h)^2}{2} \right) \frac{\cosh nk(z+h)}{\cosh nkh} + i\partial_{x_1} A_{n1}(z+h) \frac{\sinh nk(z+h)}{\cosh nkh} \quad (2.2.21)$$

$$\{n, 3\}: \quad \varphi_{n3} = \left( A_{n3}(x_i, t_i) - \partial_{x_1}^2 A_{n1} \frac{(z+h)^2}{2} \right) \frac{\cosh nk(z+h)}{\cosh nkh} + \left( i\partial_{x_1} A_{n2}(z+h) - i\partial_{x_1}^3 A_{n0} \frac{(z+h)^3}{6} \right) \frac{\sinh nk(z+h)}{\cosh nkh} \quad (2.2.22)$$

$$\{n, 4\}: \quad \varphi_{n4} = \left( A_{n4}(x_i, t_i) - \partial_{x_1}^2 A_{n2} \frac{(z+h)^2}{2} + \partial_{x_1}^4 A_{n0} \frac{(z+h)^4}{24} \right) \frac{\cosh nk(z+h)}{\cosh nkh} + \left( i\partial_{x_1} A_{n3}(z+h) - i\partial_{x_1}^3 A_{n1} \frac{(z+h)^3}{6} \right) \frac{\sinh nk(z+h)}{\cosh nkh}. \quad (2.2.23)$$

Функции  $A_{nm}(x_i, t_i)$  в выражениях (2.2.14) – (2.2.23) на данном этапе не определены.

## Классическое НУШ

В порядке  $\{1, 0\}$  находим условие на параметры волны, определяющее дисперсионное соотношение:

$$\omega = \sqrt{kg\sigma}, \quad \text{где} \quad \sigma = \tanh(kh). \quad (2.2.24)$$

Следующий порядок  $\{1, 1\}$  дает соотношение

$$\frac{\partial A_{10}}{\partial t_1} + V \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} = 0. \quad (2.2.25)$$

Это уравнение описывает распространение линейной волны в диспергирующей среде со скоростью

$$V = \frac{g}{2\omega} (\sigma + kh(1 - \sigma^2)), \quad (2.2.26)$$

которая есть групповая скорость распространения линейных волн в жидкости конечной глубины  $C_{gr}$ .

Порядок  $\{1, 2\}$  приводит к эволюционному уравнению, содержащему нулевую и вторую гармоники. Уравнение для нулевой гармоники находится в порядке  $\{0, 2\}$  и имеет вид

$$gh \frac{\partial^2 A_{00}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 A_{00}}{\partial t_1^2} = \Gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} |A_{10}|^2. \quad (2.2.27)$$

Из (2.2.27) с использованием (2.2.25) следует, что

$$\left( \frac{\partial}{\partial t_1} + V \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} - V_{long}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) A_{00} = 0, \quad V_{long} = \sqrt{gh}. \quad (2.2.28)$$

Здесь  $V_{long}$  – линейная скорость длинных волн. Распространение с этой скоростью соответствует свободному решению для нулевой гармоники. В нашем же случае следует положить

$$\frac{\partial A_{00}}{\partial t_1} + V \frac{\partial A_{00}}{\partial x_1} = 0, \quad (2.2.29)$$

что отвечает предположению, что в первом порядке нулевая гармоника распространяется со скоростью вынуждающей силы (поверхностной волны), т.е., является вынужденной. Иными словами, это соответствует поиску решения в виде  $\varphi_{nm}(x_1 - Vt_1, t_2, t_3, \dots)$  и  $\eta_{nm}(x_1 - Vt_1, t_2, t_3, \dots)$ . Тогда уравнение (2.2.27) принимает вид

$$\frac{\partial A_{00}}{\partial x_1} = \gamma_1 |A_{10}|^2, \quad (2.2.30)$$

$$\gamma_1 = \Gamma_1 / V_d^2, \quad V_d^2 = gh - V^2.$$

Здесь и далее выражения для получаемых коэффициентов отнесены в Приложение А.

Выражение для второй гармоники получается в порядке  $\{2, 1\}$  и имеет вид

$$A_{21} = i\chi_1 A_{10}^2. \quad (2.2.31)$$

В результате, с учетом (2.2.25), (2.2.29) и (2.2.32) порядок  $\{1, 2\}$  приводит к уравнению

$$i \frac{\partial A_{10}}{\partial t_2} + \beta_1 \frac{\partial^2 A_{10}}{\partial x_1^2} + \tilde{\rho}_{11} |A_{10}|^2 A_{10} + \tilde{\rho}_{12} A_{10} \frac{\partial A_{00}}{\partial x_1} = 0. \quad (2.2.32)$$

Система уравнений (2.2.32) и (2.2.30) дает замкнутое эволюционное уравнение

$$i \frac{\partial A_{10}}{\partial t_2} + \beta_1 \frac{\partial^2 A_{10}}{\partial x_1^2} + \tilde{\alpha}_1 |A_{10}|^2 A_{10} = 0. \quad (2.2.33)$$

Так как нас, в конечном итоге, интересует уравнение для смещения поверхности, то используем связь потенциала скорости и смещения

$$\eta_{10} = i\lambda A_{10}, \quad \lambda = -\frac{\omega}{g}, \quad (2.2.34)$$

которая получается при решении уравнения (2.2.7). Тогда, возвращаясь к физическим переменным, уравнение НУШ принимает вид



$$i\left(\frac{\partial \eta_{10}}{\partial t} + V \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x}\right) + \varepsilon \beta_1 \frac{\partial^2 \eta_{10}}{\partial x^2} + \varepsilon \alpha_1 |\eta_{10}|^2 \eta_{10} = 0, \quad (2.2.35)$$

$$\alpha_1 = \tilde{\alpha}_1 / \lambda^2,$$

а смещение поверхности определяется формулой

$$\eta = \text{Re}(\eta_{10} \exp(i\omega t - ikx)). \quad (2.2.36)$$

Полученное уравнение (2.2.36) является классическим НУШ первого порядка и содержит известные коэффициенты. В частности, коэффициент дисперсии  $\beta_1$  всегда положителен, а коэффициент нелинейности  $\alpha_1$  меняет свой знак при  $kh \approx 1.363$  (см. Рис. 2.2.1), что влечет смену типа уравнения (2.2.35) (фокусирующее при  $\alpha_1 > 0$  и дефокусирующее в обратном случае).

Приведенный здесь вывод уравнения НУШ не содержит научной новизны, но демонстрирует шаги решения первого порядка эволюционного уравнения, содержащего слагаемые нелинейности и дисперсии. Вывод уравнения следующего порядка также был проведен ранее для предела очень глубокой воды в работе [Dysthe, 1979], а для случая конечной глубины – в работе [Седлецкий, 2003]. Для специфических условий смены типа уравнения  $kh \approx 1.363$  уравнения НУШ высокого порядка выводилось в [Johnson, 1977; Kakutani & Michihiro, 1983]. Отметим, что кроме технических трудностей (громоздкость выкладок, приводящая, в частности, к разным коэффициентам в работах [Johnson, 1977] и [Kakutani & Michihiro, 1983], к неправильным коэффициентам в первой работе Диста [Dysthe, 1979]), имеются и методические различия в применении асимптотических схем. Так, вывод уравнения НУШ следующего порядка в [Седлецкий, 2003] использует дополнительное предположение о скорости старшего члена нулевой гармоники потенциала скорости, которое не используется в нашем подходе (см. обсуждение в нашей статье [Слюняев, 2005\*]). Отказ от предположений о скорости наведенного течения обсуждается в более поздней работе [Sedletsy, 2005].

Здесь мы опустим вывод эволюционного уравнения с учетом слагаемых нелинейности и дисперсии второго порядка малости (он дан в нашей работе [Слюняев, 2005\*]), но приведем в следующем разделе эволюционную модель, полученную в последующем порядке, – с учетом слагаемых трех порядков малости.

### **Эволюционное уравнение с учетом трех порядков малости**

Выражение для первой гармоники смещения с учетом трех порядков малости имеет вид

$$\eta_1 = i\lambda A_{10} + \varepsilon^2 \eta_{12} + O(\varepsilon^3), \quad (2.2.37)$$

где

$$\eta_{12} = i\lambda \left( A_{12} + p_{21} \frac{\partial^2 A_{10}}{\partial x_1^2} + p_{22} |A_{10}|^2 A_{10} \right). \quad (2.2.38)$$

Воспользуемся свободой в определении  $A_{12}$ , положив

$$A_{12} = -p_{21} \frac{\partial^2 A_{10}}{\partial x_1^2} - p_{22} |A_{10}|^2 A_{10}. \quad (2.2.39)$$

Этот коэффициент ответственен за однородное решение уравнения Лапласа в соответствующем разложении по малому порядку дисперсии. Коэффициент в предыдущем порядке,  $A_{11}$ , также выбран соответствующим образом,

$$A_{11} = -ip_1 \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1}, \quad (2.2.40)$$

чтобы амплитуда  $A_{10}$  была пропорциональна полному смещению поверхности на первой гармонике (Приложение А, см детали в [Слюняев, 2005\*]). Тогда

$$\eta_1 = i\lambda A_{10} + O(\varepsilon^3). \quad (2.2.41)$$

Уравнение для первой гармоники, находящееся в порядке  $\{1, 4\}$  имеет вид

$$\begin{aligned} & i \frac{\partial A_{10}}{\partial t_4} + \beta_3 \frac{\partial^4 A_{10}}{\partial x_1^4} + P_{31} |A_{10}|^4 A_{10} + P_{32} |A_{10}|^2 \frac{\partial^2 A_{10}}{\partial x_1^2} + P_{33} A_{10}^2 \frac{\partial^2 A_{10}^*}{\partial x_1^2} + \\ & + P_{34} A_{10} \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \frac{\partial A_{10}^*}{\partial x_1} + P_{35} A_{10}^* \left( \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \right)^2 + \\ & + s A_{10} \frac{\partial A_{01}}{\partial t_2} + s A_{10} \frac{\partial A_{00}}{\partial t_3} + \tilde{\rho}_{12} A_{10} \frac{\partial A_{02}}{\partial x_1} = 0 \end{aligned} \quad (2.2.42)$$

а связанное с ним уравнение для нулевой гармоники

$$\frac{\partial A_{02}}{\partial x_1} = \gamma_{31} |A_{10}|^4 + \gamma_{32} \left( A_{10} \frac{\partial^2 A_{10}^*}{\partial x_1^2} + A_{10}^* \frac{\partial^2 A_{10}}{\partial x_1^2} \right) + \gamma_{33} \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \frac{\partial A_{10}^*}{\partial x_1}. \quad (2.2.43)$$

При выводе этих уравнений было использовано условие

$$\frac{\partial A_{02}}{\partial t_1} + V \frac{\partial A_{02}}{\partial x_1} = 0 \quad (2.2.44)$$

и выражения для компонент второй и третьей гармоник

$$A_{23} = i\chi_{31} |A_{10}|^2 A_{10}^2 + i\chi_{32} A_{10} \frac{\partial^2 A_{10}}{\partial x_1^2} + i\chi_{33} \left( \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \right)^2, \quad (2.2.45)$$

$$A_{32} = \nu A_{10}^3. \quad (2.2.46)$$

Производные от компонент нулевой гармоники, входящие в (2.2.42) при коэффициентах  $s$ , вычисляются с использованием ранее полученных соотношений:

$$\frac{\partial A_{01}}{\partial t_2} = \gamma_2 \alpha_1 |A_{10}|^4 + \gamma_2 \beta_1 \left( A_{10} \frac{\partial^2 A_{10}^*}{\partial x_1^2} + A_{10}^* \frac{\partial^2 A_{10}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \frac{\partial A_{10}^*}{\partial x_1} \right), \quad (2.2.47)$$

$$\frac{\partial A_{00}}{\partial t_3} = -\gamma_1 \frac{\alpha_{21} + \alpha_{22}}{2} |A_{10}|^4 - \gamma_1 \beta_2 \left( A_{10} \frac{\partial^2 A_{10}^*}{\partial x_1^2} + A_{10}^* \frac{\partial^2 A_{10}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \frac{\partial A_{10}^*}{\partial x_1} \right). \quad (2.2.48)$$

Подставляя выражения (2.2.47) и (2.2.48) в уравнение (2.2.42), получаем

$$\begin{aligned} & i \frac{\partial A_{10}}{\partial t_4} + \beta_3 \frac{\partial^4 A_{10}}{\partial x_1^4} + \tilde{\rho}_{31} |A_{10}|^4 A_{10} + \tilde{\rho}_{32} |A_{10}|^2 \frac{\partial^2 A_{10}}{\partial x_1^2} + \tilde{\rho}_{33} A_{10}^2 \frac{\partial^2 A_{10}^*}{\partial x_1^2} + \\ & + \tilde{\rho}_{34} A_{10} \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \frac{\partial A_{10}^*}{\partial x_1} + \tilde{\rho}_{35} A_{10}^* \left( \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \right)^2 + \tilde{\rho}_{12} A_{10} \frac{\partial A_{02}}{\partial x_1} = 0 \end{aligned}, \quad (2.2.49)$$

Объединяя уравнения (2.2.49) и (2.2.43), можно получить замкнутый порядок эволюционного уравнения для первой гармоники:

$$\begin{aligned} & i \frac{\partial A_{10}}{\partial t_4} + \beta_3 \frac{\partial^4 A_{10}}{\partial x_1^4} + \tilde{\alpha}_{31} |A_{10}|^4 A_{10} + \tilde{\alpha}_{32} |A_{10}|^2 \frac{\partial^2 A_{10}}{\partial x_1^2} + \tilde{\alpha}_{33} A_{10}^2 \frac{\partial^2 A_{10}^*}{\partial x_1^2} + \\ & + \tilde{\alpha}_{34} A_{10} \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \frac{\partial A_{10}^*}{\partial x_1} + \tilde{\alpha}_{35} A_{10}^* \left( \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \right)^2 = 0 \end{aligned}, \quad (2.2.50)$$

а полное уравнение для смещения имеет вид

$$\begin{aligned} & i \left( \frac{\partial \eta_{10}}{\partial t} + V \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} \right) + \varepsilon \beta_1 \frac{\partial^2 \eta_{10}}{\partial x^2} + \varepsilon \alpha_1 |\eta_{10}|^2 \eta_{10} + \\ & + i \varepsilon^2 \beta_2 \frac{\partial^3 \eta_{10}}{\partial x^3} + i \varepsilon^2 \alpha_{21} |\eta_{10}|^2 \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} + i \varepsilon^2 \alpha_{22} \eta_{10}^2 \frac{\partial \eta_{10}^*}{\partial x} + \\ & + \varepsilon^3 \beta_3 \frac{\partial^4 \eta_{10}}{\partial x^4} + \varepsilon^3 \alpha_{31} |\eta_{10}|^4 \eta_{10} + \varepsilon^3 \alpha_{32} |\eta_{10}|^2 \frac{\partial^2 \eta_{10}}{\partial x^2} + \\ & + \varepsilon^3 \alpha_{33} \eta_{10}^2 \frac{\partial^2 \eta_{10}^*}{\partial x^2} + \varepsilon^3 \alpha_{34} \eta_{10} \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} \frac{\partial \eta_{10}^*}{\partial x} + \varepsilon^3 \alpha_{35} \eta_{10}^* \left( \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} \right)^2 = 0, \end{aligned} \quad (2.2.51)$$

$$\alpha_{31} = \tilde{\alpha}_{31} / \lambda^4, \quad \alpha_{32} = \tilde{\alpha}_{32} / \lambda^2, \quad \alpha_{33} = \tilde{\alpha}_{33} / \lambda^2, \quad \alpha_{34} = \tilde{\alpha}_{34} / \lambda^2, \quad \alpha_{35} = \tilde{\alpha}_{35} / \lambda^2.$$

Смещение поверхности определяется выражением

$$\eta = \varepsilon^2 (\eta_{01} + \varepsilon \eta_{02}) + \varepsilon \operatorname{Re}(\eta_{10} \exp(i\omega t - ikx)) + \varepsilon^2 \operatorname{Re}((\eta_{21} + \varepsilon \eta_{22}) \exp(2i\omega t - 2ikx)) + \varepsilon^3 \operatorname{Re}(\eta_{32} \exp(3i\omega t - 3ikx)) + O(\varepsilon^4), \quad (2.2.52)$$

компоненты которого определяются формулами

**Таблица 2.2.1.** Коэффициенты уравнений в частных случаях

	Частные случаи обобщенного НУШ (2.2.51)			Обобщенное уравнение Диста (2.2.64)
	$kh \rightarrow 0$	$kh = 1.363$	$kh \rightarrow \infty$	
$Vk/\omega$	1	0.6793	1/2	
$\beta_1 k^2/\omega$	$(kh)^2/2$	0.2657	1/8	
$\alpha_1/k^2/\omega$	$-9/16/(kh)^4$	0.0002	1/2	
$\beta_2 k^3/\omega$	$(kh)^2/6$	-0.1114	-1/16	
$\alpha_{21}/k/\omega$	$-9/8/(kh)^4$	0.6833	3/2	
$\alpha_{22}/k/\omega$	$-27/16/(kh)^4$	-0.2678	1/4	
$\beta_3 k^4/\omega$	$19(kh)^4/72$	-0.0066	-5/128	
$\alpha_{31}/k^4/\omega$	$81/1024/(kh)^{10}$	0.3864	1/2	
$\alpha_{32}/\omega$	$-15/16/(kh)^2$	-0.4433	$kh/6$	-5/8
$\alpha_{33}/\omega$	$9/4/(kh)^4$	0.7798	$kh/6$	3/32
$\alpha_{34}/\omega$	$9/8/(kh)^4$	0.2394	$kh/3$	-3/16
$\alpha_{35}/\omega$	$-9/16/(kh)^4$	-0.6467	-19/32	
$\gamma_1 \omega/k^3$	$-3/4/(kh)^2$	-0.4935	$-1/(2kh)$	-
$\gamma_2 \omega/k^2$	$-3/4/(kh)^2$	-0.1351	$1/(8kh)$	-
$\gamma_{31} \omega^3/k^7$	$-81/64/(kh)^4$	-0.6239	$-1/(8kh)$	-
$\gamma_{32} \omega/k$	$3/4/(kh)^2$	0.1343	$-kh/12$	-
$\gamma_{33} \omega/k$	$-3/4/(kh)^2$	-0.3705	$-kh/6$	-
$r_{01}/k$	$-3/4/(kh)^3$	-0.4479	$-1/(4kh)$	0
$r_{02}$	$-3/4/(kh)^3$	-0.3116	$-1/32/(kh)^2$	0
$r_{21}/k$	$3/4/(kh)^3$	0.8265	1/2	
$r_{22}$	$-3/2/(kh)^3$	-0.2669	1/2	
$r_{32}/k^2$	$27/64/(kh)^6$	0.8250	3/8	

$$\eta_{01} = \tilde{r}_{01} |A_{10}|^2 = r_{01} |\eta_{10}|^2, \quad r_{01} = \tilde{r}_{01} / \lambda^2 \quad (2.2.53)$$

$$\eta_{21} = \tilde{r}_{21} A_{10}^2 = r_{21} \eta_{10}^2, \quad r_{21} = -\tilde{r}_{21} / \lambda^2 \quad (2.2.54)$$

$$\eta_{02} = i\tilde{r}_{02} \left( A_{10} \frac{\partial A_{10}^*}{\partial x} - A_{10}^* \frac{\partial A_{10}}{\partial x} \right) = ir_{02} \left( \eta_{10} \frac{\partial \eta_{10}^*}{\partial x} - \eta_{10}^* \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} \right), \quad r_{02} = \tilde{r}_{02} / \lambda^2, \quad (2.2.55)$$

$$\eta_{22} = i\tilde{r}_{22} A_{10} \frac{\partial A_{10}}{\partial x} = ir_{22} \eta_{10} \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x}, \quad r_{22} = -\tilde{r}_{22} / \lambda^2, \quad (2.2.56)$$

$$\eta_{32} = i\tilde{r}_{32} A_{10}^3 = r_{32} \eta_{10}^3, \quad r_{32} = -\tilde{r}_{32} / \lambda^3. \quad (2.2.57)$$

Уравнение (2.2.51) является обобщением уравнения, полученного в [Седлецкий, 2003], с учетом слагаемых следующего порядка малости.

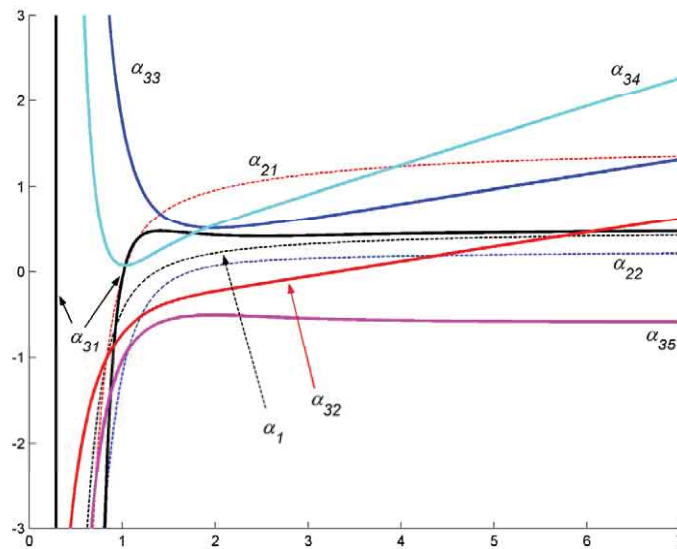
### Случай бесконечно глубокой воды ( $kh \rightarrow \infty$ )

Полученное нами уравнение (2.2.51) обладает расходящимися коэффициентами в пределе  $kh \rightarrow \infty$ . Это относится к коэффициентам нелинейной дисперсии  $\alpha_{32}$ ,  $\alpha_{33}$  и  $\alpha_{34}$  (см. Таблицу 2.2.1 и Рис. 2.2.1). Для применения асимптотических разложений необходима малость слагаемых высших порядков по отношению к низшим. Такая иерархия нарушается для ряда нулевой гармоники

$$\varphi_0 = \varepsilon \varphi_{00} + \varepsilon^2 \varphi_{01} + \varepsilon^3 \varphi_{02} + \varepsilon^4 \varphi_{03} + \varepsilon^5 \varphi_{04} + O(\varepsilon^6).$$

Действительно, в пределе  $kh \rightarrow \infty$  выражения (2.2.16) и (2.2.17) стремятся к

$$\varphi_{02} \xrightarrow{kh \rightarrow \infty} A_{02} + \frac{k^2}{2\omega} \left( z + \frac{h}{2} + \frac{1}{8k} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} |A_{10}|^2, \quad (2.2.58)$$



**Рис. 2.2.1.** Безразмерные нелинейные коэффициенты обобщенного уравнения (2.2.51) в зависимости от параметра  $kh$ . Обезразмеривание указано в Таблице 2.2.1.

$$\varphi_{03} \xrightarrow{kh \rightarrow \infty} A_{03} - i \frac{k}{8\omega} \left( z + \frac{h}{2} - \frac{1}{8k} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \left( A_{10} \frac{\partial A_{10}^*}{\partial x_1} - A_{10}^* \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \right). \quad (2.2.59)$$

Тогда при условии конечности значений  $A_{10}$  и  $A_{01}$  в глубоководном пределе следующие по порядку малости члены  $\varphi_{02}$  и  $\varphi_{03}$  оказываются не малы (бесконечны). Секулярные члены в можно компенсировать, использовав свободу записи  $A_{02}$  и  $A_{03}$ , выполнив замену

$$A_{02} \Rightarrow A_{02} - \frac{k^2 h}{4\omega} \frac{\partial}{\partial x_1} |A_{10}|^2, \quad (2.2.60)$$

$$A_{03} \Rightarrow A_{03} + i \frac{kh}{16\omega} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( A_{10} \frac{\partial A_{10}^*}{\partial x_1} - A_{10}^* \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \right). \quad (2.2.61)$$

Такой выбор был сделан в [Седлецкий 2003], хотя он не единственно возможный. Использование подобных замен не изменяет вид и коэффициенты замкнутого уравнения, но может изменять коэффициенты в системе уравнений для первой и нулевой гармоник.

Если рассмотреть компоненту  $\varphi_{04}$  в пределе  $kh \rightarrow \infty$ , то получим

$$\begin{aligned} \varphi_{04} \xrightarrow{kh \rightarrow \infty} & A_{04} + \frac{k^6}{8\omega^3} \left( z + \frac{h}{2} + \frac{2}{k} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} |A_{10}|^4 + \\ & + \frac{1}{\omega} P_1 \left( k^2 h^3, kh^2, k^2 h^2 z, h, khz, k^2 z^2 h, \frac{1}{k}, z, kz^2, k^2 z^3 \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \left( A_{10} \frac{\partial^2 A_{10}^*}{\partial x_1^2} + A_{10}^* \frac{\partial^2 A_{10}}{\partial x_1^2} \right) +, \quad (2.2.62) \\ & + \frac{1}{\omega} P_2 \left( k^2 h^3, kh^2, h, khz, k^2 z^2 h, \frac{1}{k}, z, kz^2, k^2 z^3 \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \frac{\partial A_{10}^*}{\partial x_1} \right) \end{aligned}$$

где  $P_1$  и  $P_2$  – многочлены, включающие указанные в скобках слагаемые. Очевидно, что с помощью подбора вида  $A_{04}$  можно добиться ограниченности  $\varphi_{04}$  всегда, но при  $kh \rightarrow \infty$  будут неограниченными, например, значения производных от  $\varphi_{04}$  по  $z$ . Использование замен типа (2.2.60), (2.2.61) не изменяет принципиально вид (2.2.62). Поэтому в эволюционное уравнение войдут слагаемые с бесконечно растущими в пределе  $kh \rightarrow \infty$  коэффициентами, а с точки зрения асимптотической техники это будет означать расходимость асимптотического ряда.

Причиной неограниченности членов ряда является невыполнение условия на малость глубины  $h$  по сравнению с характерной длиной изменения нулевой гармоники  $L$  (немного забегая вперед, – длиной группы). Это условие необходимо для представления нулевой гармоники решения уравнения Лапласа в виде степенного ряда (записи (2.2.13)). Если для классического НУШ или уравнения с учетом двух порядков малости это условие не мешает нахождению предела  $kh \rightarrow \infty$ , то для уравнения (2.2.51) это не так, уравнение (2.2.51) не применимо к случаю бесконечно глубокой воды.

Чтобы записать эволюционное уравнение для случая  $kh \rightarrow \infty$  воспользуемся путем К. Диста, выводя уравнение огибающей подобно полученному в [Dysthe, 1979]. Предположим, что  $h \gg L$  ( $L/h = O(\mu)$ ), а модовую структуру наведенного течения не будем определять заранее:

$$\varphi_{00} = A_{00}(z, x_i, t_i), \quad \varphi_{01} = A_{01}(z, x_i, t_i), \quad \varphi_{0m} = A_{0m}(z, x_i, t_i), \quad m \geq 2. \quad (2.2.63)$$

Следуя аналогично выводу обобщенного уравнения НУШ (2.2.51), приходим к следующему виду обобщенного уравнения Диста:

$$\begin{aligned} & i \left( \frac{\partial \eta_{10}}{\partial t} + \frac{\omega}{2k} \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} \right) + \varepsilon \frac{\omega}{8k^2} \frac{\partial^2 \eta_{10}}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\omega k^2}{2} |\eta_{10}|^2 \eta_{10} - \\ & - i \varepsilon^2 \frac{\omega}{16k^3} \frac{\partial^3 \eta_{10}}{\partial x^3} + i \varepsilon^2 \frac{3\omega k}{2} |\eta_{10}|^2 \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} + i \varepsilon^2 \frac{\omega k}{4} \eta_{10}^2 \frac{\partial \eta_{10}^*}{\partial x} - \\ & - \varepsilon^3 \frac{5\omega}{128k^4} \frac{\partial^4 \eta_{10}}{\partial x^4} + \varepsilon^3 \frac{\omega k^4}{2} |\eta_{10}|^4 \eta_{10} - \varepsilon^3 \frac{5\omega}{8} |\eta_{10}|^2 \frac{\partial^2 \eta_{10}}{\partial x^2} + \\ & + \varepsilon^3 \frac{3\omega}{32} \eta_{10}^2 \frac{\partial^2 \eta_{10}^*}{\partial x^2} - \varepsilon^3 \frac{3\omega}{16} \eta_{10} \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} \frac{\partial \eta_{10}^*}{\partial x} - \varepsilon^3 \frac{19}{32} \eta_{10}^* \left( \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} \right)^2 + \\ & + k \eta_{10} \frac{\partial A_{02}}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (2.2.64)$$

$$\frac{\partial A_{02}}{\partial z} = \frac{\omega}{2} \frac{\partial}{\partial x} |\eta_{10}|^2, \quad z = 0 \quad (2.2.65)$$

$$\frac{\partial^2 A_{02}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_{02}}{\partial x^2} = 0, \quad -h < z < 0 \quad (2.2.66)$$

$$\frac{\partial A_{02}}{\partial z} = 0, \quad z = -h. \quad (2.2.67)$$

При записи (2.2.64) было использовано условие (2.2.44); также попутно получено, что

$$\frac{\partial A_{03}}{\partial z} = -i \frac{\omega}{8k} \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta_{10} \frac{\partial^2 \eta_{10}^*}{\partial x^2} - \eta_{10}^* \frac{\partial^2 \eta_{10}}{\partial x^2} \right), \quad z = 0. \quad (2.2.68)$$

Слагаемое с наведенным течением (последнее в (2.2.64)) имеет такой же вид, что и в классическом уравнении Диста, что связано с выбором более жесткого условия  $L/h = O(\mu)$  (против  $L/h = O(1)$ ), что потребовалось для получения более простой формы уравнения. Тем самым, для применимости (2.2.64) должно выполняться  $kh \geq 1/\varepsilon^2$ .

Пренебрегая вкладом последнего слагаемого в уравнении (2.2.64), можно записать уравнение НУШ с учетом слагаемых трех порядков малости в пределе бесконечно глубокой воды. Как видно, его коэффициенты совпали с полученными нами ранее ограниченными коэффициентами уравнения (2.2.51) (см. Таблицу 2.2.1). Отметим, что вклад нулевой гармоники (наведенного течения) не ограничивается последним слагаемым в уравнении

(2.2.64), он входит и в другие нелинейные коэффициенты уравнения. Родственное по отношению к (2.2.64) уравнение, содержащее слагаемые высоких порядков по дисперсии и нелинейной дисперсии, было выведено из уравнений Захарова в работе [Debsarma & Das, 2005].

Полное поле огибающей смещения, описываемой (2.2.64), определяется выражением (2.2.52). Как следует из пределов коэффициентов  $r_{ij}$  с учетом малости  $kh$ , вклад нулевой гармоники оказывается вне рамок выбранной точности описания, хотя в модели Диста ее вклад учитывается [Trulsen et al, 2000]. Для описания поля скоростей жидкости (потенциала скорости) требуется учесть и разложение решения уравнения Лапласа (2.2.14) – (2.2.23). Полученные формулы для возмущения поверхности и потенциала скорости в толще воды обычно называют *формулами реконструкции*. Они будут записаны и явно использованы для определения комплексной амплитуды огибающей по данным измерения колебаний уровня воды, а затем для восстановления полей поверхности и скорости далее в Разделе 2.5.

В противоположном пределе очень мелкой воды,  $kh \rightarrow 0$ , построенная нами теория согласуется с уравнением огибающей, выведенном для соответствующего уравнения Кортевега – де Вриза, как показано в нашей статье [Слюняев, 2005\*].

### Случай вырождения кубической нелинейности ( $kh \approx 1.363$ )

Нелинейное эволюционное уравнение для модуляции огибающей в случае  $kh \approx 1.363$  было впервые получено в [Johnson, 1977], а затем в [Kakutani & Michihiro, 1983]. В первой работе были приведены численные значения коэффициентов при  $kh = 1.363$ , во второй – выражения для коэффициентов как функции глубины (которые давали отличные от первой работы результат и расходились в пределе бесконечно глубокой жидкости).

Чтобы записать эволюционное уравнение для случая  $kh \approx 1.363$  удобно переписать (2.2.51), явно обозначив малые множители, связанные со слабой нелинейностью ( $\varepsilon_{nl}$ ) и дисперсией ( $\varepsilon_d$ ):

$$\begin{aligned}
& i \left( \varepsilon \frac{\partial \eta_{10}}{\partial t} + \varepsilon_d V \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} \right) + \varepsilon_d^2 \beta_1 \frac{\partial^2 \eta_{10}}{\partial x^2} + \varepsilon_{nl}^2 \alpha_{10} |\eta_{10}|^2 \eta_{10} + \\
& + i \varepsilon_d^3 \beta_2 \frac{\partial^3 \eta_{10}}{\partial x^3} + i \varepsilon_{nl}^2 \varepsilon_d \alpha_{21} |\eta_{10}|^2 \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} + i \varepsilon_{nl}^2 \varepsilon_d \alpha_{22} \eta_{10}^2 \frac{\partial \eta_{10}^*}{\partial x} + \\
& + \varepsilon_d^4 \beta_3 \frac{\partial^4 \eta_{10}}{\partial x^4} + \varepsilon_{nl}^4 \alpha_{31} |\eta_{10}|^4 \eta_{10} + \varepsilon_{nl}^2 \varepsilon_d^2 \alpha_{32} |\eta_{10}|^2 \frac{\partial^2 \eta_{10}}{\partial x^2} + \\
& + \varepsilon_{nl}^2 \varepsilon_d^2 \alpha_{33} \eta_{10}^2 \frac{\partial^2 \eta_{10}^*}{\partial x^2} + \varepsilon_{nl}^2 \varepsilon_d^2 \alpha_{34} \eta_{10} \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} \frac{\partial \eta_{10}^*}{\partial x} + \varepsilon_{nl}^2 \varepsilon_d^2 \alpha_{35} \eta_{10}^* \left( \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} \right)^2 = 0
\end{aligned} \tag{2.2.69}$$



Отбрасывая слагаемое с  $\alpha_1$ , и требуя учета следующего нелинейного (с  $\alpha_{31}$ ) и первого дисперсионного (с  $\beta_1$ ) членов в одном порядке малости, получаем новое соотношение между малыми параметрами нелинейности и дисперсии:  $\varepsilon_{nl}^2 \sim \varepsilon_d$ . Тогда, учитывая только первые поправки к уравнению переноса, получаем модифицированное уравнение:

$$\begin{aligned} & i \left( \frac{\partial \eta_{10}}{\partial t} + V \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} \right) + \varepsilon \beta_1 \frac{\partial^2 \eta_{10}}{\partial x^2} + \sqrt{\varepsilon} \alpha_1 |\eta_{10}|^2 \eta_{10} + \\ & + i \varepsilon \alpha_{21} |\eta_{10}|^2 \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} + i \varepsilon \alpha_{22} \eta_{10}^2 \frac{\partial \eta_{10}^*}{\partial x} + \varepsilon \alpha_{31} |\eta_{10}|^4 \eta_{10} = 0 \end{aligned} \quad (2.2.70)$$

В нем  $\varepsilon \sim \varepsilon_d \sim \varepsilon_{nl}^2$ , а слагаемое с кубической нелинейностью удержано, полагая  $\alpha_1$  меньше или порядка  $\varepsilon^{1/2}$ .

Уравнение (2.2.70) описывает нелинейную динамику поверхностных волн в области  $kh \approx 1.363$  и должно использоваться вместо (2.2.35) в указанной области. Хотя слагаемые в уравнении (2.2.70) получены с использованием разложений до порядка  $\varepsilon^5$  включительно, по сути, это уравнение первого порядка. В настоящей работе его коэффициенты определены, в отличие от [Johnson, 1977], для любой глубины  $kh$  и всегда имеют конечное значение, в отличие от [Kakutani & Michihiro, 1983]. Для случая  $kh = 1.363$  они приведены в Таблице 2.2.1. Смещение поверхности определяется формулой (2.2.36).

Исследование модуляционной устойчивости простейшего решения уравнения (2.2.70) – плоской волны – проводилось в работах [Kakutani & Michihiro, 1983; Parkes, 1987]. Записывая решение в виде

$$\eta_{10} = A \exp(i((\Omega + \omega)t - (K + k)x)), \quad (2.2.71)$$

где  $K$  и  $\Omega$  – волновое число и частота отстройки, критерий модуляционной неустойчивости выглядит как

$$\beta_1 \alpha_1 + D > 0, \quad \text{где} \quad D = \beta_1 K (\alpha_{22} - \alpha_{21}) + A^2 \left( 2\beta_1 \alpha_{31} - \frac{1}{2} \alpha_{22}^2 \right). \quad (2.2.72)$$

Область неустойчивых возмущений волновых чисел определяется соотношением

$$0 < \Delta K < \left| \frac{A}{\beta_1} \right| \sqrt{2(\beta_1 \alpha_1 + D)}, \quad (2.2.73)$$

(полное волновое число возмущения равно  $k + K + \Delta K$ ), а максимальный инкремент неустойчивости

$$(\text{Im } \Omega)_{\max} = \frac{A^2}{\beta_1} (\beta_1 \alpha_1 + D) \quad \text{при} \quad \Delta K_{\max} = \left| \frac{A}{\beta_1} \right| \sqrt{\beta_1 \alpha_1 + D}. \quad (2.2.74)$$

В зависимости от знака параметра  $D$  реализуются различные типы неустойчивости. По данным Табл. 2.2.1 можно получить, что при  $kh = 1.363$

$$D \approx \omega^2 \left( -0.2527 \frac{K}{k} + 0.2311 (kA)^2 \right). \quad (2.2.75)$$

Коэффициенты в соотношении (2.2.75) отличны от найденных в [Kakutani & Michihito, 1983], однако для волны Стокса ( $K = 0$ ) знак  $D$  совпадает с определенным в этой работе, а потому сделанные в ней выводы о характере неустойчивости сохраняются: в сверхкритическом случае ( $kh > 1.363$ ) всегда существует область неустойчивых возмущений волны Стокса, а в докритическом случае ( $kh < 1.363$ ) для существования модуляционной неустойчивости необходимо выполнение условия

$$D > -\beta_1 \alpha_1 > 0, \quad (2.2.76)$$

которое сдвигает порог возникновения неустойчивости  $kh = 1.363$  для интенсивных волн в область более мелкой воды. Оценим этот сдвиг, положив  $K = 0$  и  $kA = 0.1$  (типичная крутизна морских волн), тогда пороговое значение глубины равно  $kh \approx 1.3508$ ; при выборе  $kA = 0.4$  следует значение  $kh \approx 1.2520$ . Отметим, что качественно полученный нами результат совпадает с более поздней работой [Агафонцев, 2008], но количественно расширение области неустойчивости в мелководную область в работе [Агафонцев, 2008] значительно больше. Для рассмотренных крутизн  $kA = 0.1$  и  $kA = 0.4$  формула (19) из [Агафонцев, 2008] оценивает порог устойчивости как  $kh \approx 1.2802$  и  $kh \approx 0.0379$  соответственно.

Как следует из Приложения А, коэффициенты полученных уравнений в общем случае очень объемны. С другой стороны, они представлены рациональными выражениями и тривиально могут быть рассчитаны численно. Обобщенные уравнения Диста (2.2.64)-(2.2.67) использованы нами для модельных расчетов в Разделе 3.1; они, действительно, демонстрируют большую аккуратность, чем классическая модель Диста. Полученное НУШ третьего порядка (и его коэффициенты) позднее использовалось в работе [Grimshaw & Annenkov, 2011] для описания трансформации солитона огибающей в переходной области  $kh \approx 1.36$ . В работе [Gandzha et al, 2014] было проведено обезразмеривание уравнения второго порядка и исследовались квазисолитонные решения, близкие к солитонам огибающей интегрируемого НУШ первого порядка.

### **2.3 Аналитическое описание усиления волн под действием самофокусирующей нелинейности**

Частным важным случаем эволюционного уравнения для огибающей волн является классическое нелинейное уравнение Шредингера (2.2.35) (НУШ) [Захаров, 1968; Hasimoto &

Ono, 1972; Davey, 1972]). Оно удерживает слагаемые слабой нелинейности и слабой дисперсии, которые для случая достаточно глубокой воды могут компенсировать друг друга и приводить к возникновению когерентных волновых групп. Классическое НУШ интегрируется методом обратной задачи рассеяния [Захаров и Шабат, 1971, 1973; Ablowitz et al, 1974], и связанные нелинейностью локализованные волновые группы соответствуют дискретной части спектра ассоциированной задачи рассеяния. Поскольку спектр задачи рассеяния не изменяется во времени, то и солитоны в рамках НУШ «живут вечно», упруго взаимодействуя с другими солитонами и квазилинейными волнами, описываемыми сплошным спектром задачи рассеяния (например, [Захаров и др., 1980; Абловиц и Сегур, 1987; Drazin, 1996]). В рамках начальной задачи на бесконечном интервале для полей, спадающих на бесконечности, дискретный спектр описывает т.н. асимптотическое решение: начальное возмущение распадается на солитоны и волны сплошного спектра. Первые распространяются без потери энергии, а вторые спадают по амплитуде, растаскиваясь дисперсией. Описание решения на периодическом интервале отличается и имеет специфический математический аппарат [Osborne, 2010].

Кроме солитонных решений важный класс аналитических решений представлен бризерами. Бризерами (от англ. «breather», «дышащий») в последнее время называют очень разные решения. В нашей работе мы будем придерживаться классического определения бризера в контексте НУШ как солитон на пьедестале (фоне, подложке). Таким образом, в этом случае проблема формулируется для граничных условий на бесконечности в виде плоской волны, либо на периодическом интервале. Первые бризерные решения были найдены в работах Кузнецова (1977), Ма [Ma, 1979], Перегринна [Peregrine, 1983] и Ахмедиева с соавторами [Ахмедиев и др., 1985, 1987; Ахмедиев и Корнеев, 1986]. Они описывали периодическое во времени локализованное в пространстве возмущение плоской волны [Кузнецов, 1977; Ма, 1979] (далее этот тип решений будем именовать бризерами Кузнецова-Ма); периодическое в пространстве, но локализованное возмущение [Ахмедиев и др., 1985] (будем называть такие бризеры – бризерами Ахмедиева); вырожденное решение, локализованное как в пространстве, так и во времени [Peregrine, 1983] (в этом случае – бризера Перегринна – возмущение огибающей спадает по степенному закону), которое может быть получено из каждого из двух предыдущих классов решений соответствующим предельным переходом.

Бризеры описывают нелинейную стадию модуляционной неустойчивости однородных волн в рамках НУШ. Объяснение «волн-убийц» как результата развития модуляционной неустойчивости морских волн зарождалось в начале 2000-х гг., тогда же бризерные решения

были предложены как модельные решения, описывающие генерацию аномальных волн [Dysthe & Trulsen, 1999; Henderson et al, 1999]. Близость произвольного малого возмущения плоской волны к решению Перегринна обсуждалась в статье [Shrira & Geogjaev, 2010]. Этот интерес мотивировал нахождение и исследование новых бризерных решений. В работах [Tajiri & Watanabe, 1998] и [Slunyaev et al, 2002] представлено обобщение решения Кузнецова-Ма на общий случай собственного значения. Мультибризерное решение (два дискретных значения) обсуждалось в [Akhmediev et al, 2009]. Мощная ветвь работ представлена выводом мультибризерных рациональных решений, обобщающих решение Перегринна. Достоинством рациональных решений является относительная простота выкладок по сравнению с другими решениями. Благодаря развитию подходов для получения мультисолитонных решений и использованию систем символьной математики получены точные формулы для рациональных мультибризерных решений вплоть до 10-го порядка (10 дискретных значений) [Dubard et al, 2010; Gaillard, 2012, 2014]. Изменяя фазовые соотношения внутри мультибризера, можно контролировать структуру пиков решения на плоскости  $(x, t)$  [Kedziora et al, 2013]. В работах [Zakharov & Gelash, 2013; Gelash & Zakharov, 2014] рассматривается специальный класс решений, соответствующий наборам парных дискретных собственных значений задачи рассеяния. Тогда возможна полная или частичная аннигиляция возмущений огибающей, движущихся навстречу. Этот подход предлагается использовать для решения начальной задачи для малых возмущений огибающей (в нашем понимании он связан с возможностью представления такой начальной задачи в терминах задачи Коши на нулевом пьедестале для другого интегрируемого уравнения – Гарднера или модифицированного уравнения Кортевега – де Вриза).

Таким образом, описание динамики модуляционно неустойчивых волн в рамках подходов для интегрируемого НУШ и соответствующих точных решений представляется актуальной, активно развивающейся и перспективной проблемой. Перечисленные бризерные решения для разных граничных условий имеют несколько отличные свойства, из-за чего одни из них иногда рассматриваются как более физически адекватные, чем другие. Например, периодическое по координате решение Ахмедиева после фокусировки меняет фазу, и потому не может быть «встроено» в бесконечный невозмущенный вне решения фон. С другой стороны, возмущение, описываемое решением Кузнецова-Ма, в отличие от Ахмедиева, никогда не спадает меньше определенного уровня, и потому не может описывать развитие очень малого возмущения.

## Модуляционная неустойчивость: начальная и нелинейная стадии

Для сопоставления решений НУШ с классической задачей модуляционной неустойчивости периодического возмущения плоской волны удобно использовать бризерные решения Ахмедиева, периодичные в пространстве. Спектр Фурье для таких решений дискретный.

Размерное НУШ (2.2.35) удобно свести к стандартной безразмерной форме

$$i \frac{\partial q}{\partial t'} + \frac{\partial^2 q}{\partial x'^2} + 2|q|^2 q = 0 \quad (2.3.1)$$

после преобразований

$$x' = 2k_0(x - C_g t), \quad t' = \frac{\omega_0}{2} t, \quad q = \frac{k_0}{\sqrt{2}} \eta. \quad (2.3.2)$$

записанных для частного случая бесконечно глубокой воды, при этом групповая скорость  $C_g = \omega_0/k_0/2$ . Нижний индекс при частоте и волновом числе соответствует несущей. В последующем (в Главе 3) нам будет удобно явно использовать инвариантность НУШ по отношению к масштабному преобразованию. Тогда замена классическая координат (2.3.2) может быть модифицирована как

$$x' = \sqrt{2} s_0 k_0 (x - C_g t), \quad t' = s_0^2 \frac{\omega_0}{4} t, \quad q = \frac{k_0}{s_0} \eta, \quad (2.3.3)$$

где  $s_0 = k_0 a_0$  – крутизна невозмущенной волны. Преобразование координат (2.3.3) приводит к тому же безразмерному уравнению (2.3.1), но для него крутизна начального условия  $q$  в виде невозмущенной волны всегда равна единице.

Для НУШ можно ввести параметр подобия *BFI* (Benjamin – Feir Index), определяющий соотношение величин слагаемых нелинейности и дисперсии. Он является аналогом числа Урсела для условий мелкой воды, еще его называют солитонным числом или надкритичностью, поскольку он определяет степень модуляционной неустойчивости и число рождающихся солитонов огибающей. Для слабо модулированных волн этот параметр может быть введен следующим образом,

$$BFI = 2\sqrt{2} s_0 N_x, \quad (2.3.4)$$

где  $N_x = k_0/K$  – число волн на одной длине модуляции (нижний индекс  $x$  соответствует рассмотрению модулированных волн в пространственном домене),  $K$  – волновое число возмущения.

Точное решение НУШ (2.3.1) в виде плоской волны  $q = a_0 \exp(ia_0^2/2 t)$  (здесь и далее штрихи над безразмерными переменными убираем) подвержено модуляционной неустойчивости для достаточно длинных возмущений. Инкремент неустойчивости  $\sigma_{BF}$  в введенных координатах имеет вид

$$\frac{\sigma_{BF}}{\omega_0} = \frac{s_0^2}{BFI} \sqrt{1 - \frac{1}{BFI^2}}. \quad (2.3.5)$$

Условие неустойчивости записывается в терминах единственного параметра  $BFI > 1$ , что соответствует  $K < 2\sqrt{2} s_0 k_0$ . В другой интерпретации условие неустойчивости требует достаточно большого числа волн в модуляции,  $N_x > 2^{-3/2} s_0^{-1}$ . Модуляционная неустойчивость проявляется, в первую очередь, в виде роста симметрично расположенных спектральных сателлитов  $k_0 \pm K$ , они растут за счет энергии несущей волны на волновом числе  $k_0$ . Максимальный инкремент неустойчивости и соответствующее наиболее неустойчивое число волн в группе определяются соотношениями

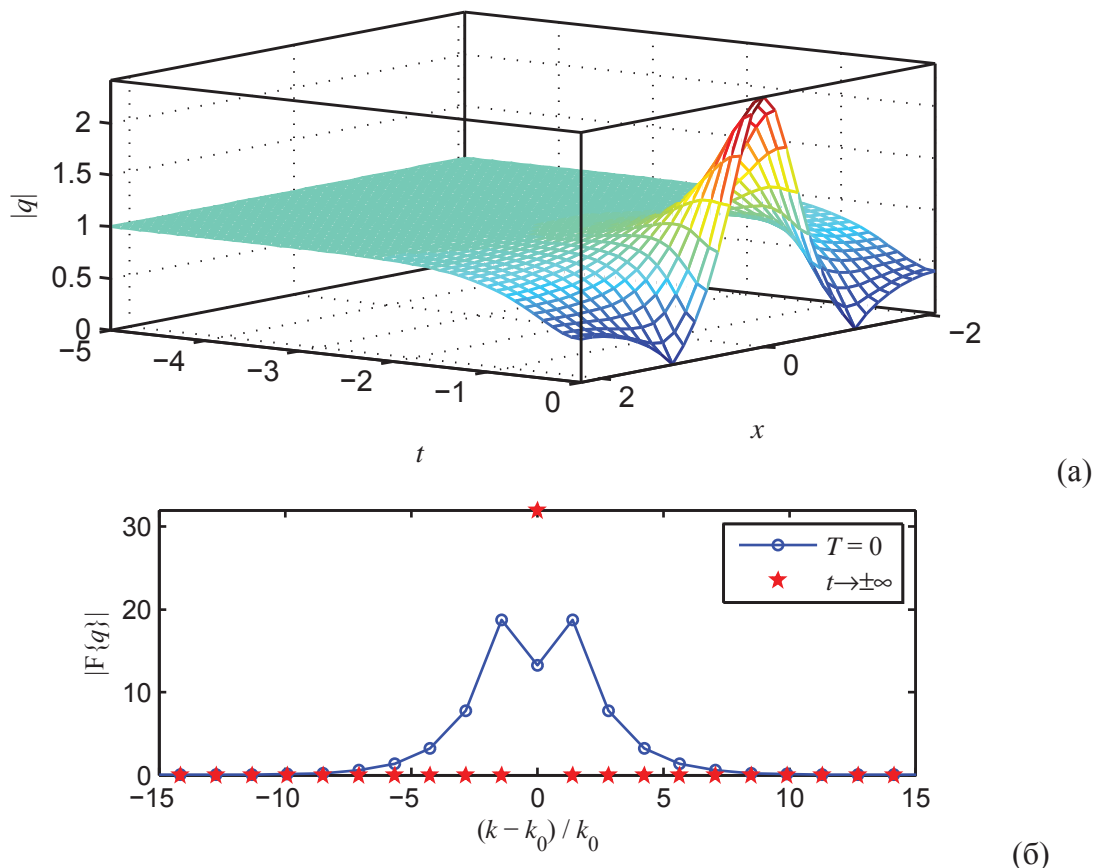


Рис. 2.3.1. Периодическое в пространстве бризерное решение Ахмедиева для условий с максимальным инкрементом роста ( $\lambda = 2^{-1/2}$ ): эволюция огибающей (а) и спектр Фурье (б) для момента максимальной модуляции (синяя линия с кружками) и когда модуляция исчезает (красные звездочки).

$$\frac{\sigma_{BF \max}}{\omega_0} = \frac{s_0^2}{2}, \quad N_{BF \max} = \frac{1}{2s_0}. \quad (2.3.6)$$

Согласно оценке (2.3.6) для морских волн умеренной крутизны  $s_0 = 0.1$ , максимально неустойчива группа, состоящая всего из 5 волн. Такие простейшие оценки наличия и характеристик модуляционной неустойчивости были нами сделаны для регистрации т.н. Новогодней волны в работе [Пелиновский и др., 2003\*].

Точное решение в виде бризера Ахмедиева описывает нелинейную стадию неустойчивости. Это решение может быть записано в виде

$$q(x, t) = e^{2it} \frac{\lambda \cos 2\gamma x - \cosh(4\lambda\gamma t - 2i\mu)}{\lambda \cos 2\gamma x - \cosh 4\lambda\gamma t}, \quad (2.3.7)$$

$$\gamma = \sqrt{1 - \lambda^2}, \quad \lambda = \cos \mu,$$

где  $\lambda < 1$  – ключевой параметр, определяющий решение, а также дополнительными параметрами решения являются значения отсчета координаты, времени и фазы. Амплитуда невозмущенной волны, описываемой решением (2.3.7) при  $t \rightarrow \pm\infty$ , равна единице. Последние параметры не важны, когда речь идет о глобальном поведении решения. Единственный существенный параметр решения,  $\lambda$ , определяет период решения  $\pi/\gamma$ , а потому описание нелинейной стадии неустойчивости (2.3.7) может быть связано с анализом начальной стадии модуляционной неустойчивости, данным выше, учитывая соотношение

$$\lambda = \sqrt{1 - \frac{1}{BFI^2}}. \quad (2.3.8)$$

Непосредственное разложение решения (2.3.7) в пределе больших времен (малые возмущения) подтверждает совпадение инкремента неустойчивости (2.3.5) с экспоненциальным ростом возмущений, описываемым (2.3.7). Максимально неустойчивое возмущение соответствует  $\lambda = 2^{-1/2}$  (тогда  $\mu = \pi/4$ ). Эволюция огибающей для этого случая показана на Рис. 2.3.1а – до момента максимума модуляции  $t = 0$  далее происходит процесс демодуляции, и картинка огибающей выглядит симметрично относительно  $t = 0$ .

Максимальное усиление амплитуды волн (по отношению к начальному условию) описывается простым соотношением

$$AI_{env} \equiv \frac{\max_t \max_x |q(x, t)|}{\min_t \max_x |q(x, t)|} = 1 + 2\lambda. \quad (2.3.9)$$

Максимальное усиление в 3 раза достигается при  $\lambda = 1$ , что соответствует бесконечно большому BFI, что для конечных значений крутизны требует бесконечно большого периода решения. Этот случай соответствует решению Перегринна [Peregrine, 1983]. Максимально

быстро растущее возмущение с  $\lambda = 2^{-1/2}$  приводит к усилению в  $1 + \sqrt{2} \approx 2.4$  раза, оно и построено на Рис. 2.3.1. В общем случае информативна объединенная картинка для инкремента модуляционной неустойчивости и степени усиления волн, приведенная на Рис. 2.3.2. Из нее видно, что потенциально более опасные длинные модуляции обладают меньшим инкрементом роста.

Из Рис. 2.3.1 видно образование симметричных перетяжек огибающей в момент максимальной модуляции. Анализ решения (2.3.7) предсказывает их существование только для достаточно больших значений  $\lambda$ ,  $1/2 \leq \lambda \leq 1$ , положения перетяжек в безразмерном координатах задаются  $\pm x_{waist}$ ,

$$x_{waist} = \frac{1}{2\gamma} \arccos \frac{2\lambda^2 - 1}{\lambda}. \quad (2.3.10)$$

В области значений  $0 \leq \lambda \leq 1/2$  (относительно короткие периоды бризеров, т.е. энергия собирается с малого количества индивидуальных волн) огибающая не касается нуля. Отметим, что в этом случае не может выполняться и критерий «волн-убийц»  $AI_{env} > 2$ .

Как уже отмечалось, модуляционная неустойчивость сопровождается передачей энергии от несущей волны к спектральным сателлитам. На Рис. 2.3.1б построены спектры Фурье для модулированных волн, описываемых бризером на Рис. 2.3.1а. Если в моменты, далекие от фокусировки на спектре прослеживается только один пик, соответствующий несущей волне, то для  $t = 0$  видно возбуждение многих пар спектральных спутников, задающих форму модуляции.

Время жизни «волны-убийцы», описываемой бризером (2.3.7), можно найти

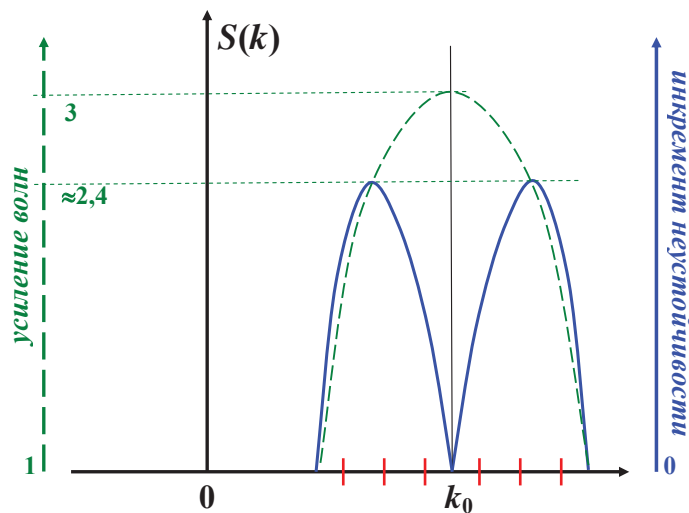


Рис. 2.3.2. Качественная картина инкремента неустойчивости для модулированной плоской волны (синие линии) и максимального усиления волн во время нелинейной стадии модуляционной неустойчивости (зеленый пунктир, левая вертикальная ось).



аналитически. Для произвольного значения превышения огибающей  $A_{thr}$ , задающего порог «волны-убийцы» (нами используется  $A_{thr} = 2$ ), амплитуда бризера превосходит это порог в течение времени

$$T_{life} = \frac{1}{2\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} \arccos h \left[ 1 + \frac{1-\lambda}{1+A_{thr}} (AI_{env}^2 - AI_{thr}^2) \right], \quad AI_{env} = 1 + 2\lambda. \quad (2.3.11)$$

Формула (2.3.11) имеет действительные решения только для  $(AI_{thr} - 1)/2 < \lambda \leq 1$ . Для используемого нами критерия «волны-убийцы»  $AI > 2$  бризеры в момент максимальной модуляции всегда образуют перетяжки, согласно (2.3.10).

Для примера оценим время жизни линейной «волны-убийцы», когда нелинейное слагаемое в НУШ (2.3.1) равно нулю. Линейное параболическое уравнение имеет точное решение в виде Гауссова импульса. Его амплитуда  $A_G$  и характерная ширина  $L_G$  изменяются во времени как (см., например, в [Slunyaev et al, 2002])

$$A_G(t) = A_{G0} \left( 1 + 16 \frac{t^2}{L_{G0}^4} \right)^{-\frac{1}{4}}, \quad L_G(t) = L_{G0} \left( 1 + 16 \frac{t^2}{L_{G0}^4} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.3.12)$$

$$A_{G0} \equiv A_G(t=0), \quad L_{G0} \equiv L_G(t=0).$$

Тогда наперед заданное значение  $A_G < A_{G0}$  достигается в момент

$$T_G = \frac{L_{G0}^2}{4} \sqrt{\left( \frac{A_{G0}}{A_G} \right)^4 - 1}. \quad (2.3.13)$$

Чтобы сопоставить времена жизни «волны-убийцы» – бризера и Гауссового пакета полагаем амплитуду Гауссовой группы в момент  $t = 0$  равной максимальной амплитуде бризера,  $A_{G0} = 1 + 2\lambda$ , а характерную ширину Гауссовой группы сопоставляем с расстоянием от максимума бризера до перетяжки,  $L_{G0} = x_{waist}$ . Также положим в (2.3.13)  $A_G = 2$ , определяя амплитудный порог, когда группа становится «обычной», а не «убийцей», по бризеру. Тогда время жизни «линейной» «волны-убийцы» определяется формулой

$$T_{life}^G = \frac{L_{G0}^2}{2} \sqrt{\left( \frac{1+2\lambda}{2} \right)^4 - 1}, \quad \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1 \quad (2.3.14)$$

( $L_{G0} = x_{waist}$  определено в (2.3.10)). Зависимости  $T_{life}$  и  $T_{life}^G$  как функции  $\lambda$  ведут себя схожим образом и дают близкие значения. Они больше нуля при  $\lambda > 1/2$  и монотонно растут с ростом  $\lambda$ . В предельном случае бризера Перегринна  $\lambda = 1$ ,  $A_G = 2$ ,  $A_{G0} = 3$ ,  $L_{G0} = \sqrt{3}/2$ , времена жизни  $T_{life} = \sqrt{15}/6 \approx 0.65$  и  $T_{life}^G = 3\sqrt{65}/32 \approx 0.76$ . Напомним, что в нашем рассмотрении время нормировано не только на период волны, но и на параметр нелинейности, согласно (2.3.3). Таким образом, существенного различия во временах жизни нелинейной и линейной

аномально высоких волн не обнаружено. В качестве намека на объяснение этого эффекта на качественном уровне можно предложить сохранение примерного баланса эффектов нелинейности и дисперсии в бризерах в период возникновения максимальной модуляции (в это время  $BFI \sim 1$ ), а потому чисто дисперсионные и чисто нелинейные эффекты действуют на примерно одинаковых временах. Однако, после демодуляции связанная нелинейностью волновая группа сохраняет свою индивидуальность (в рамках неинтегрируемых версий НУШ – примерно сохраняет, на некоторых относительно больших временах) и в неидеализированных условиях снова способна привести к формированию аномально высоких волн. Такая динамика приводит к отличию от гауссовой статистики, она не наблюдается в случае линейной динамики волн.

Определим представление Фурье как

$$\hat{F}\{q\} = \int_0^{\pi/\gamma} q(x) \exp(ikx) dx, \quad (2.3.15)$$

где интегрирование ведется по периоду бризера, а  $k = 2\gamma j$  – дискретный набор волновых чисел ( $j$  – целое). Обратное преобразование включает сумму по бесконечному числу дискретных волновых чисел. Компонента Фурье для нулевого волнового числа – определяет «массу» решения  $\hat{F}\{q\}_{k=0} = \int_0^{\pi/\gamma} q dx$ . Спектр бризера распадается на две части – для несущей волны (компонента нулевой гармоники  $k = 0$ ) и для модуляции, см. [Ахмедиев и Анкевич, 2003] и в нашей работе [Slunyaev, 2010\*]:

$$\hat{F}\{q\} = e^{2it} [M - 2\pi B e^{i\theta}], \quad (2.3.16)$$

$$M = \frac{\pi}{\sqrt{1-\lambda^2}} \delta_k, \quad \theta = \arctan\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \tanh 4t\lambda\sqrt{1-\lambda^2}\right),$$

$$B_{k=0} = 1, \quad B_{k \neq 0} = \left(p - \sqrt{p^2 - 1}\right)^{\frac{|k|}{2\sqrt{1-\lambda^2}}}, \quad p = \frac{1}{\lambda} \cosh 4t\lambda\sqrt{1-\lambda^2}.$$

Здесь  $\delta_k$  – символ Кронекера, а показатели степени  $|k|/(2\sqrt{1-\lambda^2}) = |j|$  – целые числа. Из вида (2.3.16) следует, что бризер не ограничивается парой спектральных сателлитов, а представим бесконечным числом гармоник, описывающих профиль модуляции. Компоненты  $B_{k \neq 0}$ , описывающие модуляцию, всегда в фазе. Эта фаза противоположна фазе несущей волны в момент фокуса  $t = 0$ ; компонента Фурье несущей волны равна

$$\hat{F}\{q\}_{k=0} = e^{2it} [M - 2\pi e^{i\theta}]. \quad (2.3.17)$$

Соответственно, при  $t \rightarrow \pm\infty$  решение стремится к плоской волне с определенной фазой

$$q \rightarrow e^{2it} e^{\mp 2i\mu}, \quad \text{когда} \quad t \rightarrow \pm\infty. \quad (2.3.18)$$

Соответственно,

$$\hat{F}\{q\}_{k=0} \rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{1-\lambda^2}} e^{2it} e^{\mp 2i\mu}, \quad \text{когда } t \rightarrow \pm\infty. \quad (2.3.19)$$

То же самое может быть найдено из (2.3.16), тогда для  $t \rightarrow \pm\infty$  фаза  $\theta = \mp(\mu - \pi/2)$ . Отметим, что для максимально неустойчивого возмущения  $\lambda = 2^{-1/2}$  и  $\mu = \pi/4$ , а тогда отличие фазы возмущения от фазы доминантной волны есть  $\theta = \pm\pi/4$  для  $t \rightarrow \pm\infty$ . Для предельного случая бризера Перегринна разность фаз в 2 раза больше,  $\theta = \pm\pi/2$  для  $t \rightarrow \pm\infty$ . Таким образом, волна после процесса модуляции-демодуляции приобретает сдвиг фазы.

Для больших времен, когда вкладом возмущения в спектральную компоненту доминирующей волны можно пренебречь, можно записать следующие формулы, оценивающие амплитуду гармоник модуляции и время фокусировки  $T_f$

$$B_k \cong \frac{\hat{F}\{q\}_k}{\hat{F}\{q\}_{k=0}} \frac{e^{i\theta}}{2\sqrt{1-\lambda^2}}, \quad (2.3.20)$$

$$T_f \cong \frac{1}{4\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} \cosh^{-1} \left[ \frac{\lambda}{2} \left( \frac{\Delta_K}{4\sqrt{1-\lambda^2}} \right)^{\sqrt{1-\lambda^2} \frac{2}{K}} + \frac{\lambda}{2} \left( \frac{\Delta_K}{4\sqrt{1-\lambda^2}} \right)^{-\sqrt{1-\lambda^2} \frac{2}{K}} \right], \quad (2.3.21)$$

где введено обозначение для амплитуды  $K$ -ой гармоники модуляции, нормированной на амплитуду несущей (см. подробности в [Slunyaev & Shrira, 2013\*]):

$$\Delta_K \equiv 2 \frac{|\hat{F}\{q\}_{k=K}|}{|\hat{F}\{q\}_{k=0}|}. \quad (2.3.22)$$

В физических переменных  $K$ -ой гармонике модуляции соответствуют спектральные компоненты  $k$ , такие, что  $k_0 K = |k - k_0|$ . Например,  $\Delta_K = 0.01$  соответствует в размерных переменных возмущению с периодом  $2\pi/(k_0 K)$  и амплитудой 1% от амплитуды несущей волны.

Таким образом, полученные формулы, использующие бризерное решение для периодического домена, связывают классические параметры, описывающие неустойчивый слабо модулированный цуг волн (крутизна несущей волны, длина модуляции) с параметрами сфокусированной в результате развития модуляционной неустойчивости волны: максимальное усиление амплитуды огибающей (2.3.9) и время жизни «волны-убийцы» (2.3.11). Время фокусировки (2.3.21) определяется для известной величины возмущения волны  $\Delta_K$ . Эти формулы могут быть использованы для простейшего прогноза «волн-убийц».

## Бризеры как суперпозиция солитонов огибающей и подложки.

### Ассоциированная задача рассеяния

В зависимости от граничных условий меняется интерпретация данных рассеяния, что позволяет связать наглядным образом проблему для солитонов НУШ на нулевом и постоянном пьедестале. В дальнейшем будет использоваться метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) в постановке АКНС (по первым буквам авторов статьи [Ablowitz et al, 1974]), тогда ассоциированная задача рассеяния может быть записана в форме

$$\Psi_x = R\Psi, \quad R = \begin{pmatrix} \lambda & q \\ -q^* & -\lambda \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.3.23)$$

$$\Psi_t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} \Psi, \quad \begin{cases} a_{11} = i|q|^2 + 2i\lambda^2 \\ a_{12} = iq_x + 2i\lambda q \\ a_{21} = iq_x^* - 2i\lambda q^* \end{cases}$$

где  $\lambda$  – собственное значение спектральной задачи, достаточно рассмотреть случай положительных значений действительной части спектра  $\text{Re}(\lambda) \geq 0$ . Для нулевых граничных условий  $q \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \pm\infty$  каждое комплексное значение  $\lambda$  с ненулевой действительной частью соответствует солитону огибающей

$$q_s(x, t) = A_s \frac{\exp\left(i\left(xV_s/2 - \left((V_s/2)^2 - A_s^2\right)t\right)\right)}{\cosh\left(A_s(x - V_s)t\right)}, \quad \text{где } \lambda = \frac{A_s}{2} + i\frac{V_s}{4}. \quad (2.3.24)$$

Здесь действительные числа  $A_s$  и  $V_s$  – амплитуда и скорость (относительно линейной групповой скорости  $C_{gr}$ ) солитона огибающей.

Если же рассматриваются возмущения бесконечной плоской волны  $q \rightarrow \exp(2it)$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ , то решение описывается бризером

$$q(x, t) = e^{2it} \times \frac{\cos \mu \cos(2\gamma(x - v_{br}t) + 2i\psi) - \cosh \psi \cosh(2\Gamma(x - V_{br}t) + 2i\mu)}{\cos \mu \cos(2\gamma(x - v_{br}t)) - \cosh \psi \cosh(2\Gamma(x - V_{br}t))}, \quad (2.3.25)$$

$$\Gamma = -\sinh \psi \cos \mu, \quad \gamma = \cosh \psi \sin \mu,$$

$$V_{br} = -\frac{\cosh 2\psi \sin 2\mu}{\sinh \psi \cos \mu}, \quad v_{br} = \frac{\sinh 2\psi \cos 2\mu}{\cosh \psi \sin \mu},$$

$$\lambda = \cos(\mu + i\psi).$$

Здесь  $v_{br}$  и  $V_{br}$  играют, соответственно, роль фазовой и групповой скорости пакета возмущения плоской волны. Амплитуда волнового поля в центре возмущения (что соответствует максимуму возмущения) удовлетворяет условию:

$$|A_{br} - A_{pw}| \leq |q_{central}(t)| \leq |A_{br} + A_{pw}|, \quad \text{где} \quad A_{br} = 2 \cos \mu \cosh \psi, \quad A_{pw} = 1 \quad (2.3.26)$$

и осциллирует с периодом

$$T_{br} = \frac{\pi}{\cos 2\mu \sinh 2\psi}. \quad (2.3.27)$$

Таким образом, величина  $A_{br}$  выступает в роли собственной амплитуды бризера, которая линейным образом складывается или вычитается с амплитудой фона  $A_{pw} = 1$ .

Решения (2.3.24) и (2.3.25) могут быть дополнены произвольным выбором отсчета

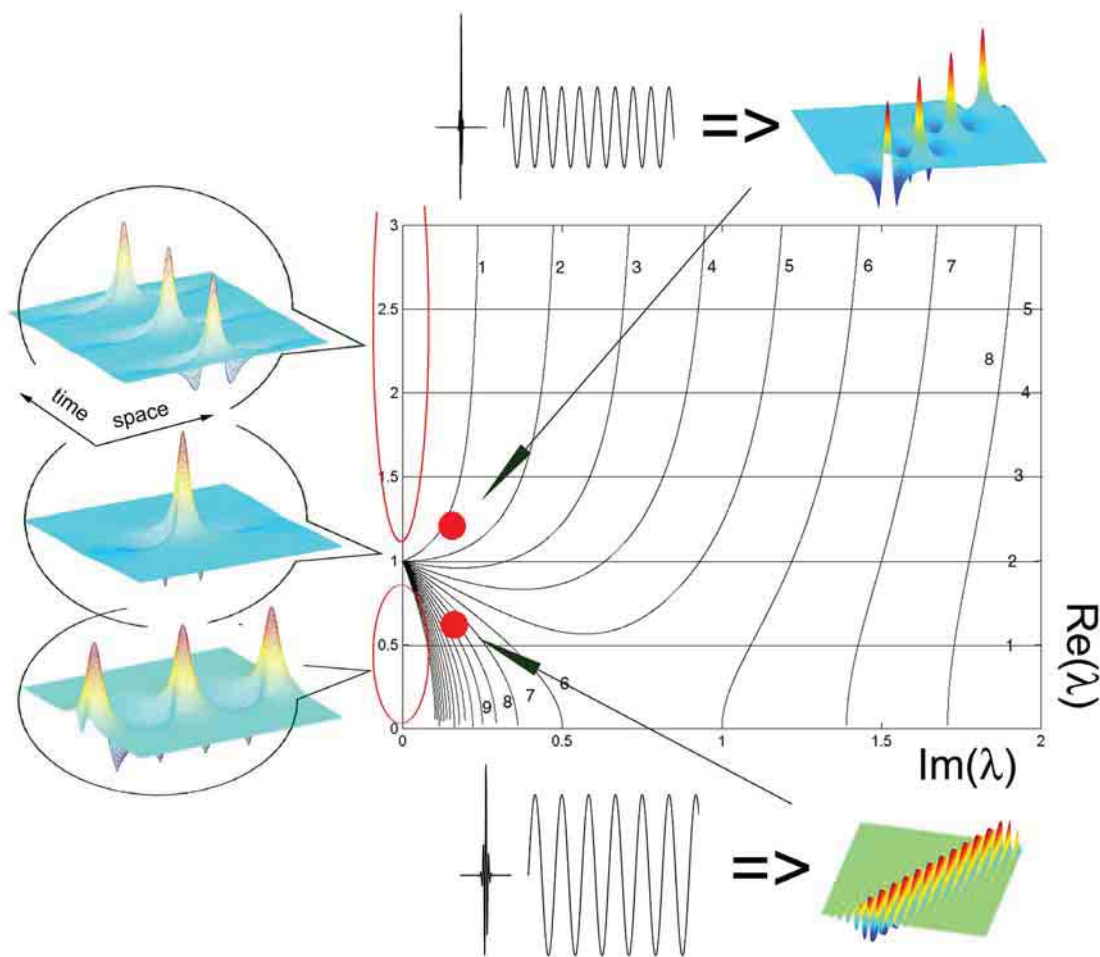


Рис. 2.3.3. Иллюстрация плоскости собственных значений задачи рассеяния  $\lambda$  и типичных решений (построена огибающая).

координаты, времени и произвольной фазой. Решение (2.3.25) было представлено в нашей работе [Slunyaev et al, 2002], оно было также выведено в работе [Tajiri & Watanabe, 1998] с применением преобразования Хироты. Плоскость собственных значений ассоциированной задачи рассеяния (2.3.23) и рисунки характерных решений на пьедестале (2.3.25), соответствующих различным положениям собственного значения на плоскости, представлены на Рис. 2.3.4. Это решение обобщает бризеры Кузнецова-Ма, Ахмедиева и Перегринна (см. рисунки по левому краю), которые не распространяются в системе отсчета, связанной с  $C_{gr}$ . Комплексные значения  $\lambda$  описывают бегущие решения, что согласуется с картиной бризерных решений, построенной в [Gelash & Zakharov, 2014]. Линии уровня на плоскости маркируют линии постоянной амплитуды  $A_{br}$  (горизонтальные линии) и постоянной скорости бризера  $V_{br}$

$$\lambda = \frac{A_{br}}{2} - i \sin \mu \sinh \psi, \quad V_{br} = 4 \operatorname{Im}(\lambda) \frac{1 + \coth^2 \psi}{2}. \quad (2.3.28)$$

Рис. 2.3.3 воспроизведен из нашей работы [Slunyaev, 2006\*]. Детали интерпретации бризеров как результата нелинейной суперпозиции солитона огибающей и фоновой плоской волны можно найти в нашей статье [Слюняев, 2005\*].

Прямая задача рассеяния для возмущения фоновой плоской волны, находящегося с ней в фазе или противофазе, совпадает с спектральной задачей для уравнения Гарднера на нулевом пьедестале, которая рассматривалась в деталях в [Grimshaw et al, 2010\*]. Случай рождения бризера в рамках уравнения Гарднера (два комплексно сопряженных собственных значения) в рамках НУШ в системе отсчета, связанной с групповой скоростью несущей, соответствует двум солитонам с скоростями, равными по абсолютной величине и противоположными по знаку. Этот факт позволяет проводить аналогии и понимать некоторые результаты динамики модуляций фоновой волны в НУШ (в частности, в [Gelash & Zakharov, 2014]) на качественном уровне.

Представленные здесь результаты позволяют проводить интерпретацию волн в терминах «обычных» квазилинейных волн, относящихся к сплошному спектру задачи рассеяния, долгоживущих нелинейных волновых групп – солитонов огибающей, а также иметь ясное качественное понимание о картине их взаимодействия – квази-бризерных решениях, с тем важным выводом, что парциальные амплитуды солитонов огибающей и подложки (а также и двух солитонов огибающей, см. [Слюняев, 2002]) во время взаимодействия складываются.

## 2.4 Применение МОЗР для выделения когерентных групп в записях, содержащих аномальные волны

Бризеры представляют собой нелинейную суперпозицию солитонов огибающей и фона (подложки). В силу интегрируемости модели, солитоны НУШ способны распространяться без потери энергии. В реальности в результате более сложных законов дисперсии и нелинейности, поперечных эффектов и эффектов диссипации нелинейные волновые пакеты со временем разрушаются, но, очевидно, они обладают большими временами жизни, чем группы линейных волн, и потому могут быть названы квазисолитонами. Времена жизни квазисолитонов огибающей волн на воде еще до конца не ясны; этот вопрос обсуждается в Разделе 3.2. Недавние исследования демонстрируют, что такие группы оказываются долгоживущими. Если бы солитон огибающей мог быть обнаружен задолго до возникновения интенсивной модуляции, то аномальная волна оказалась бы предсказанной. Для этого должна решаться ассоциированная задача рассеяния, представляющая собой нахождение собственных значений краевой задачи (2.3.23). Полученные собственные значения, соответствующие локализованным собственным функциям, составляют дискретный спектр и соответствуют солитонным волнам. Такой спектр сохраняется во времени, его интерпретация для различных граничных условий разобрана выше в Разделе 2.3.

Данный подход был нами реализован с целью определения параметров квазисолитонов (амплитуды и скорости) в натуральных записях с помощью численной процедуры и применен в работах [Дивинский и др., 2004<sup>\*</sup>; Slunyaev et al, 2005<sup>\*</sup>; Slunyaev, 2006<sup>\*</sup>] для 11 натуральных записей аномальных волн из Северного и Черного морей. Особенностью натуральных измерений является информация о волнах в виде временной последовательности измерений смещения поверхности, что не подходит для использования уравнения, эволюционного по времени. Потому используется пространственная версия НУШ для эволюции по координате, получаемая из НУШ (2.2.35) заменой

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{C_{gr}} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \dots, \quad (2.4.1)$$

где слагаемые высших порядков малости превышают точность теории. Тогда соотношения

$$\eta = \frac{\sqrt{2}}{k_0} \operatorname{Re}[q \exp(i\omega_0 t - ik_0 x)], \quad t' = \omega_0 t - 2k_0 x, \quad x' = k_0 x \quad (2.4.2)$$

связывают размерное смещение поверхности в точке измерения  $x = 0$  и безразмерную комплексную амплитуду  $q(x', t')$  и приводят к безразмерному уравнению

$$i \frac{\partial q}{\partial x'} + \frac{\partial^2 q}{\partial t'^2} + 2|q|^2 q = 0, \quad (2.4.3)$$

которое отличается от (2.3.1) только взаимной заменой переменных координаты и времени.

Как очевидно из (2.4.2), информации о смещении поверхности, вообще говоря, недостаточно для восстановления комплексной функции  $q(t')$ . Также проблема осложняется наличием связанных волн (кратных гармоник), которые не учтены в связи (2.4.2). Эти проблемы обсуждаются далее в Разделе 2.5. Отметим, что в наших работах [Дивинский и др., 2004\*; Slunyaev et al, 2005\*; Slunyaev, 2006\*] использовались различные подходы для реконструкции функции огибающей  $q(t')$  по известному смещению поверхности  $\eta(t)$ . Наиболее удачным было признано применение преобразования Гильберта для компоненты смещения, соответствующей свободным волнам, которая искалась с помощью итерационной процедуры с использованием формул реконструкции в предположении слабо нелинейных слабо модулированных волн.

Далее задача рассеяния решалась для короткой части записи – окна меньшей длительности, чем вся запись (обычно 20-минутная), но достаточной, чтобы заключать в себе квазисолитон. Отрезок записи дополнялся слева и справа нулями и решалась задача рассеяния  $\Psi_t = R\Psi$  (координата и время меняются в (2.3.23)) для нулевых граничных условий численно методом пристрелки. Для уравнения (2.4.3) солитонное решение имеет вид

$$q'_s(x, t) = A_s \frac{\exp\left(it'(2V_s)^{-1} - ix'\left((4V_s^2)^{-1} - A_s^2\right)\right)}{\cosh\left(\frac{A_s}{V_s}(x - V_s)t\right)}, \quad \text{где} \quad \lambda = \frac{A_s}{2} + i \frac{1}{4V_s}. \quad (2.4.4)$$

В этой постановке (НУШ для эволюции в пространстве (2.4.3)) более удобным параметром для описания скорости нелинейной группы является обратная скорость  $V_s^{-1}$ , которая для применимости теории должна быть мала по абсолютной величине. В размерных переменных амплитуда и скорость солитона равны соответственно,

$$A = \frac{\sqrt{2}}{k_0} A_s, \quad V = \frac{\omega_0}{k_0(2 + V_s^{-1})}, \quad (2.4.5)$$



(см. подробности в [Slunyaev, 2006\*]). Соответственно, в каждом выбранном участке записи по найденному дискретному собственному значению задачи рассеяния (которое соответствовало локализованным собственным функциям задачи рассеяния) определялась амплитуда и скорость солитона.

Представленный выше подход к интерпретации данных был применен к 11 инструментальным записям из Северного моря, содержащим anomalously высокие волны.

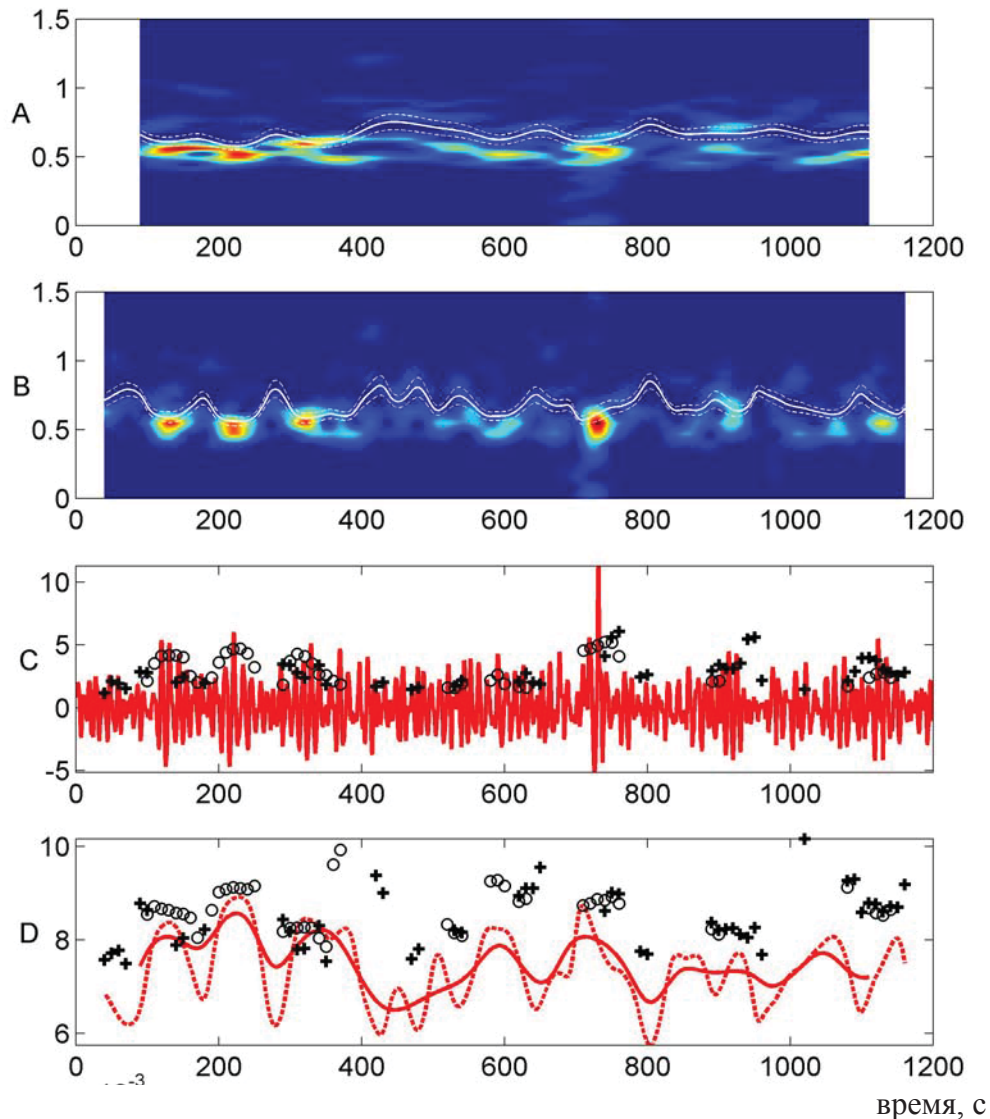


Рис. 2.4.1. Анализ записи NA9711180110. (A): текущий спектр Фурье для окна 117 с (около 10 периодов волн); сплошная линия – локальная частота  $\omega_0$ , пунктирные линии дают оценку спектральной ширины модуляционно неустойчивых волн  $\omega_0 \pm \omega_{BF}$ . (B): то же, что на (A), но для окна 36 с (3 периода волн). (C): измерение смещения поверхности (в метрах). Символами отмечены амплитуды выделенных солитонов для центральной частоты, определенной по всей записи (кружками) и для окна (кресты). (D): локальные групповые скорости (в м/с) по выборкам 117 с (сплошная линия) и 36 с (пунктир). Символами отмечены скорости выделенных солитонов для центральной частоты, определенной по всей записи (кружками) и для окна (кресты).

Одна из записей – «Новогодняя волна», записанная на платформе Draupner (см. Раздел 1.3), другие – записи с платформы North Alwyn (см. далее в Разделе 2.5), они на Рис. 2.4.1-2.4.3 имеют шифр вида «NA\_дата\_время». Результаты обработки двух инструментальных записей, содержащих anomalously высокие волны, приведены на Рис. 2.4.1 и Рис. 2.4.2. Сами 20-минутные записи смещения поверхности приведены на панелях (С). Панели (А) и (В) приводят результат оконного преобразования Фурье для двух длин окон, линиями показана центральная частота (определенная как математическое ожидание по моментальному спектру волновых чисел) и интервал модуляционно неустойчивых частот, определенный по оценке для плоской волны  $\omega_0 - \omega_{BF} < \omega < \omega_0 + \omega_{BF}$ . Скорости волн для разной длины окна

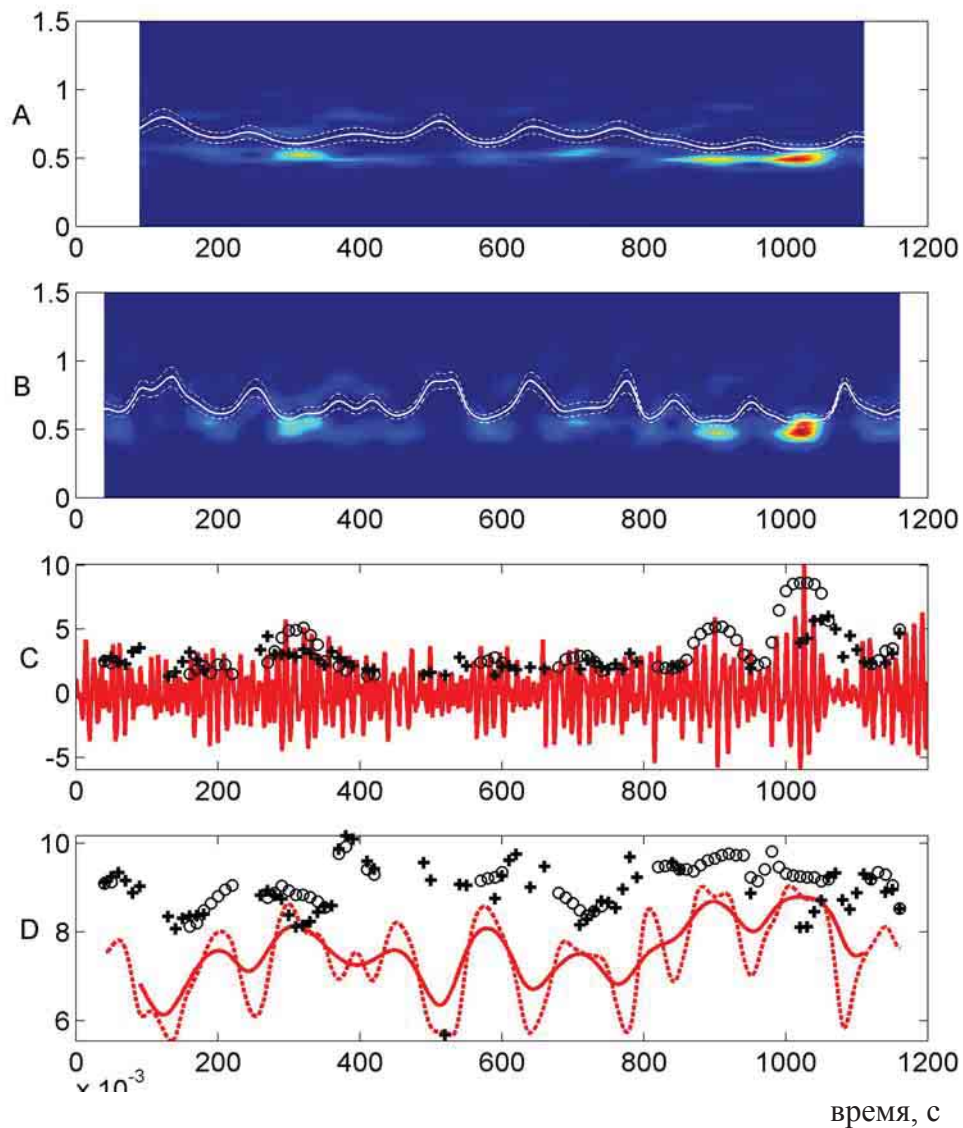


Рис. 2.4.2. Анализ записи NA9711192011. См. расшифровки к Рис. 2.4.1.

усреднения определены для дисперсионной зависимости волн на глубокой воде и построены разными линиями на панелях (D). Видно, что оценка параметров волн допускает возникновение модуляционной неустойчивости, однако это очень грубая оценка, использующая среднюю амплитуду и среднюю частоту волн в выборке.

Результат численного решения спектральной задачи, выраженный в определении амплитуд и скоростей солитонов построен значками на панелях (C) и (D) для двух вариантов задания частоты и волнового числа несущей: по всей 20-минутной записи (кружки) и по текущему окну (кресты). Видно (панель (C)), что амплитуды выделенных солитонов довольно хорошо отслеживают интенсивные группы. Определенная амплитуда солитона максимальна, когда он целиком попадает в окно. Когда в окно попадает только часть солитона, определяется меньшая величина амплитуды. Потому значения амплитуды солитона в скользящем окне сначала растут, а потом убывают (особенно хорошо такие «дуги» значений видны для кружков на Рис. 2.4.1 и Рис. 2.4.2). Если в нескольких соседних окнах определяется одинаковая амплитуда солитона, это говорит о том, что он попадает целиком во все эти выборки, и определенная величина соответствует искомой амплитуде солитона. По максимуму амплитуды в последовательности окон выборки можно определять пространственную локализацию солитона огибающей. По значениям скоростей солитонов на панелях (D) выходит, что солитоноподобные группы движутся быстрее, чем линейные

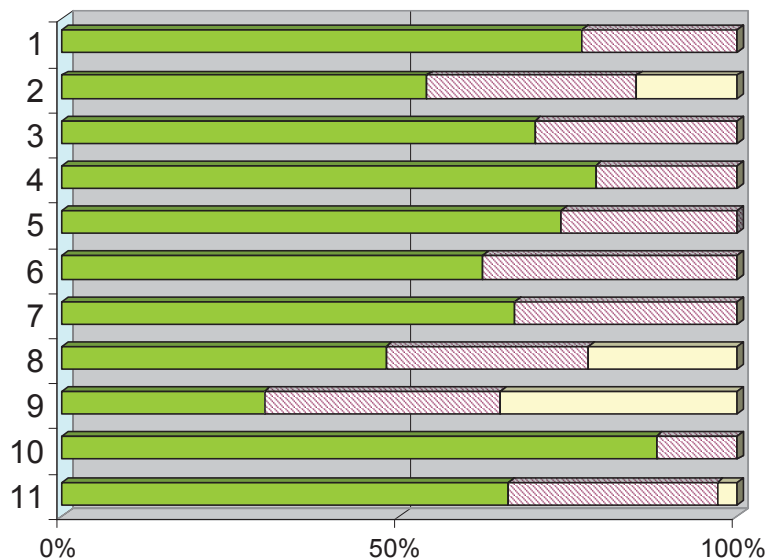
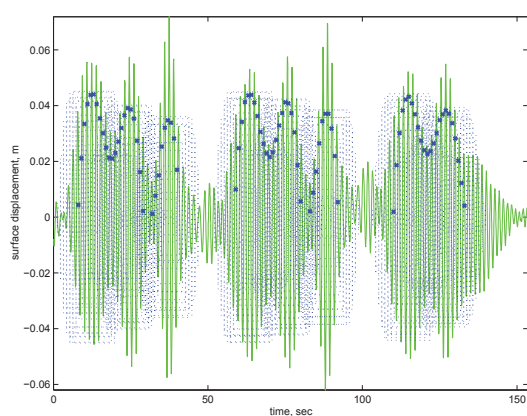


Рис.2.4.3. Доли в амплитуде измеренной «волны-убийцы»: солитонная часть  $A_s$  (сплошным зеленым) и оценка фонового волнения  $H_s/2$  (штриховка) для записей NA9711161053, NA9711180110, NA9711190751, NA9711191831, NA9711192011, NA9711192351, NA9711200131, NA9711200151, NA9711200311, NA9711200731, а также «Новогодней волны»

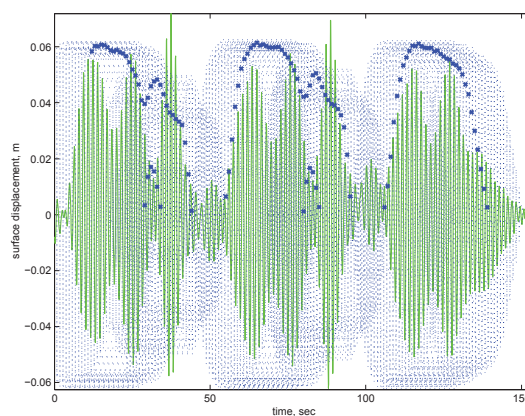
волны. В реальности запись волн в одной точке не может свидетельствовать о скорости групп. Увеличение значений скоростей солитонов означает наличие частотного сдвига у этих групп относительно средней частоты – некоторое уменьшение локальной частоты.

Из результатов на Рис. 2.4.1 и Рис. 2.4.2 следует, что солитоны огибающей в записях хорошо разнесены. Основываясь на анализе взаимодействия солитонов огибающей и фонового волнения, оценим вклад солитонов в наблюдаемую высоту волн, предполагая линейное сложение амплитуды солитона и характерной амплитуды фона, оцененной как половина значительной высоты. Результат такого сравнения для 11 записей из Северного моря, содержащих аномально высокие волны, приведен на Рис. 2.4.3. Из него следует, что интенсивный солитон огибающей обнаружен для всех случаев регистрации «волн-убийц». В 7 из 11 случаев линейной суперпозиции амплитуды солитона и фоновых волн оказывается достаточно для объяснения измеренной амплитуды волн.

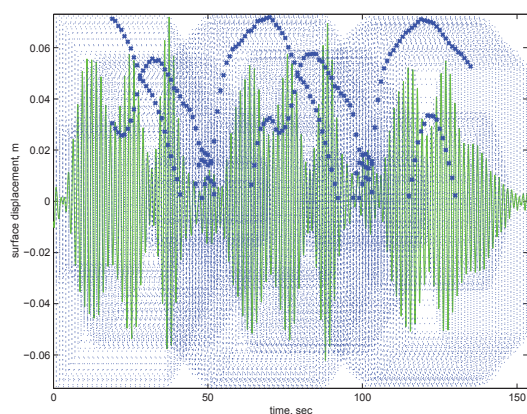
Из результатов выделения солитонов, приведенных на панелях (C), (D) Рис. 2.4.1,



(a)



(б)



(в)

Рис. 2.4.4. Пример выделения солитонов в лабораторной записи волн (запись с шифром elev171\_4 на 6 датчике, использовавшаяся в экспериментах [Shemer & Sergeeva, 2009]) для разных длин окон. Запись смещения дана зеленым, голубые прямоугольники – окна выборок, синие кресты – определенные амплитуды солитонов. Несущая частота определялась по всей записи.

2.4.2, видно существенное различие между результатами, когда основная частота выделялась по всей записи, либо в более коротком окне. Очевидно, что текущая частота может варьироваться внутри записи, но ее определение с хорошей точностью требует большого числа волн. Параметр порядка для НУШ, определяющий характеристики солитонов, сильно зависит от выбора частоты несущей (или волнового числа), для которой записывается НУШ, и, как показал опыт применения описываемого подхода, сильно влияет на результат обработки и интерпретацию. Эта особенность не возникает для случая мелкой воды, описываемого уравнением Кортевега – де Вриза.

Другая трудность возникает при попытке интерпретировать записи лабораторных измерений интенсивных волновых групп, когда солитоны расположены близко друг к другу. В результате их нелинейного взаимодействия, заложенного в ассоциированную задачу рассеяния для уравнения НУШ, возникают эффекты, аналогичные с расщеплением уровней энергии в задачах квантовой физики: при попадании в окно обработки частей двух соседних волновых групп определяемые собственные значения отличны от тех, что были бы определены для каждой из групп в отдельности (нами были рассмотрены модельные ситуации, которые вошли в дипломную работу студента [Старобор, 2009]). Поведение линий собственных значений в скользящем окне для временной записи в этом случае оказывается достаточно сложным для интерпретации. Для примера на Рис. 2.4.4 приведен результат выделения солитонов в лабораторных записях смещения поверхности для разного размера окна выборки. Волны представляют собой последовательность близко расположенных интенсивных групп, повторяющуюся трижды. Окно большого размера (Рис. 2.4.4в) целиком покрывает солитонные группы, но захватывает и соседние. В результате в окне может

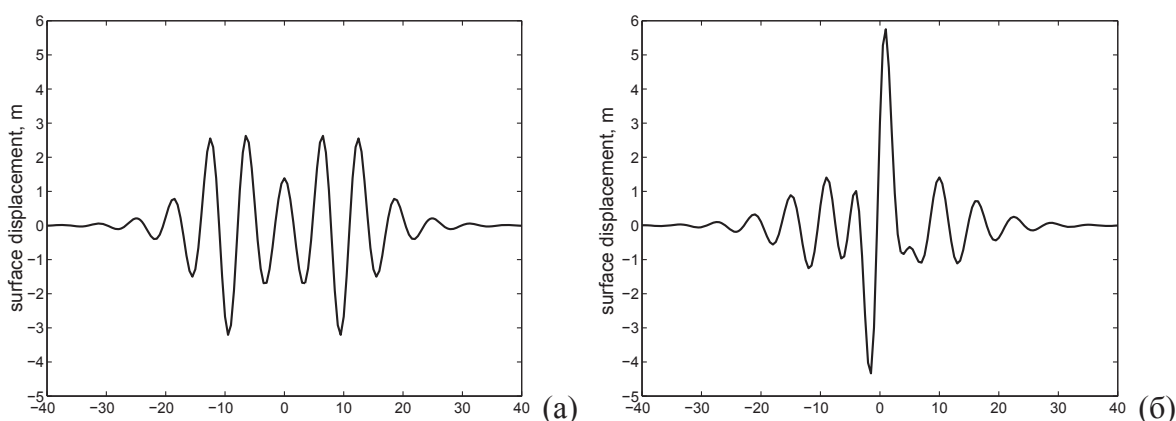


Рис. 2.4.5. Профили волн, использованные для анализа на Рис. 2.4.6: в начальный момент времени, когда волны имеют малую амплитуду (а), и в момент 25, когда волны выросли (б).

детектироваться более одного солитона, и близкие солитоны влияют на величину определяемых собственных значений ассоциированной задачи рассеяния. В случае слишком короткого окна близкие солитоны не влияют на решение, но и окно не захватывает солитон полностью, а потому его амплитуда занижается.

Несмотря на некоторые трудности машинной интерпретации данных на Рис. 2.4.4, рисунок демонстрирует другой пример успешного выделения солитонов. Следующий тест призван оценить надежность такого подхода и ставил целью разработку простейшего прототипа системы-анализатора потенциальной угрозы от «волны-убийцы», возникающей в результате самофокусирующей нелинейности. На вход анализатора поступает моментальный снимок одномерной поверхности (запись  $\eta(x)$ ), которая автоматически разбивается на набор более коротких записей оптимальной длины. Далее анализируются уровни дискретного спектра, которые затем интерпретируются как для задачи солитона на постоянном пьедестале (выбирается усредненный уровень пьедестала), как описано в Разделе 2.3. Таким образом, делается следующий шаг по усовершенствованию прогноза динамики нелинейных волн: от солитонов к бризерам.

С помощью анализатора рассмотрена динамика взаимодействия двух солитонов огибающей, помещенных в одну точку (т.н. би-солитон Перегринна, [Peregrine, 1983]) (для

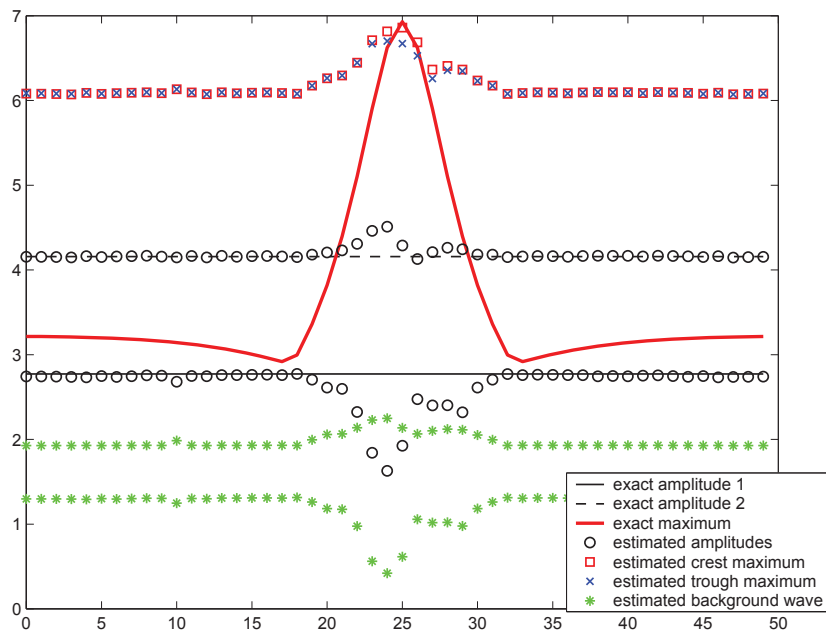


Рис. 2.4.6. Прогноз максимально высоких волн. По горизонтали – моменты времени, маркируемые порядковым номером моментального снимка поверхности. См. описание в тексте.

предела глубокой воды и несущей частоты  $\omega_0 = 1$  рад/с) с учетом связанных волн трех порядков для максимально реалистичной ситуации (т.е., наведенное течение, 2 и 3 гармоники, описываемые формулами реконструкции (2.5.4)-(2.5.5), что будут описаны позднее). Амплитуды солитонов отличаются в 1.5 раза. Этот случай является сложным с точки зрения определения несущей частоты без априорной информации, анализа спектральных данных для близко расположенных солитонов, а также очевидно отличие двух солитонов от бризера, которым аппроксимируется задача (см. подробнее в [Слюняев, 2008\*]).

Выбранное нами решение обеспечивает сильную изменчивость волнового поля, как показано на Рис. 2.4.5. Волновые реализации в различные моменты времени и являлись входными данными для программы. Из волн снова выделялась компонента свободных волн (без априорной информации о несущей частоте, с использованием процедуры реконструкции, описанной в Разделе 2.5), определялись солитоны огибающей, и оценивалась максимальная возможная высота волн на основе представлений о взаимодействии солитона огибающей с фоновым волнением, описанных в Разделе 2.3. Горизонтальные сплошная и пунктирная линии на Рис. 2.4.6 соответствуют известным заданным амплитудам солитонов, а кружками отмечены определенные программой значения. Сплошной жирной кривой построен максимум волнового поля (смещение от нулевого уровня) как функция времени; квадратами и крестами сверху построен прогноз возможных максимально высоких волн (гребней и впадин); звездочками построена оценка высоты фоновых волн.

Как следует из результатов, приведенных на Рис. 2.4.6, наш подход способен предсказывать появление высоких волн, хотя когда возникают большие волны, амплитуды солитонов определяются с большой погрешностью.

## **2.5 Реконструкция событий аномальных волн в рамках численного моделирования**

Хотя движение воды, связанное с распространением по поверхности гравитационных волн, представляет сложный согласованный процесс смещения двумерной поверхности и переноса частиц жидкости внутри трехмерной толщи, в абсолютном большинстве случаев измерения поверхностных волн сводятся к периодической регистрации смещения поверхности в одной точке пространства. В настоящее время частота измерений смещения морской поверхности может быть достаточно высокой для хорошего описания профиля волны, но прямая информация о движениях под поверхностью отсутствует. Полная информация о волнах может быть использована для реконструкции событий «волн-убийц» в рамках численного моделирования, чему и посвящен настоящий раздел. Тем самым может

быть получена недостающая важная информация о динамике экстремальных волн, включая кинематические характеристики, время жизни.

В рамках определенных (упрощающих) предположений связь между смещением поверхности и потенциалом скорости на поверхности известна из теории. Первое допущение связано с предположением об узости углового спектра волн, т.е., что через измеряющий датчик проходит волна с почти плоским фронтом. Для привлечения описания, развитого в Разделе 2.2, требуется предположить малость нелинейности и дисперсии. Конечно, в наиболее интересном случае очень больших единичных волн эти предположения могут нарушаться. С другой стороны, учет асимптотических слагаемых высших порядков позволяет надеяться на более точное описание волн.

Видимо, первая реконструкция «волны-убийцы» была выполнена К. Трулсеном [Trulsen, 2001], рассмотревшим пространственную эволюцию т.н. "Новогодней волны" (New Year Wave), измеренной на платформе Draupner, в рамках обобщенного НУШ (улучшенной модели Диста [Dysthe, 1979; Trulsen & Dysthe, 1996; Trulsen et al, 2001; Trulsen, 2006]). Наш подход следует этой идее. Интересно отметить работу группы Г. Клаусса [Clauss & Klein, 2009] (см. также ссылки в источнике), где инструментально измеренные «волны-убийцы» воссоздавались в лабораторных условиях с использованием итерационной процедуры подгонки условия на волнопродукторе.

Для реконструкции пространственно-временной динамики инструментально измеренных аномально высоких волн нами использованы 10 записей событий в Северном море (20-минутные регистрации лазерным альтиметром с платформы North Alwyn ( $1^{\circ}44' E$   $60^{\circ}45' N$ , глубина 126 м, см. детали в наших работах [Slunyaev et al, 2005\*, 2011\*, 2014\*; Slunyaev, 2006\*]), 20-минутная запись "Новогодней волны" (лазерный альтиметр на платформе Draupner, Северное море, глубина около 70 м, см. детали в [Пелиновский и др., 2003\*; Pelinovsky et al, 2005\*]), 20-минутная запись, сделанная бумом в Черном море в районе г. Геленджика ( $44^{\circ}30'40 N$ ,  $37^{\circ}58'70 E$ , глубина 85 м, см. в [Дивинский и др., 2004\*]). Также были промоделированы 4 события на 10-минутных записях донными волнографами в прибрежных областях о-ва Тайвань; в этом случае важным был эффект переменной батиметрии, учтенный в рамках модифицированного НУШ для условий переменной глубины (см. детали в [Sergeeva et al, 2012\*, 2014\*]).

### **Модели огибающей, использованные для численного моделирования**

Простейшей моделью модулированных волн на поверхности воды является НУШ (2.2.35), интегрируемое методом МОЗР. Оно является очень грубой моделью и описывает динамику только на короткое время (несколько периодов), что недостаточно для нашей цели.



Нами будут использоваться обобщенные модели огибающей типа рассмотренных в Разделе 2.2, в частности, варианты модели Диста (см., например, обзор в [Trulsen, 2006]), которые учитывают слагаемые следующего порядка, наведенное течение, а также учитывают полное дисперсионное соотношение для глубоких волн  $\omega^2 = gk$

$$i \frac{\partial A}{\partial t} + \hat{L} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \right] A + \frac{\omega_0 k_0^2}{2} |A|^2 A + i \frac{3\omega_0 k_0}{2} |A|^2 \frac{\partial A}{\partial x} + i \frac{\omega_0 k_0}{4} A^2 \frac{\partial A^*}{\partial x} + k_0 A \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} = 0, \quad (2.5.1)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} = \frac{\omega_0}{2} \frac{\partial}{\partial x} |A|^2, \quad z = 0. \quad (2.5.2)$$

Здесь функция  $\bar{\phi}$  описывает наведенное крупномасштабное течение, которое должно удовлетворять уравнению Лапласа в области невозмущенной жидкости

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} = 0 \quad (2.5.3)$$

с соответствующими граничными условиями. Его значение на уровне невозмущенной поверхности  $\bar{\phi} = \bar{\phi}(z=0)$  входит в уравнение (2.5.1). Оператор  $\hat{L}$  в (2.5.1) действует в пространстве Фурье, обеспечивая выполнение линейного дисперсионного соотношения (см. [Trulsen & Dysthe, 1996]). Волновое число несущей и циклическая частота связаны дисперсионным соотношением  $\omega_0^2 = gk_0$ .

Как описывалось в Разделе 2.2, комплексная огибающая  $A(x, t)$  одновременно описывает и смещение поверхности, и потенциал скорости. Соответствующие формулы связи обычно называют формулами реконструкции; восстановление профиля смещения поверхности воды на произвольной постоянной глубине описывается формулой (2.2.52) со сложными коэффициентами. Описание потенциала скорости происходит через еще более громоздкие выражения. В предельном случае глубокой воды  $kh \rightarrow \infty$  формулы реконструкции значительно упрощаются, их можно использовать в случаях большой глубины  $kh \gg 1$ . Тогда смещение поверхности и потенциал задаются формулами

$$\eta(x, t) = \bar{\eta} + \eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \eta^{(3)}, \quad (2.5.4)$$

$$\bar{\eta} = \frac{1}{2\omega} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x},$$

$$\eta^{(1)} = \text{Re}(AE), \quad \eta^{(2)} = \frac{k_0}{2} \text{Re}(A^2 E^2), \quad \eta^{(3)} = -\frac{1}{2} \text{Im} \left( A \frac{\partial A}{\partial x} E^2 \right) + \frac{3k_0^2}{8} \text{Re}(A^3 E^3),$$

$$\phi(x, z, t) = \bar{\phi} + \phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \phi^{(3)}, \quad (2.5.5)$$

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)} &= -\frac{\omega_0}{k_0} \operatorname{Im}(AE)e^{k_0 z}, \\ \varphi^{(2)} &= \frac{\omega_0}{2k_0^2} \operatorname{Re}\left[\frac{\partial A}{\partial x} E\right](1-2kz)e^{k_0 z}, \\ \varphi^{(3)} &= \frac{\omega_0 k_0}{8} \operatorname{Im}[A|A|^2 E]e^{k_0 z} + \frac{\omega_0}{8k_0^3} \operatorname{Im}\left[\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} E\right](3-4kz+4k^2 z^2)e^{k_0 z}, \\ E &\equiv \exp(i\omega_0 t - ik_0 x)\end{aligned}$$

в согласии с [Trulsen & 2006] и [Слюняев, 2005\*]. Учет индуцированного течения  $\bar{\varphi}(x, t, z)$  здесь выполнен в соответствии с подходом Диста ([Dysthe, 1979], см. Раздел. 2.2. Для его нахождения нужно решать уравнение Лапласа с соответствующими граничными условиями непротекания на дне и (2.5.2) на поверхности.

Для расчета эволюции волн в рамках граничной задачи (по заданным условиям в одной точке, в частности, для волнового лотка), асимптотические уравнения для огибающей исключительно удобны. Поскольку в первом приближении эволюционное уравнение представляет собой уравнение переноса

$$\frac{\partial A}{\partial t} + C_{gr} \frac{\partial A}{\partial x} = \dots, \quad (2.5.6)$$

( $C_{gr}$  – групповая скорость), где правая часть мала в сравнении с левой, то производные по координате в (2.5.1), (2.5.2) могут быть выражены через производные по времени и члены более высоких порядков малости. Тогда уравнения, описывающие начальную задачу ( $t$ -эволюция) могут быть сведены к уравнениям для граничной задачи ( $x$ -эволюция).

Так, пространственная форма уравнений Диста (для описания  $x$ -эволюции) имеет вид

$$i\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{C_{gr}} \frac{\partial A}{\partial t}\right) + \frac{k_0}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + k_0^3 |A|^2 A - 8i \frac{k_0^3}{\omega_0} |A|^2 \frac{\partial A}{\partial t} - 2i \frac{k_0^3}{\omega_0} A^2 \frac{\partial A^*}{\partial t} - \frac{4k_0^3}{\omega_0^2} A \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} = 0. \quad (2.5.7)$$

$$\frac{1}{C_{gr}^2} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} = 0, \quad z \leq \eta, \quad (2.5.8)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} = -\frac{\omega_0}{2C_{gr}} \frac{\partial}{\partial t} |A|^2, \quad z = 0. \quad (2.5.9)$$

Здесь (2.5.8) – преобразованное уравнение Лапласа с граничным условием (2.5.9) на поверхности. В отличие от (2.5.1) пространственная форма содержит единственное слагаемое линейной дисперсии, которое записано в физическом пространстве явно и точно описывает закон дисперсии на глубокой воде.

Соответствующие формулы реконструкции тоже должны быть изменены (вместо (2.5.4) и (2.5.5)) на следующие:

$$\eta(x, t) = \bar{\eta} + \eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \eta^{(3)}, \quad (2.5.10)$$

$$\bar{\eta} = -\frac{1}{2\omega C_{gr}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t},$$

$$\eta^{(1)} = \text{Re}(AE), \quad \eta^{(2)} = \frac{k_0}{2} \text{Re}(A^2 E^2), \quad \eta^{(3)} = \frac{1}{2C_{gr}} \text{Im}\left(A \frac{\partial A}{\partial t} E^2\right) + \frac{3k_0^2}{8} \text{Re}(A^3 E^3),$$

$$\varphi(x, z, t) = \bar{\varphi} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \varphi^{(3)} \quad (2.5.11)$$

$$\varphi^{(1)} = -\frac{\omega_0}{k_0} \text{Im}(AE)e^{k_0 z}, \quad \varphi^{(2)} = -\frac{1}{k_0} \text{Re}\left[\frac{\partial A}{\partial t} E\right](1 - 2k_0 z)e^{k_0 z},$$

$$\varphi^{(3)} = -\omega_0 k_0 \text{Im}\left[A|A|^2 E\right]\left(\frac{3}{8} - k_0 z\right)e^{k_0 z} + \frac{1}{\omega_0 k_0} \text{Im}\left[\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} E\right](1 - kz + 2k_0^2 z^2)e^{k_0 z}.$$

Уравнения Диста (эволюционные по времени и координате) решались с применением квазиспектральной схемы, интегрирование по времени выполнялось либо с помощью метода Рунге-Кутты 4 порядка, либо с применением метода сплит-степ-Фурье. Краткое описание программной оболочки приведено в Приложении Б.

### Восстановление поля скоростей

В абсолютном большинстве случаев измерение морских волн ограничивается последовательной регистрацией смещения поверхности в одной точке. Вообще говоря, этой информации недостаточно для определения полей скоростей в толще воды, задача восстановления потенциала скорости не однозначна. С другой стороны, для волн в открытом море естественным является предположение о том, что локально волновое движение в точке измерения обуславливается распространением волны, двигающейся в одном направлении и имеющей плоский фронт. Для небольших по длительности записей можно считать, что направление движения регистрируемых волн – одно и то же. Иначе говоря, используется предположение об узости углового спектра волн на масштабе длины записи.

Простейший подход, позволяющий восстановить аналитический сигнал лишь по одной известной его половине (действительной части), – преобразование Гильберта. Если действительная функция описывается комплексно сопряженными половинами Фурье для положительных и отрицательных волновых чисел, то преобразование Гильберта обнуляет одну из этих половин (и удваивает амплитуды оставшейся для сохранения энергии сигнала). Нами были рассмотрены следующие используемые подходы (см. [Veltcheva et al, 2003, 2007; Cherneva & Soares, 2008; Petrova et al, 2011]):

- с учетом комбинационных гармоник второго порядка;
- в рамках теории слабо нелинейных слабо модулированных Стоксовых волн 2-го и 3-го порядков;
- преобразование Кримера (Cremer transform).
- Учет комбинационных гармоник второго порядка.

В этом подходе каждая пара гармоник свободных волн создает вынужденную комбинационную гармонику второго порядка малости по нелинейности, перебираются все возможные комбинации волн,

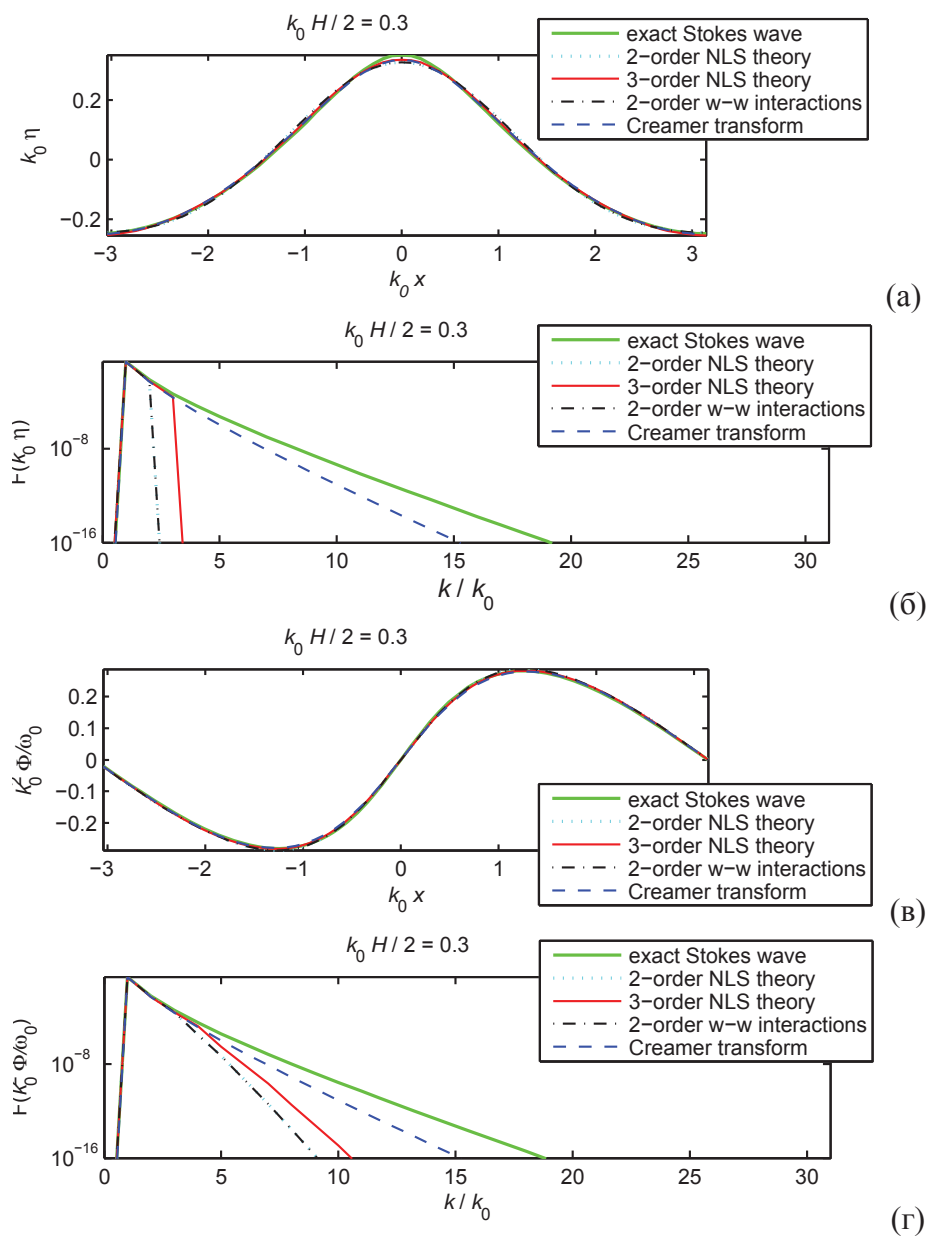


Рис. 2.5.1 Тест реконструкции интенсивной волны Стокса (крутизна  $k_0 H / 2 = 0.3$ ): профиль волны и спектр Фурье (а, б), а также поверхностный потенциал и его спектр Фурье (в, г).

$$\eta = \sum_{j=1}^2 a_j \cos \theta_j + \sum_{j=1}^2 a_j^2 M_j^{[0]} + \sum_{j=1}^2 a_j^2 M_j^{[2]} \cos 2\theta_j + a_1 a_2 M_p \cos(\theta_1 + \theta_2) + a_1 a_2 M_m \cos(\theta_1 - \theta_2), \quad (2.5.12)$$

$$\varphi = \sum_{j=1}^2 a_j N_j^{[1]} e^{k_j z} \sin \theta_j + \sum_{j=1}^2 a_j^2 N_j^{[2]} e^{2k_j z} \sin 2\theta_j + a_1 a_2 N_p e^{|k_1+k_2|z} \sin(\theta_1 + \theta_2) + a_1 a_2 N_m e^{|k_1-k_2|z} \sin(\theta_1 - \theta_2). \quad (2.5.13)$$

Здесь  $a_j$  – амплитуды гармоник свободных волн,  $\theta_j = \omega_j t - k_j x + \theta_j^{(0)}$  – соответствующие фазы с константами  $\theta_j^{(0)}$ . Для смещения поверхности и скорости каждой гармоники предполагается выполнение соотношения для линейных волн с учетом дисперсионного соотношения. Коэффициенты  $M$  и  $N$  определяются через парциальные волновые числа, они выведены в работе [Dalzell, 1999].

Этот подход предполагает нелинейность малой, но не требует узости спектра. Хотя

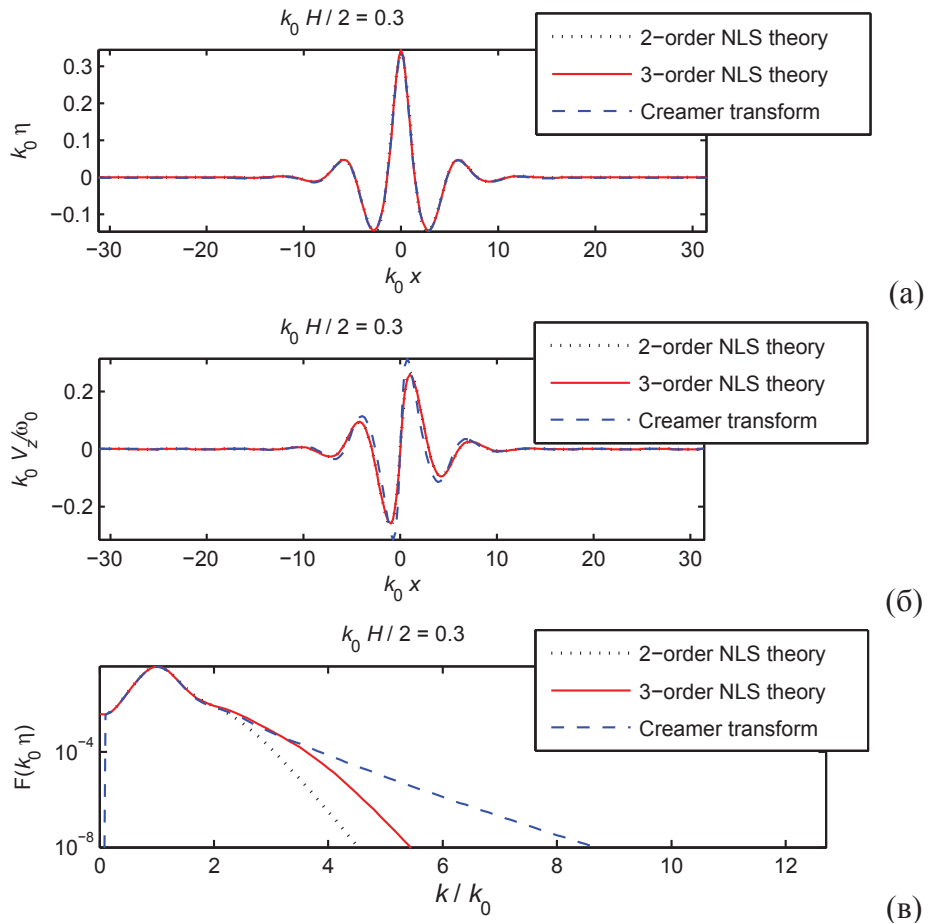


Рис. 2.5.2. Тест реконструкции интенсивной волновой группы (солитона огибающей с крутизной  $k_0 H / 2 = 0.3$ ): профиль волны (а), вертикальная скорость жидкости на поверхности (б), спектр Фурье смещения поверхности (в).

применение процедур (2.5.12), (2.5.13), связывающих амплитуду свободной волны с полями смещения и скорости, не вызывает принципиальной сложности, их численная реализация работает медленно. В рассмотренных случаях этот подход не продемонстрировал существенного преимущества, потому в последующих исследованиях предпочтение было отдано 2-м другим подходам.

● Учет связанных волн 2 и 3 порядка в приближении узкого спектра.

Связанные волны, возникающие в результате нерезонансных взаимодействий 2 и 3 порядков, описываются асимптотической теорией для слабо нелинейных слабо модулированных волн, приведенной в Разделе 2.2. В пределе глубокой воды выражения для связанных волн представлены формулами (2.5.4), (2.5.5) и (2.5.10), (2.5.11) (теория Диста). Этот подход требует малости крутизны волн и узости спектра. Однако, сравнение численного решения уравнений Диста и полных уравнений гидродинамики, проведенное в

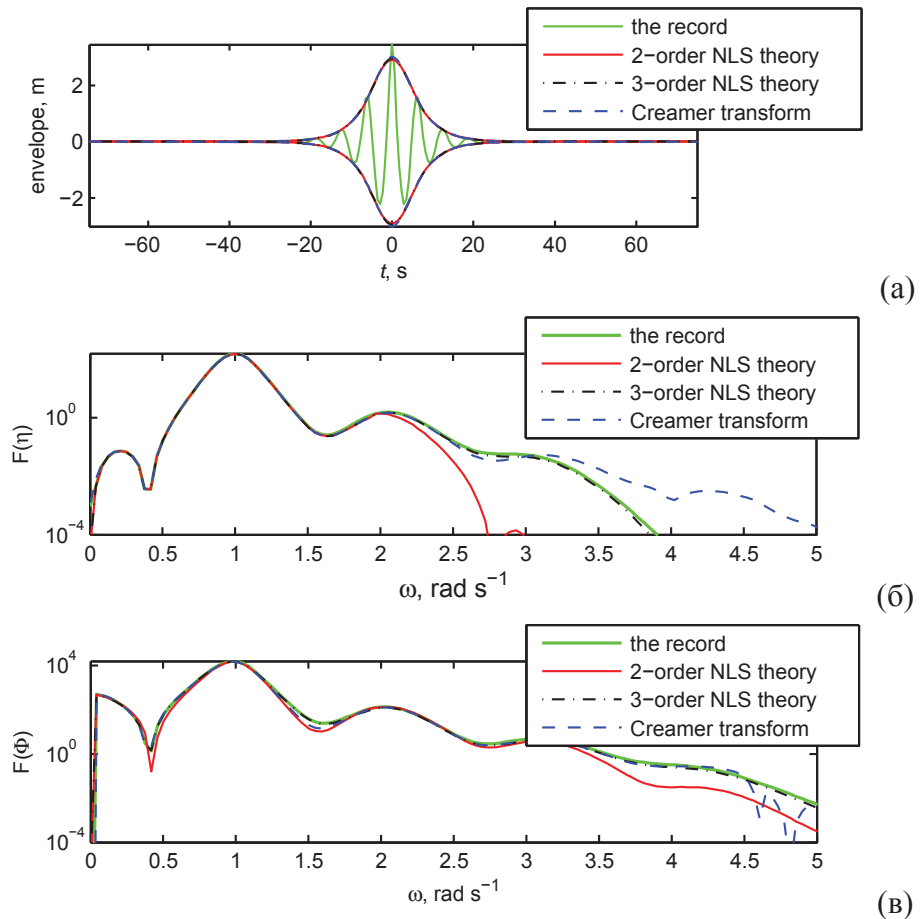


Рис. 2.5.3. Тест процедуры реконструкции для временной записи. Входные данные: солитон огибающей НУШ (пиковая частота 1 рад/с, крутизна  $k_0H/2 = 0.3$ , с учетом связанных волн трех порядков). (а): временная запись и реконструированные огибающие. (б) и (в): спектры Фурье в полулогарифмических координатах для смещения поверхности и поверхностного потенциала.

работе [Слюняев, 2009\*], показало, что локализованные волновые группы хорошо описываются моделью огибающей вплоть до крутых волн (с крутизной порядка  $k_0H/2 = 0.2$ , где  $H$  – максимальная высота волн) и для коротких групп (содержащих всего несколько волн). Сильной стороной подхода является учет дисперсии волн. Группы представляются нелинейной суперпозицией волн Стокса, учитывается неоднородность волн, входящих в группу.

Формулы реконструкции (2.5.4), (2.5.5) действительны для пространственных записей, формулы (2.5.10), (2.5.11) – для временных записей. Для нахождения наведенного течения  $\bar{\varphi}$  требуется решать соответствующее уравнение Лапласа (2.5.3) или (2.5.8) с граничными условиями на поверхности (2.5.2) или (2.5.9). Второй или третий порядок теории возмущений определяется учетом слагаемых с верхним индексом соответственно до <sup>(2)</sup> или до <sup>(3)</sup> включительно.

#### ● Преобразование Кримера.

В работе [Creamer et al, 2989] было предложено преобразование, дополняющее компоненту свободной волны связанными волнами в согласии с гамильтоновским представлением. Оно описывает волну Стокса с точностью до 4-го порядка по нелинейности. Таким образом, это преобразование еще более высокого порядка, чем рассмотренное в предыдущем пункте теория третьего порядка, но преобразование не учитывает дисперсию волн (предполагается однородная последовательность волн). Преобразование может быть записано для комплексных амплитуд Фурье смещения поверхности и поверхностного потенциала в следующем виде (см. пример применения преобразования в [Taylor et al, 1999])

$$\eta_k = \frac{1}{|k|} \int e^{-ikx} (e^{ik\eta_H} - 1) dx, \quad \Phi_k = \frac{1}{|k|} \int e^{ik(\eta_H - x)} \frac{\partial \Phi_H}{\partial x} dx \quad (2.5.14)$$

где для заданной комплексной огибающей  $A(x)$  величины  $\eta_H$  и  $\Phi_H$  определены соотношениями

$$\eta_H = -\text{Im}(AE), \quad \Phi_H = -\hat{F}_x^{-1} \left\{ \left| \frac{\omega}{k} \right| \hat{F}_x \{ \text{Re}(AE) \} \right\}, \quad \frac{\partial \Phi_H}{\partial x} = -\hat{F}_x^{-1} \left\{ i \text{sgn}(k) \sqrt{g|k|} \hat{F}_x \{ \text{Re}(AE) \} \right\} \quad (2.5.15)$$

(ср. с выражениями для  $\eta^{(1)}$  и  $\varphi^{(1)}$  (2.5.4) и (2.5.5)). Здесь частота  $\omega$  определена в согласии с дисперсионным соотношением на глубокой воде  $\omega^2 = gk$ , а оператор  $\hat{F}_x \{ \dots \}$  означает преобразование Фурье по координате  $x$ . Смещение поверхности и поверхностный потенциал находятся по  $\eta_k$  и  $\Phi_k$  после обратного преобразования Фурье,  $\eta = \hat{F}_x^{-1} \{ \eta_k \}$ ,  $\Phi = \hat{F}_x^{-1} \{ \Phi_k \}$ .

Исходно преобразование Кримера сформулировано для пространственных записей. Чтобы применить это преобразование к временным записям, нами предложен следующий

подход. Огибающая сперва пересчитывается из временного домена на пространственно-временной,  $A(x, t)$ , в рамках линейной теории с учетом закона дисперсии на бесконечно

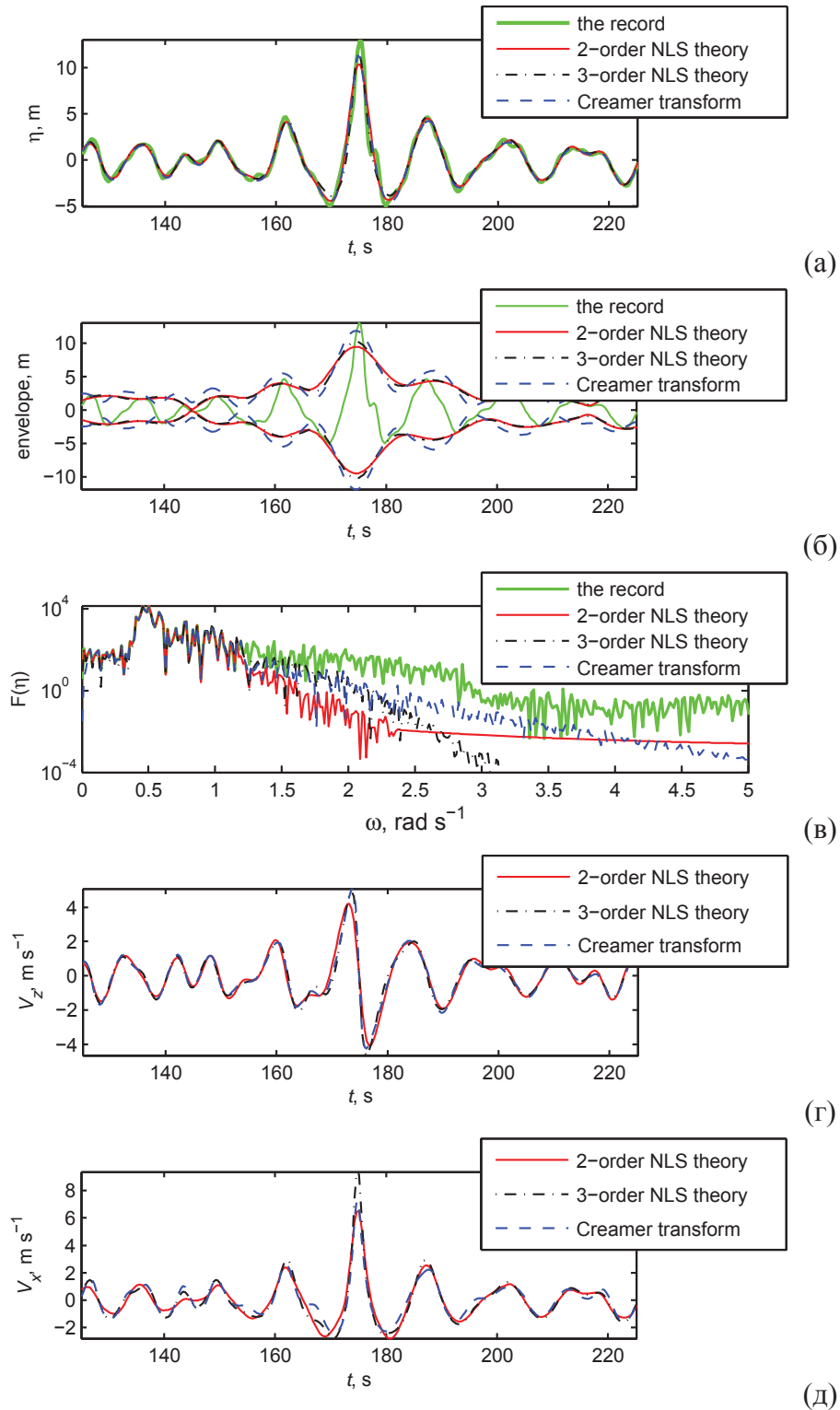


Рис. 2.5.4. Применение процедур реконструкции к временной записи NA199711200151 (с платформы North Alwyn), содержащей anomalously высокую волну: исходное и реконструированное смещение поверхности (а), огибающие (б), спектр Фурье для смещения поверхности (в), вертикальная (г) и вертикальная (д) скорости жидкости на поверхности.



глубокой воде,

$$A(x,t)E(x,t) = \hat{F}_t^{-1} \left\{ \hat{F}_t \{A(t)E(t)\} \exp \left( -i\omega \frac{|\omega|}{g} x \right) \right\}. \quad (2.5.16)$$

Затем преобразование Кримера (2.5.14)-(2.5.15) применяется к каждой пространственной записи  $A_H(x, t_j)$  для всех  $t_j$  (на этом этапе для селекции волн в окрестности  $x = 0$  в интегралах (2.5.14) применяется маска Ханнинга (Hanning mask) с центром в точке регистрации  $x = 0$ ). В итоге получают требуемые записи  $\eta(x = 0, t)$  и  $\Phi(x = 0, t)$ .

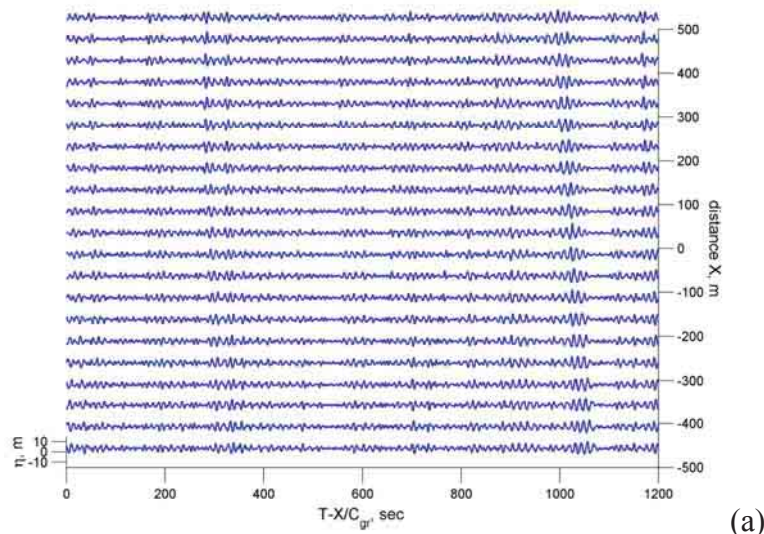
Рис. 2.5.1, 2.5.2, 2.5.3, 2.5.4 содержат примеры применения разных подходов для реконструкции волновых полей в пространственных (Рис. 2.5.1-2.5.2) и временных (Рис. 2.5.3-2.5.4) записях. На Рис. 2.5.1 – пример интенсивной периодической волны Стокса ( $k_0H/2 = 0.3$ , где  $H$  – высота): смещение поверхности, поверхностный потенциал и их спектры Фурье. Сплошная зеленая линия – "точная" Стоксова волна (найденная численно с высокой точностью в рамках уравнений Эйлера в конформных переменных). Кривые для двух подходов второго порядка (комбинационные гармоники и теория НУШ) здесь совпадают. Также из Рис. 2.5.1б,г следует, что подход Кримера качественно лучше описывает спектральные хвосты интенсивных волн (они медленнее спадают), хотя отличается от точного решения.

На Рис. 2.5.2 приведено сравнение подходов для случая нелинейной волновой группы, взятой в виде точного решения НУШ – солитона огибающей. Отметим, что хотя разница в профилях смещения поверхности для разных подходов не видна глазом (Рис. 2.5.2а), различия между вертикальными скоростями на поверхности (Рис. 2.5.2б) и спектральными хвостами (Рис. 2.5.2в) хорошо видны.

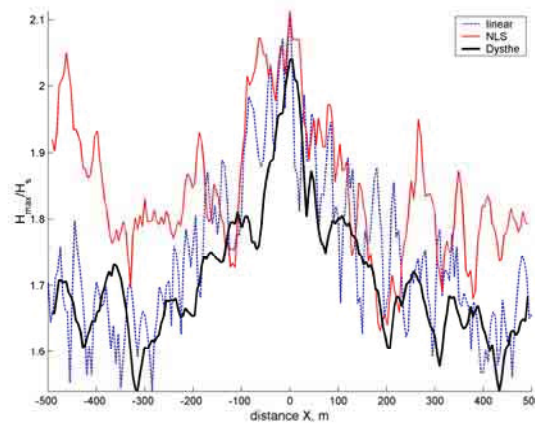
На приведенных примерах формулы реконструкции были применены для случаев, когда поправки из-за связанных волн вычислялись на основе известной огибающей. Для интерпретации данных измерений требуется решать обратную задачу выделения функции огибающей по данному профилю смещения поверхности. В этом случае (для лабораторных и натуральных измерений) наиболее типичными являются временные последовательности. На примерах на Рис. 2.5.3, 2.5.4 применены процедуры реконструкции для временных последовательностей, а не для пространственных записей (как было на Рис. 2.5.1-2.5.2).

На Рис. 2.5.3 тестировался тот же солитон НУШ, что и на Рис. 2.5.2, только сейчас исходная информация представлена только временной записью смещения поверхности с учетом связанных волн трех порядков в рамках теории НУШ (сплошная зеленая линия). Далее применена численная итерационная процедура поиска комплексной огибающей, минимизирующей среднеквадратичное отклонение восстановленного профиля поверхности

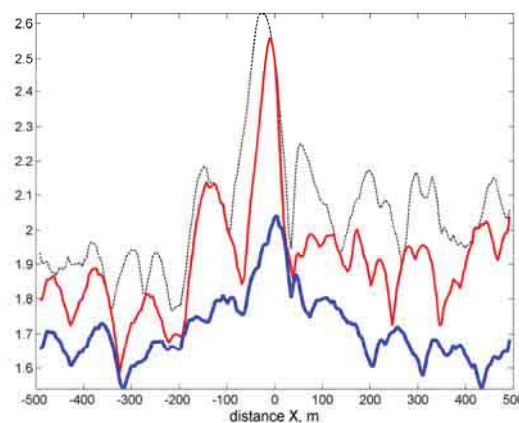
(согласно используемому подходу для огибающей) от данного профиля. Для огибающей применялся частотный фильтр, так что она задавалась в интервале  $(-\omega_0, +\omega_0)$ , где частота несущей  $\omega_0$  также итерационно подправлялась.



(a)



(б)



(в)

Рис. 2.5.5. Пространственно-временная эволюция волн в сопровождающей системе координат, рассчитанная по регистрации NA9711192011 в рамках уравнений Диста (а); индекс превышения AI как функция координаты, рассчитанный в рамках уравнений Диста, НУШ и линейной теории (б); и отношения  $H_{max}/H_s$  (толстая синяя линия),  $2 A_{max}/H_s$  (тонкая красная линия) и  $2 A_{env}/H_s$  (пунктир), определенные в рамках моделирования уравнения Диста (в).

Отличие между исходным и восстановленным профилем волн практически незаметно, наибольшее отличие можно увидеть в области максимального гребня (не показано). Отличия между выделенными огибающими чуть более заметны, они сконцентрированы вблизи максимума группы (действительные части огибающих построены на Рис. 2.5.3а). Амплитуды огибающих увеличиваются, соответственно, для моделей 2-го и 3-го порядков НУШ и преобразования Кримера. Такой результат связан с возможностью теорий высокого порядка лучше описывать крутые волны. Естественно, что теория НУШ третьего порядка обеспечивает наилучшее описание исходной волны (см. Рис. 2.5.3б, в). Использование преобразования Кримера приводит к более длинному спектральному хвосту, а теория НУШ 2-го порядка сильно недооценивает энергию в хвосте спектра.

Наконец, пример применения подходов к реальной инструментальной записи приведен на Рис. 2.5.4 для волны NA199711200151, одной из 10-ти записей с платформы North Alwyn, использованных в этом Разделе. Эти записи содержат аномальные волны, представляющие либо интенсивные волновые группы, либо единичные волны (см. рисунки ниже). Высоты гребней волн лежат в интервале от 8.7 до 13.2 м, средняя длина волн оценивается как 140 – 180 м. Максимальные волны сильно нелинейные, для них пиковая крутизна  $k_0 A_{cr}$  близка к пределу обрушения. Каждая из записей представлена 20-минутной последовательностью смещения поверхности с хорошим разрешением (5 Гц). Детали измерений можно найти в наших работах [Slunyaev et al, 2005\* ; 2014\*].

Отрезок записи NA199711200151 в окрестности аномально высокой волны представлен на Рис. 2.5.4а, б (сплошная зеленая линия). Максимальная волна высотой 18.2 м, высотой гребня 13.2 м и фактором превышения  $H_{max}/H_s = 2.31$ . Средний период волн в записи примерно 10 с.

Найденные функции огибающей (их абсолютные значения  $\pm|A(t)|$ ) построены на Рис.2.5.4б. Восстановленные профили смещения построены разными линиями на Рис. 2.5.4а и соответствующие спектры Фурье – на Рис. 2.5.4в. Хотя огибающие для 2-го и 3-го порядков теории НУШ выглядят очень схожими, заметны различия для смещения поверхности (Рис. 2.5.4а) и полей скорости (Рис. 2.5.4г, д). Разные подходы к выделению огибающей могут приводить к существенным отличиям, как видно из Рис. 2.5.4б, горизонтальные скорости также могут сильно отличаться (Рис. 2.5.4д). Все подходы воссоздают спектры Фурье, которые спадают значительно быстрее, чем в исходной инструментальной записи (Рис. 2.5.4в), и недооценивают максимальный гребень волны (Рис. 2.5.4а).

В соответствии с полученными результатами, далее для выделения огибающей и восстановления потенциала скорости используется теория НУШ третьего порядка, описываемая формулами реконструкции (2.5.10), (2.5.11).

### Реконструкция «волн-убийц»

Вышеописанные процедуры восстановления поля скорости в точке измерения помогают дополнить картину волновых характеристик в точке измерения, однако для полного представления о движении волн (расчет динамического давления, поведение волн в окрестности точки измерения, время жизни «волны-убийцы») необходимо использовать динамическую модель. В этой части диссертации мы используем численное решение уравнений эволюции волн для воспроизведения динамики волн в окрестности точки измерения. Численное моделирование выполняется по движению и против движения волн в предположении их однонаправленности.

Для расчета эволюции волн используются, в первую очередь, уравнения, описывающие эволюцию в пространстве. Для случая глубокой воды – это модель Диста (2.5.7)-(2.5.9). Она применена для моделирования 10 записей, сделанных в Северном море с платформы North Alwyn [Slunyaev et al, 2005<sup>\*</sup>; Slunyaev, 2006<sup>\*</sup>] и для «Новогодней волны», зарегистрированной с платформы Draupner [Куркин и др., 2005<sup>\*</sup>; Pelinovsky et al, 2005<sup>\*</sup>]. Одна аномальная запись, сделанная в Черном море с существенно худшим разрешением, была промоделирована в нашей работе [Дивинский и др., 2004<sup>\*</sup>] в рамках более грубого приближения – пространственной версии нелинейного уравнения Шредингера для глубокой

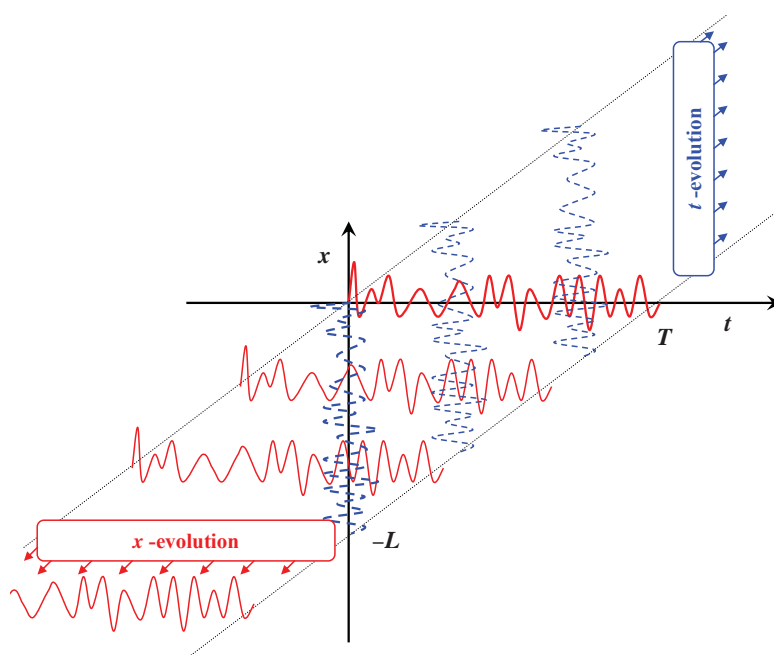


Рис. 2.5.6. Иллюстрация подхода для верификации реконструкции событий «волн-убийц». Пунктиром построены пространственные записи, сплошной линией – временные записи.

воды (когда в (2.5.7) оставлены только классические для НУШ слагаемые нелинейности дисперсии). Четыре записи, сделанные у берегов острова Тайвань, были промоделированы в рамках НУШ с учетом эффектов переменного дна в статье [Sergeeva et al, 2014\*] с акцентом на особенности «волн-убийц» в условиях выхода с глубокой воды на мелкую (в диссертации мы не приводим эти уравнения). Перечисленные инструментальные регистрации аномально высоких волн были предоставлены нам для анализа К. Соарешем (C. Guedes Soares).

Пример расчета пространственно-временной эволюции волн дан на Рис. 2.5.5. Расчет выполнен в рамках уравнений Диста и представлен в сопровождающей (с линейной скоростью несущей) системе координат. На Рис. 2.5.5а видна эволюция волновых групп, проявляющаяся в деформации и медленном сдвиге положения групп. Зависимость от координаты (точка измерения соответствует  $x = 0$ ) фактора превышения значительной высоты  $AI$  для различных способов расчета эволюции волн показана на Рис. 2.5.5б. Можно отметить схожее поведение максимумов смещения поверхности вблизи точки регистрации, что говорит о существенности эффекта дисперсионного сжатия волн. На больших расстояниях модель НУШ предсказывает возникновение новых аномальных волн, что может быть объяснено сохранением солитонов огибающей в этой интегрируемой модели. Действительно, анализ солитонной составляющей этой записи (на Рис. 2.4.3 ей соответствует случай 5) выявляет в основании «волны-убийцы» интенсивный солитон. По проведенным

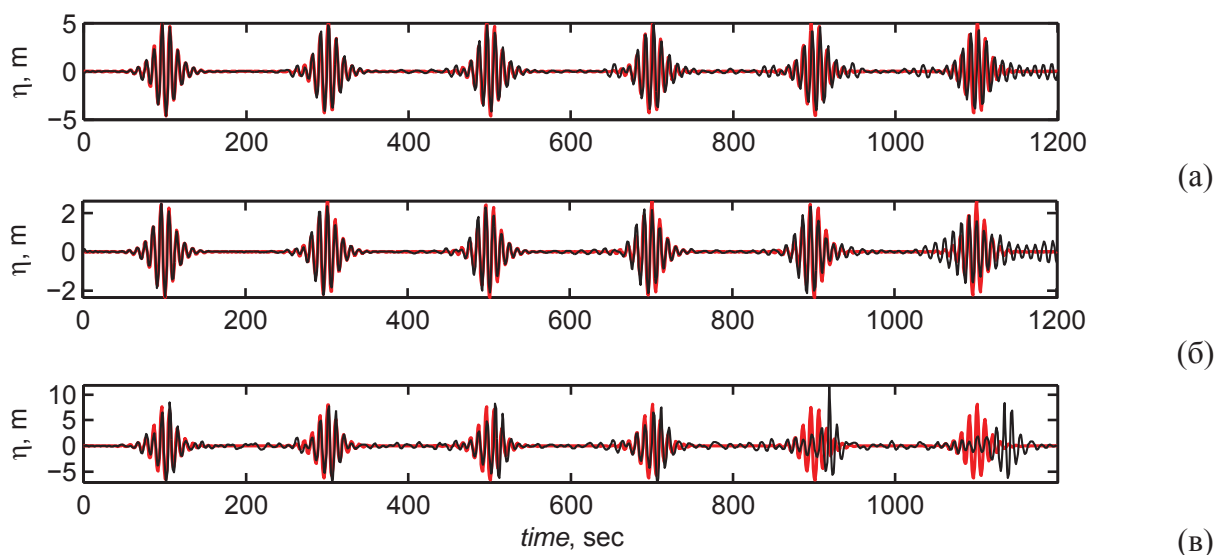


Рис. 2.5.7. Результат верификации последовательного расчета в рамках пространственной и временной версий уравнений Диста. Толстая красная линия соответствует начальным условиям, тонкая черная линия – после расчета. Исходные записи соответствуют последовательности солитонов НУШ с крутизной  $k_0H/2 \approx 0.2$  (а), тот же цуг солитонов, уменьшенный по амплитуде в 2 раза (б) и увеличенный по амплитуде в 1.5 раза (в).

расчетам время жизни «волн-убийц» (по критерию аномальности волны  $H/H_s > 2$ ) может быть до сотни секунд.

На Рис. 2.5.5в приведены зависимости от координаты альтернативных характеристик экстремальности волн, определенные по расчету уравнений Диста. Толстая синяя линия на Рис. 2.5.5.в повторяет толстую черную линию на Рис. 2.5.5б и демонстрирует зависимость  $H_{max}/H_s$ . Тонкая красная линия использует вместо максимальной высоты волны ее максимальную амплитуду  $A_{max}$  (т.е., максимум между высотой гребня и ложбины) определенную для огибающей волн), а черный пунктир построен для абсолютной величины огибающей  $A_{env}$ .

Из Рис. 2.5.5в следует, что фаза волн сложилась неудачно для «волны-убийцы», в том смысле, что небольшой сдвиг фазы заполнения относительно максимума огибающей потенциально мог бы привести к еще большему превышению высоты волны относительно  $H_s$ . Инвариантность решений уравнений для огибающей относительно сдвига фаз является еще одним удобством таких моделей, позволяя легко обобщать решения. С другой стороны, данные на Рис. 2.5.5в не учитывают амплитудную модуляцию волн, а потому в коротких группах  $H_{max}$  будет сильно отличаться от  $2A_s$  и от  $2A_{env}$ .

Хотя использованная для реконструкции модель Диста хорошо себя зарекомендовала в моделировании волн умеренной крутизны, инструментальные записи аномальных волн представляют случай сильной нелинейности и относительно широкого спектра. Вместе с тем, использование более точных моделей затруднительно, т.к. исходные уравнения гидродинамики записаны для начальной, а не краевой задачи. Для верификации примененного для реконструкции событий «волн-убийц» метода был использован следующий подход. Он состоит из 3 шагов, проиллюстрированных на Рис. 2.5.6.

1. На основе инструментальных измерений  $\eta_{rec}(t)$  (показана на Рис. 2.5.6 красной сплошной линией для  $x = 0$ ,  $0 < t < T$ ) определяется комплексная огибающая как функция времени  $A(t)$ , следуя формулам реконструкции для теории НУШ третьего порядка.

2. Огибающая  $A(x = 0, t)$  пересчитывается против движения волн до координаты  $x = -L$  в рамках модели Диста для пространственной эволюции (2.5.7) ( $x$ -evolution на Рис. 2.5.6, см. последовательность волн, построенных красной сплошной линией). Таким образом, поля  $A(x, t)$ ,  $\eta(x, t)$  и  $\Phi(x, t)$  оказываются определенными в некоторой пространственно-временной области  $(x, t)$ . Как результат, может быть сформулирован полный набор начальных условий  $A(x, t = 0)$ ,  $\eta(x, t = 0)$  и  $\Phi(x, t = 0)$  (синий пунктир на Рис. 2.5.6 при  $t = 0$ ,  $0 < x < L$ ).

3. Третий шаг, заключающийся в расчете начальной задачи по направлению эволюции волн ( $t$ -simulation на Рис. 2.5.6, см. последовательность волн синим пунктиром), предпринят по в рамках двух различных теорий:

3.а. Огибающая  $A(x, t = 0)$  рассчитана в рамках уравнений Диста для эволюции во времени (2.5.1) до момента  $t = T$ ,

или 3.б. поля смещения  $\eta(x, t = 0)$  и поверхностного потенциала  $\Phi(x, t = 0)$  используются для задания начальных условий для моделирования исходных уравнений Эйлера (в рамках подхода HOSM) до момента  $t = T$ .

Одним из результатов такого подхода, рассчитывающего «петлю» эволюции волн назад и вперед, есть смещение поверхности после расчета  $\eta(t)$  в точке измерений  $x = 0$ . Такая восстановленная временная запись в идеале должна совпасть с инструментальным

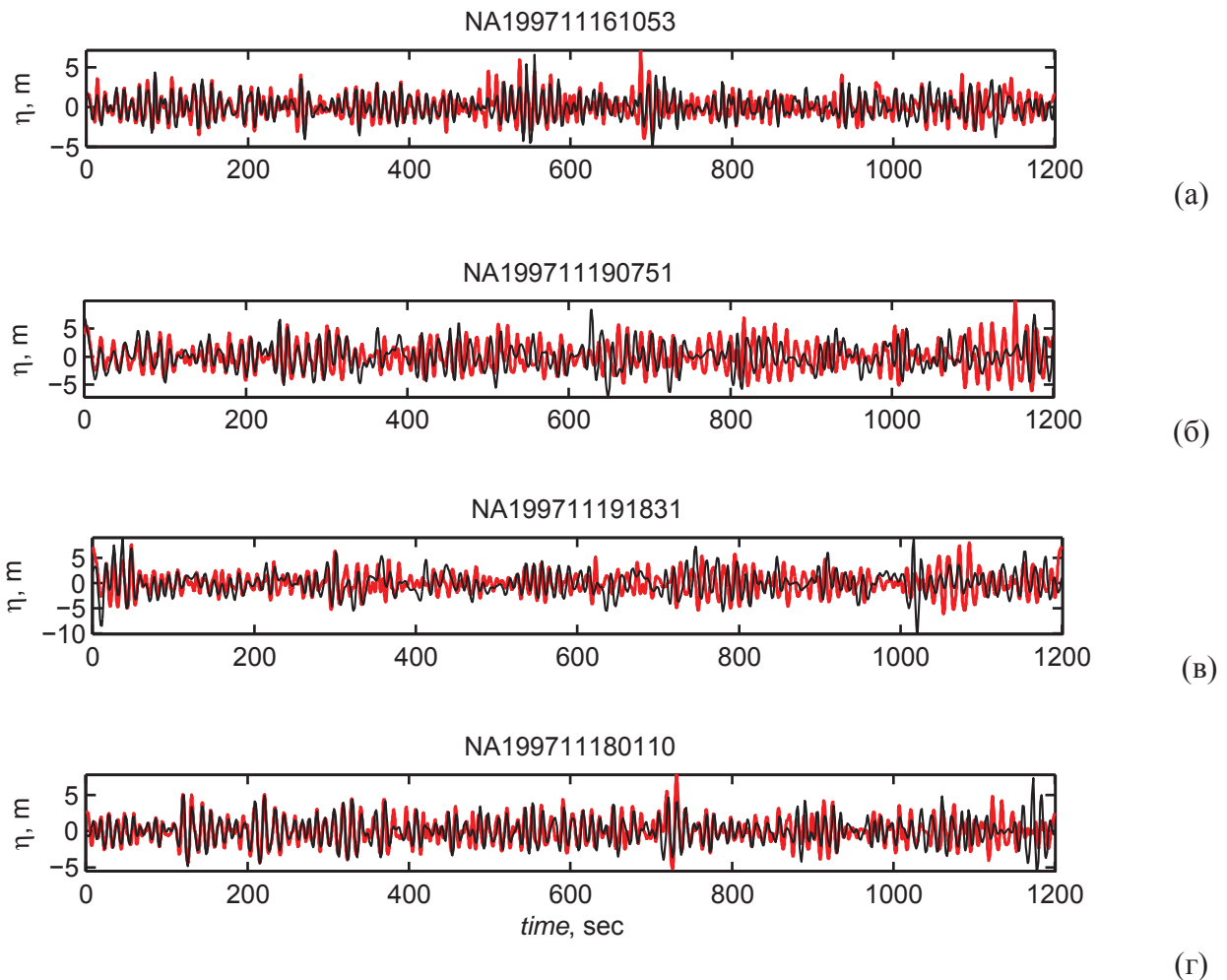


Рис. 2.5.8. Результат верификации после расчета в рамках пространственной и временной версий уравнений Диста. Толстая красная линия соответствует начальным условиям, тонкая черная линия – после расчета. Исходные данные представлены временными записями с платформы North Alwyn (см. код инструментальной записи над рисунками).

измерением,  $\eta(t) = \eta_{rec}(t)$ , что в действительности не происходит. Главная причина расхождения связана не с численными погрешностями, а является следствием различия моделей, использованных для расчета эволюции волн против и по движению. Уравнения Диста для эволюции во времени и эволюции в пространстве асимптотически близки в предположении малой крутизны и узкого спектра. Различие в описании эволюции при условии сходимости асимптотической схемы определяется отброшенными членами ( $O(\varepsilon^4)$ , где  $\varepsilon$  – крутизна). В ситуации крутых волн различие между асимптотически близкими моделями может быть значительным. Сопоставление исходного профиля  $\eta_{rec}(t)$  и восстановленного после расчета  $\eta(t)$  позволяет оценить степень расхождения описания динамики измеренных волн в рамках уравнений огибающей и исходных уравнений гидродинамики.

На Рис. 2.5.7. приведены примеры исходных временных последовательностей смещения поверхности  $\eta_{rec}(t)$  (жирная красная линия) и восстановленные записи  $\eta(t)$  (тонкая

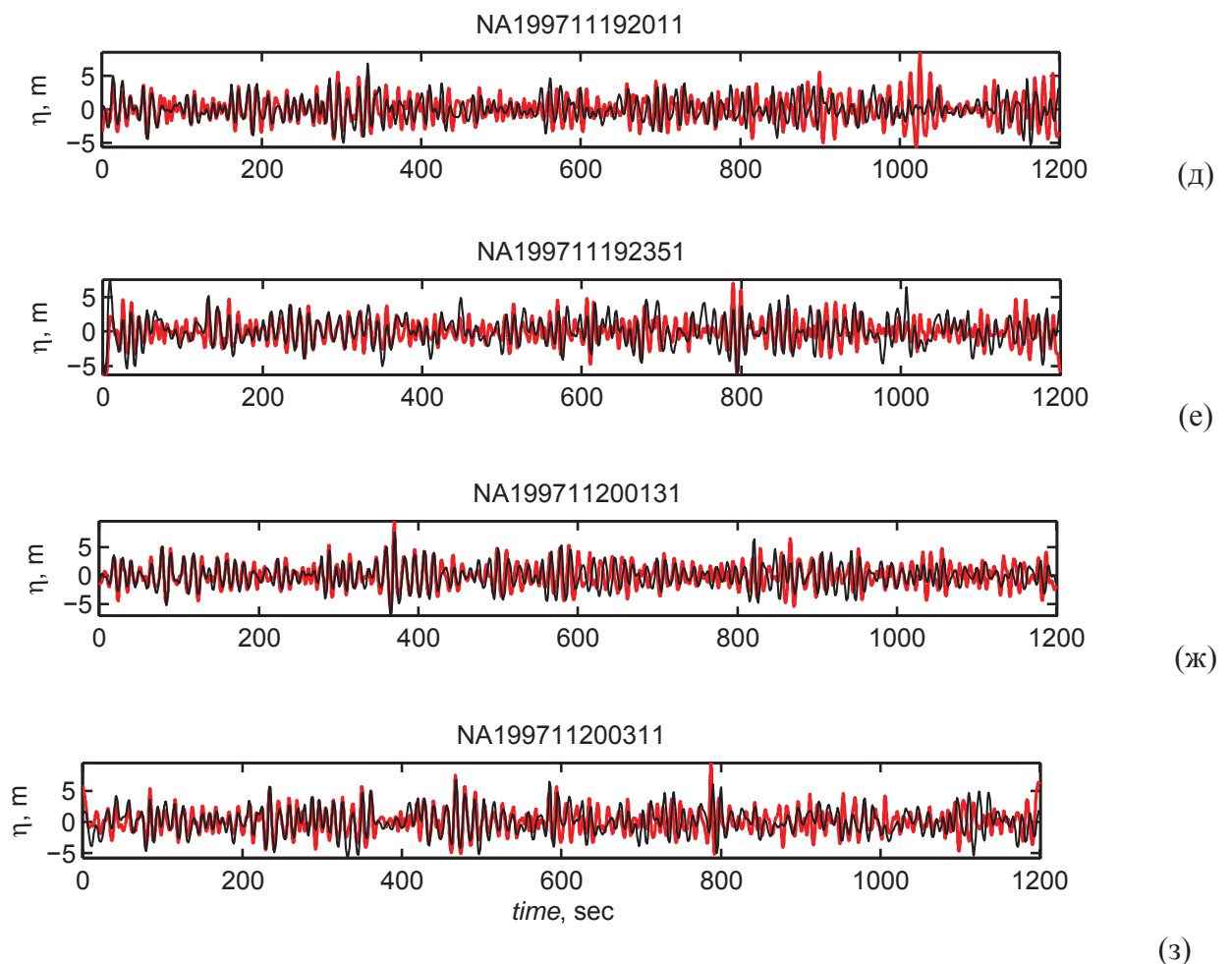


Рис. 2.5.8. (окончание)



черная линия). Исходные записи имеют длину 1200 с, им поставлена в соответствие координата  $x = 0$ . Выполнялось моделирование в рамках уравнений Диста, т.е., выполнялась процедура, описанная шагами 1–2–3а. Расчет против направления движения волн в рамках пространственной версии уравнения Диста шел до координаты  $x \approx -9200$  м, а потом – по направлению движения волн в рамках временной модели Диста до момента  $t = 1200$  с. В качестве тестового примера выполнен расчет случая, когда исходная запись представлена последовательностью солитоноподобных групп волн (Рис. 2.5.7а). Начальное условие задавалось в виде последовательности разнесенных солитонов огибающей НУШ с учетом связанных волн до третьего порядка включительно. Характерная крутизна максимальных волн в группах  $k_0 H / 2 \approx 0.2$ , период волн 10 с. Из схемы экспериментов, представленной на Рис. 2.5.6 ясно, что волны, находящиеся на исходной записи при малых временах  $t$ , в результате такого цикла численных расчетов преодолевают меньший путь, а потому на них различия в уравнениях, используемых для расчета против и по движению волн, оказывают меньшее влияние, чем на волны, зарегистрированные на больших временах. Потому можно ожидать, что область записи при малых временах будет восстановлена с большей точностью, что подтверждается Рис. 2.5.7а: пакеты слева восстановлены с высокой точностью, для пакетов справа степень соответствия между исходным и восстановленным смещением несколько хуже.

На Рис. 2.5.7б,в исходная временная запись отличается от использования в эксперименте, представленном на Рис. 2.5.7.а, только масштабным коэффициентом: на Рис. 2.5.7б цуг групп в 2 раза ниже, а на Рис. 2.5.7в – в 1.5 раза выше, чем на Рис. 2.5.7а. Тогда в эволюции на Рис. 2.5.7б доминирует дисперсионное расплывание, а в эволюции волн на Рис. 2.5.7в присутствует динамика, связанная с нелинейной самомодуляцией волн. Видно, что и эти случаи подтверждают выводы, сделанные по первому эксперименту: после цикла численного моделирования профили хорошо повторяют исходные данные, если они не находятся слишком далеко от начала записи.

На Рис. 2.5.8 приведены результаты моделирования реальных инструментальных записей. Псевдоспектральный численный код предполагает периодичность граничных условий (т.е., временная запись, используемая для начала расчета, должна быть периодичной), что в общем случае не так. Записи делаются периодическими насильно, потому их части по краям ( $t \approx 0$  и  $t \approx 1200$  с для  $x = 0$ ) заведомо искажаются и не могут быть восстановлены. Эта особенность может служить объяснением разительных отличий на краях записей на Рис. 2.5.8, в частности, на правом крае Рис. 2.5.8б.

Демонстрируемое различие, возникающее в результате использования различных моделей Диста против и по направлению движения волн, может быть связано либо со слагаемыми асимптотической теории, не учитываемыми моделями огибающей третьего порядка, либо нарушением асимптотических иерархий в моделях из-за слишком крутых волн и слишком коротких модуляций. Чтобы разделить эти два эффекта и явно увидеть роль сильной нелинейности, для расчета по направлению движения можно использовать модель исходных уравнений Эйлера. Для этого здесь использован код HOSM с параметром нелинейности  $M = 6$  (учет до 7-волновых взаимодействий включительно), результат отражен на Рис. 2.5.9 для записи NA199711200151.

Инструментальная запись (сплошная синяя линия на Рис.2.5.9) была сначала

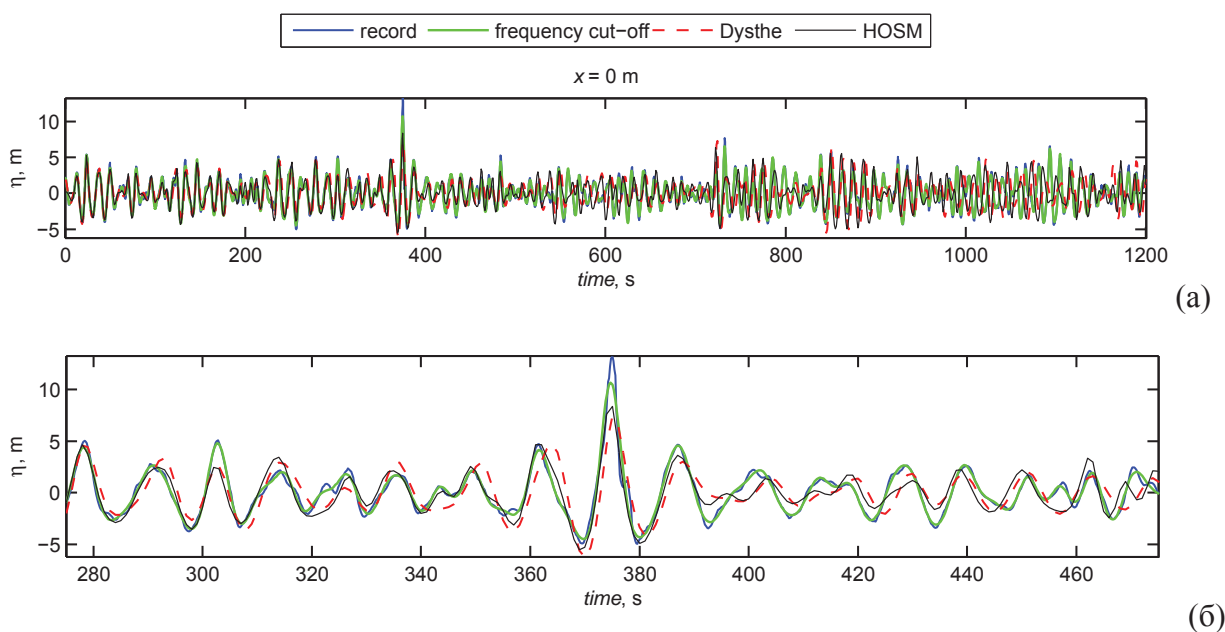


Рис. 2.5.9. Реконструкция записи NA199711200151: инструментальная запись ('record'), она же после отсечки высоких частот ('frequency cut-off'), результат расчета в рамках уравнений Диста ('Dysthe') и комбинированного расчета уравнений Диста и потом кода HOSM ('HOSM'). 20-минутная запись (а) и ее часть, содержащая anomalously высокую волну (б).

пропущена через частотный фильтр, отсекающий спектр выше 3-ей гармоники, который заведомо не может быть описан моделью (сплошная зеленая линия – запись после фильтрации). Видно, что при этом высота гребня волны существенно уменьшилась, что говорит о сильной нелинейности волны. Профиль волны после расчета по шагам 1–2–3а в рамках уравнений Диста показан красным пунктиром. Результат расчета по шагам 1–2–3б, когда эволюция во времени моделируется в рамках кода исходных уравнений HOSM, показана черной линией. Эти линии довольно близки в момент, близкий к наблюдению «волны-убийцы» (Рис. 2.5.9б). Они обе демонстрируют меньшую пиковую амплитуду, хотя

расчет с использованием кода исходных уравнений предсказывает несколько более высокую волну.

Таким образом, модель Диста описывает довольно хорошо даже такую сильно нелинейную динамику и оказывается подтвержденной с помощью численного решения исходных уравнений. Одновременно из Рис. 2.5.7 – 2.5.9 следует, что реконструкция событий, расположенных на временной записи в области более 10 мин. становится недостоверной. Так как рассмотрены случаи экстремальных волн, то эту оценку можно считать максимальной; для волн умеренной крутизны и слабой модуляцией оценка достоверной реконструкции событий с использованием описанного подхода должна быть больше по времени.

Главным затруднением при попытках реконструкции других записей оказалось обрушение волн. Модель Диста формально способна рассчитывать даже волны, которые в реальности обрушаются, но в рамках HOSM слишком крутые волны приводят к «взрыву» численной схемы. Таким образом, случай волн, близких к обрушению, представляет собой сложную для расчета ситуацию, хотя как следует из приведенного примера, иногда может быть рассчитан и моделями, не приспособленными для описания очень крутых волн.

## **2.6 Заключение**

По содержанию Главы 2 формулируются следующие основные результаты.

1. Выведены асимптотические уравнения огибающей для нелинейных диспергирующих волн на поверхности воды конечной и бесконечной глубины, включающие слагаемые третьего порядка. Созданная теория обобщает расширенные модели Диста [Dysthe, 1979] и Седлецкого [Седлецкий, 2003] и исправляет уравнения для переходной глубины  $kh \approx 1.36$ , полученные в [Johnson, 1977; Kakutani & Michihiro, 1983]. Определено, что порог модуляционной неустойчивости  $kh = 1.36$  сдвигается в область мелкой воды для волн конечной амплитуды, дана приближенная аналитическая оценка величины этого сдвига.
2. На основе ранее выведенного бризерного решения нелинейного уравнения Шредингера предложена интерпретация спектральных данных ассоциированной задачи рассеяния в целях прогноза высоких волн. Получены оценочные формулы для времен модуляционной фокусировки, времени жизни аномально высоких волн. Показано, что времена жизни групп аномально высоких волн в рамках линейной и нелинейной теорий оказываются одного порядка. При этом связанные нелинейностью интенсивные волновые группы могут существовать значительно дольше линейных и искажать гауссову статистику.

3. Предложен оригинальный подход для выделения долгоживущих нелинейных волновых групп (квазисолитонов) в инструментальных измерениях смещения поверхности в одной точке для условий достаточно глубокой воды, основанный на оконном анализе спектральных данных ассоциированной задачи рассеяния. По имеющимся инструментальным измерениям показано, что большинство «волн-убийц» возникает на фоне интенсивной долгоживущей волновой группы. Для некоторых случаев интерпретация динамики в терминах бризеров НУШ (солитонов огибающей на фоновом волнении) способна полностью объяснить наблюдаемые высоты волн.

4. Выполнена реконструкция пространственно-временной эволюции волн по данным 11 инструментальных регистраций аномально высоких волн в Северном море. Для реконструкции использованы уравнения огибающей в предположении однонаправленности волн. Времена жизни «волн-убийц» по данным расчетов достигают 100 с (порядка 10 периодов волн). Показана реалистичность выполненных реконструкций интенсивных морских волн для записей до ~10 мин. Основная трудность расчета связана с эффектами обрушения волн. Ограничения обобщенной теории для прогрессивных волн приводят к систематическому занижению высот волн (не описывается высокочастотная область спектра).

## Глава 3 СИЛЬНОНЕЛИНЕЙНЫЕ СЦЕНАРИИ ФОРМИРОВАНИЯ АНОМАЛЬНЫХ ВОЛН

### 3.1 Введение

Как следует из натурных регистраций экстремальных волн, «волны-убийцы» не ограничиваются ситуациями типа «три сестры», когда огибающая может рассматриваться медленно меняющейся функцией. Действительно, большая, если не большая часть инструментальных записей неожиданно высоких волн демонстрирует одну волну с высотой, сильно отличающейся от соседних волн. Обрушение является типичным процессом для интенсивных морских волн, и «волны-убийцы» не исключение. Хотя регистрация в одной точке не дает неоспоримого доказательства обрушения, оценки уклона водной поверхности говорят о близости измеренных «волн-убийц» к порогу обрушения. Обрушивающиеся высокие волны, возникающие в результате различных механизмов фокусировок, часто реализуются в лабораторных экспериментах.

Таким образом, вопрос о возможности использования слабо нелинейных моделей для решения задач, связанных с аномально высокими волнами, совершенно естественен. В связи с этим возникает два главных вопроса: об области параметров, когда сильно нелинейная динамика в той или иной степени может быть описана приближенными моделями (включая обобщенные асимптотические уравнения), а также о том, что происходит на границе или за границей области этих параметров. Для решения этих вопросов были проведены эксперименты для ключевых модельных задач: в рамках численного, а также лабораторного моделирования. Сформулированные модельные задачи нацелены на исследование динамики долгоживущих нелинейных волновых групп (квази-солитонов огибающей) (Раздел 3.2), развития и нелинейной стадии модуляционной неустойчивости, включая поведение сильно нелинейных аналогов бризеров (Раздел 3.3) и сосуществования нескольких «мод неустойчивости» (мультибризеров) (Раздел 3.4).

Сегодня имеется значительное число численных подходов к решению уравнений гидродинамики, позволяющих при современном уровне развития компьютеров проводить моделирование довольно больших размеров поверхности (одномерной и двумерной) на длительности сотни и более периодов волн, критические обзоры существующих подходов можно найти в [Chalikov, 2005; Чаликов, 2014]. Таким образом, начинают решаться задачи прямого моделирования ансамблей волн, что имеет ключевое значение для решения проблемы «волн-убийц», и чему посвящена Глава 4. Здесь мы не ставим перед собой целью

подробный обзор, лишь отметим, что абсолютное большинство подходов использует предположение о потенциальности волн, хотя также могут использоваться и другие приближения. Отметим здесь также уравнения Эйлера в конформных переменных [Дьяченко и др., 1996; Dyachenko et al, 1996; Chalikov & Sheinin, 1998, 2005; Zakharov et al, 2002; Ruban, 2005], которые позволяют решать двумерные задачи с неограниченной нелинейностью (до самопересечения поверхности) с большой скоростью; в формулировке А.И. Дьяченко [Дьяченко, 2001] эти уравнения имеют чрезвычайно компактный и простой для использования вид.

Другое направление, которое хочется отметить – использование асимптотических преобразований, сводящих обобщенные приближенные модели к интегрируемым уравнениям. Тогда для нахождения волн в заданный момент времени по данным в начальный момент не требуется решать уравнения в частных производных в этом интервале времен; решение доступно сразу, нужно только решить обратную задачу рассеяния для интегрируемого уравнения. Эта идея развивается в последние годы А. Осборном (например, [Osborne, 2010, 2013]). Хотя результаты диссертации не относятся к этой проблеме напрямую, полученные нами результаты позволяют надеяться на адекватность предположения об асимптотической близости решения исходных уравнений к интегрируемым, что необходимо для применения описанного подхода. Вопрос о близости уравнений гидродинамики к интегрируемым также неоднократно обсуждался В.Е. Захаровым [Zakharov, 1991; Dyachenko et al, 2013b].

Как следует из результатов, приведенных в этой главе, приближенные уравнения зачастую способны довольно хорошо описывать многие ключевые эффекты нелинейной динамики волн, имеющие отношение к нелинейной самофокусировке волн и проблеме «волн-убийц». Волновые группы, состоящие всего из нескольких (2-3) периодов волн, когда понятие огибающей становится очень условным, могут быть удовлетворительно описаны решениями НУШ для слабо модулированных волн. В качестве частичного объяснения такого противоречия отметим здесь условность определения ширины спектра, делающую этот критерий неочевидным. В частности, из-за дисперсии волн на глубокой воде частотный спектр в 2 раза уже спектра волновых чисел, что делает спектры для пространственной и временной записей визуально различными (см. для примера Рис. 2.5.2в и Рис. 2.5.3б и Раздел 4.3). Если пространственный спектр почти не разделен на гармоники, то для временного спектра они хорошо выделены. Полную картину дает пространственно-временной спектр Фурье  $S(k, \omega)$  (см. примеры в Разделе 4.3). Его схематическая картина для однонаправленных волн дана на Рис. 3.1.1. На нем пятно энергии в координатах  $(k, \omega)$  –

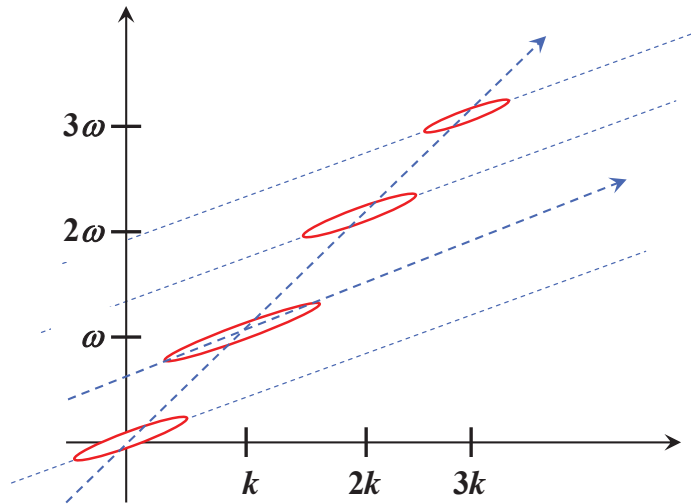


Рис. 3.1.1. Интерпретация пространственно-временного Фурье спектра для однонаправленных волн с узким спектром.

соответствует доминантной волне, другие пятна – связанные компоненты, образующие гармоники. После интегрирования по  $k$  получается частотный спектр (проекция на ось  $O\omega$ ), после интегрирования по  $\omega$  – спектр волновых чисел (проекция на  $Ok$ ).

В случае очень малых амплитуд волн первое пятно лежало бы на дисперсионной кривой  $\omega = \omega(k)$  и задавало бы соответствующую форму пятен связанных волн. В случае нелинейных волн пятно «сходит» с дисперсионной зависимости, а в случае образования когерентных волновых пакетов пятно может вытягиваться вдоль линии локальной групповой скорости (в первом приближении – касательной к дисперсионной кривой). Могут также наблюдаться пятна энергии вдоль дисперсионной зависимости и вдоль касательной к ней одновременно.

Важно, что с точки зрения асимптотического вывода уравнений модулированных волн гармоники остаются разнесенными, пока не пересекаются пятна энергии на спектре  $S(k, \omega)$ . Пересечение гармоник на одной из проекций на оси в действительности не означает нарушение их разнесенности. Конечно, существует другой эффект, связанный с зависимостью значений коэффициентов нелинейных взаимодействий от нахождения взаимодействующих волн на плоскости  $(k, \omega)$ . Для теории модулированных волн, развиваемой в Разделе 2.2, эти коэффициенты рассчитаны для положений спектральных пиков, хотя в нелинейной постановке пятна энергии смещаются.

В этом отношении естественным является выбор координат, связанных с групповой  $C_{gr}$  и фазовой  $C_{ph}$  скоростью несущей волны,

$$\tau = t - C_{ph}^{-1}x, \quad \xi = x - C_{gr}t. \quad (3.1.1)$$

Этому выбору соответствует поворот спектра на Рис. 3.1.1 к осям, построенным пунктиром. Тогда частотный спектр, соотношенный со временем  $\tau$ , будет демонстрировать

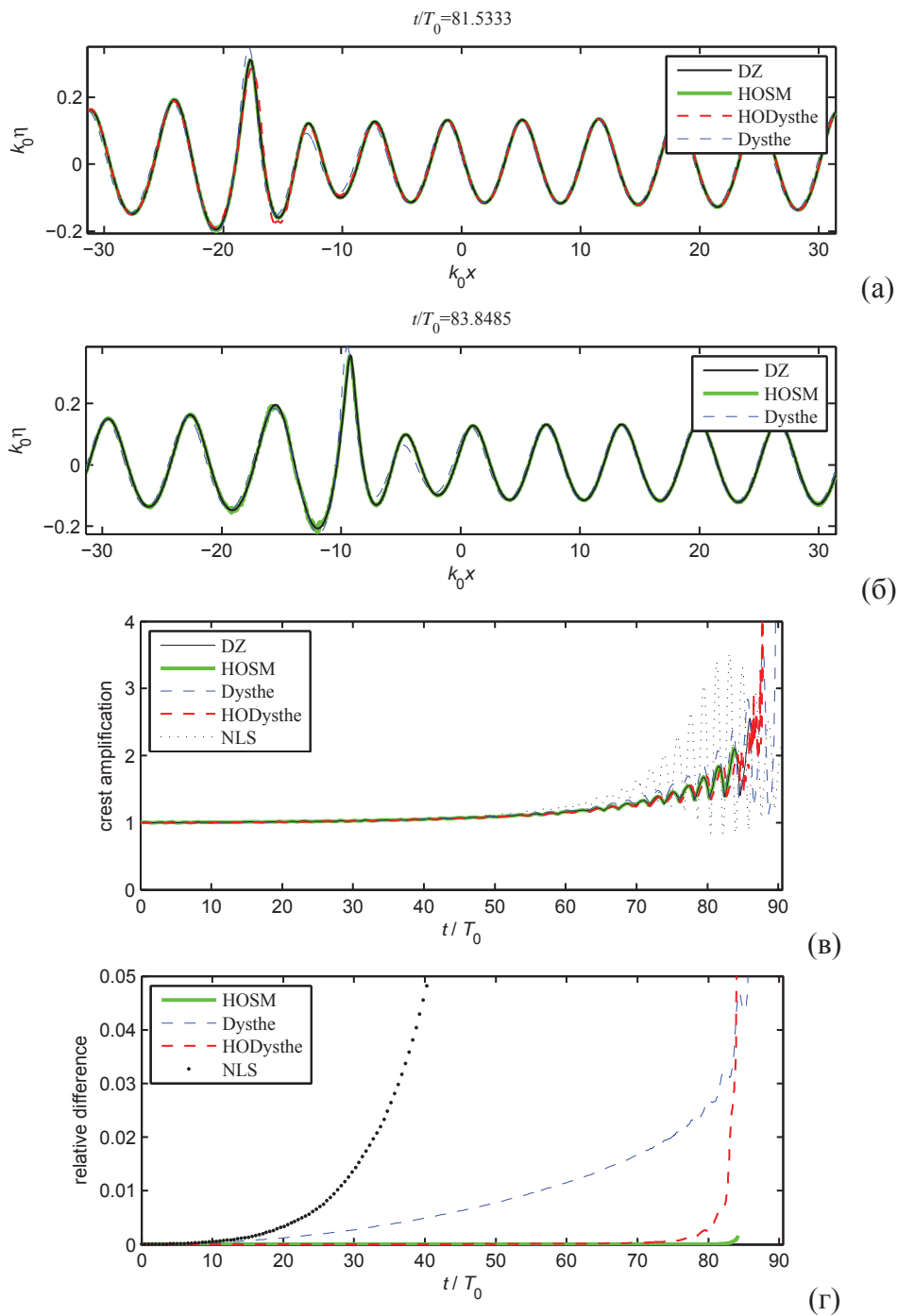


Рис. 3.1.2. Результат численного расчета эволюции цуга из 10 волн Стокса крутизны  $kH/2 = 0.15$  с начальной модуляцией амплитуды: профили волн в два момента времени, близких к окончанию расчета (а, б), превышение высоты гребня относительно начального условия (в) и среднеквадратичное расхождение профилей от «эталонного» расчета в рамках конформных уравнений Эйлера (г). Кодировка: DZ – код уравнений Эйлера в конформных координатах, HOSM – псевдоспектральный код высокого порядка, HODysthe – обобщенное уравнение Диста, Dysthe – модель Диста с полным законом линейной дисперсии, NLS – НУШ.



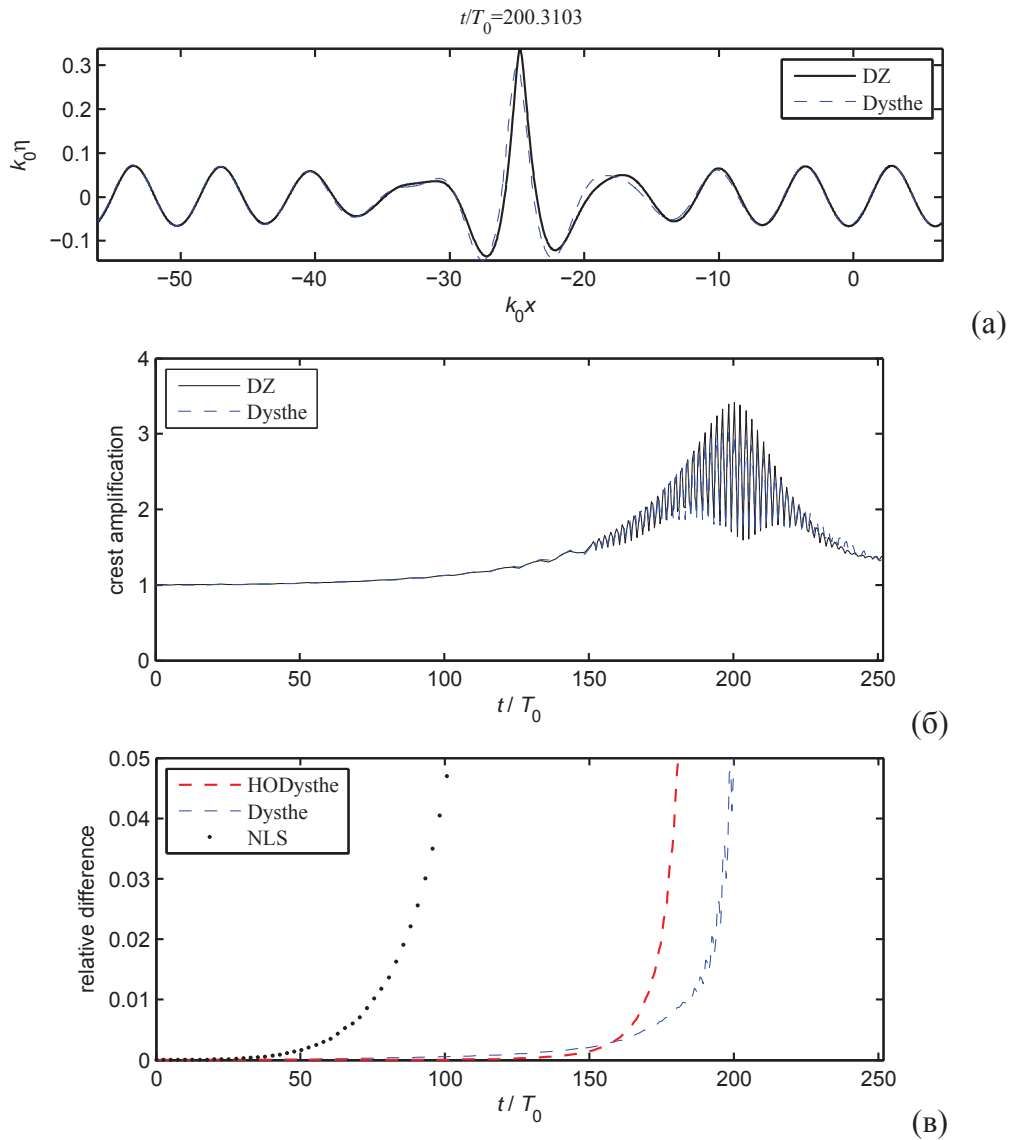


Рис. 3.1.3. Результат численного расчета эволюции цуга из 10 волн Стокса крутизны  $kH/2 = 0.09$  с начальной модуляцией амплитуды: профили волн в момент максимально высокого гребня (а), превышение высоты гребня относительно начального условия (б) и среднеквадратичное расхождение профилей от «эталонного» расчета в рамках конформных уравнений Эйлера (в). Та же кодировка, что и на Рис. 3.1.2.

максимальную разнесенность гармоник.

Интересно отметить, что в переменных (3.1.1) уравнение Диста на поверхности (2.5.1) преобразуется к виду (здесь для простоты вместо оператора  $\hat{L}$  мы ограничились учетом только двух слагаемых дисперсии, как сделано в исходной модели [Dysthe, 1979] и отбросили слагаемое наведенного течения)

$$i \frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{\omega}{4k^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \omega k^2 |A|^2 A - i \frac{\omega}{8k^3} \frac{\partial^3 A}{\partial \xi^3} + 2i\omega k |A|^2 \frac{\partial A}{\partial \xi} = 0. \quad (3.1.2)$$

Обратим внимание, что в уравнении (3.1.2) также отсутствует одно слагаемое нелинейной дисперсии, благодаря чему (3.1.2) приобрело Гамильтонову форму ([Захаров и Кузнецов

1998; Gramstad & Trulsen, 2011]. В то же время, (3.1.2) не принадлежит иерархии интегрируемых НУШ высокого порядка.

Другой пример касается моделирования модуляционной неустойчивости существенно нелинейных волн. Начальные условия соответствуют цугу из 10 волн Стокса на глубокой воде с крутизной  $kH/2 = 0.15$ , где  $H$  – высота и 5% амплитудной модуляцией (эти условия соответствуют использованным в работе [Dyachenko & Zakharov, 2005]). На Рис. 3.1.2 приведены результаты расчетов нескольких моделей: уравнений Эйлера в конформных переменных [Zakharov et al, 2002], сильно нелинейного алгоритма расчета уравнений Эйлера HOSM [West et al, 1987], интегрируемого НУШ, модифицированной модели Диста (2.5.1) [Trulsen & Dysthe, 1996] и выведенной нами обобщенной модели Диста (2.2.64) [Слюняев, 2005\*] (см. описание численных подходов в Приложении Б). В результате эволюции волн модуляция нарастает, и в итоге волны обрушаются, что приводит к «взрыву» всех численных схем кроме НУШ. Сравнение профилей волн в 2 момента финальной стадии эволюции приведено на Рис. 3.1.2а,б. Приведенные линии поверхности довольно хорошо согласуются; результат расчета НУШ здесь не приводится, предсказанная им форма группы и ее положение сильно отличаются. Из Рис. 3.1.2в, где построено усиление высоты гребней волн по отношению к начальному условию, следует, что и момент фокусировки в рамках НУШ наступает существенно быстрее. На Рис. 3.1.2г построены зависимости нормированных среднеквадратичных отклонений смещения поверхности относительно расчета в рамках конформных переменных. На Рис. 3.1.2в и Рис. 3.1.2г можно видеть «иерархию» точности моделей НУШ – Диста – обобщенного уравнения Диста. Максимум вертикальной оси Рис. 3.1.2г соответствует 5% отклонению. Хотя обобщенная модель Диста демонстрирует лучшую точность, из-за членов, содержащих большие степени по амплитуде и по производной, численный код становится неустойчивым по отношению к мелкомасштабным волнам и становится медленным для расчетов, особенно в случае крутых волн, потому он не приведен на Рис. 3.1.2г. На этом рисунке профиль максимальной волны, предсказанной моделью Диста, значительно симметричнее, чем в рамках расчета уравнений Эйлера. Расчет исходных уравнений гидродинамики с помощью алгоритма HOSM совпадает с расчетом уравнений Дьяченко почти вплотную до момента обрушения.

Пример, когда большая волна, образовавшаяся в результате развития нелинейной самомодуляции цуга, не обрушивается, приведен на Рис. 3.1.3. Этот случай отличается от предыдущего меньшей начальной крутизной волн,  $kH/2 = 0.09$ . После фокусировки наступает стадия дефокусировки и волновая группа уменьшается по амплитуде. Как и прежде, расчет волн в рамках НУШ дает фокусировку в других точках пространства и

времени. Процедура численного решения обобщенных уравнений Диста «взрывается» при возникновении очень больших волн. Потому эти решения отражены только кривыми нормированного среднеквадратичного отклонения от решения уравнений Эйлера в конформных переменных. Как видно, профили максимальных волн (Рис. 3.1.3а) и максимумы полей (Рис. 3.1.3б), рассчитанные в рамках исходных уравнения и в рамках модели Диста, хорошо совпадают, хотя фокусирующая волна на Рис. 3.1.3а очень крутая. Хотя среднеквадратичное отклонение постепенно растет со временем (Рис. 3.1.3в), основной вклад в ошибку для модели Диста дает сдвиг позиции волновой группы и фазы (см. на Рис. 3.1.3а). Другие примеры, подтверждающие пригодность модели Диста для довольно точного описания волн на водной поверхности можно найти в [Shemer et al, 2002; Clamond et al, 2006] (группы волн), [Trulsen & Stansberg, 2001] (бихроматические волны) и будут обсуждаться нами далее в этой главе и Разделе 4.2.

Таким образом, общий подход, которому мы будем следовать в этой главе, заключается в использовании решений интегрируемого уравнения НУШ (аналитическое описание) и применении уравнения Диста с полной линейной дисперсией (2.5.1) в качестве наиболее подходящей модели огибающей (баланс точности описания и сложности модели). Эти результаты будут сравниваться с результатами расчета потенциальных уравнений Эйлера (метод конформных переменных или НОСМ), а также с результатами лабораторных измерений, предоставленных в рамках сотрудничества с группами из Тель-авивского университета, и технических университетов Берлина и Гамбурга.

По содержанию Главы опубликованы следующие статьи в журналах: по Разделу 3.2 [Слюняев, 2009<sup>\*</sup>; Slunyaev et al, 2013a<sup>\*</sup>], Разделу 3.3 – [Slunyaev & Shrira, 2013<sup>\*</sup>], Разделу 3.4 – [Chabchoub et al, 2012<sup>\*</sup>; Slunyaev et al, 2013b<sup>\*</sup>; Slunyaev & Shrira, 2013<sup>\*</sup>].

### **3.2 Моделирование «предельных» солитонов огибающей**

Долгоживущие локализованные решения – солитоны огибающей – являются отличительными объектами, принадлежащими дискретной части спектра ассоциированной задачи рассеяния для нелинейного уравнения Шредингера (НУШ). Спектр задачи рассеяния не изменяется во времени. Как хорошо известно, солитоны огибающей НУШ упруго взаимодействуют друг с другом и с компонентой волнового поля, соответствующей сплошному спектру задачи рассеяния, они определяют асимптотическое решение начальной задачи в рамках НУШ, см., например, книгу [Захаров и др., 1980].

Вопрос устойчивости солитонных волн в реальных средах, когда НУШ является лишь первым приближением, существенен. Существование долгоживущих уединенных нелинейных групп волн умеренной амплитуды отмечалось в численных экспериментах по

моделированию сильно нелинейной динамики поверхностных волн (в частности, [Dommermuth & Yue, 1987; West et al, 1987; Clammond et al, 2006; Zakharov et al, 2006; Dyachenko & Zakharov, 2008], а также в более поздних работах [Dyachenko et al, 2013a]). Прикладные задачи требуют рассмотрения предельных случаев солитонов огибающей, когда нелинейная волновая группа включает в себе малое число периодов волн. Тогда способ введения функции огибающей волнового пакета становится неочевидным, либо просто теряет смысл. Отметим, что в рамках решения НУШ более короткий солитон является и более интенсивным, а потому приближения малой крутизны и широкого спектра для него связаны.

Численное моделирование распространения и взаимодействия солитонов в рамках сильно нелинейных (приближенных) уравнений идеальной гидродинамики выполнялось довольно давно, одновременно с появлением эффективных алгоритмов расчета нелинейных уравнений гидродинамики, см. [Dommermuth & Yue, 1987; West et al, 1987]. Отмечалось, что волны в виде уединенных групп, действительно, могут распространяться и взаимодействовать друг с другом, но при этом наблюдались эффекты изменения формы изначально заданных солитонов НУШ, а также эффекты неупругого взаимодействия. Таким образом, можно было говорить о квазисолитонах огибающей, то есть, о нелинейных волновых группах, которые демонстрируют схожую с солитонами динамику, но на больших временах изменяются, а при взаимодействии с другими волнами излучают.

Различия между динамикой волн в рамках интегрируемого НУШ и сильно нелинейных моделей подчеркивались, в частности, в работах [Tanaka, 1990; Henderson et al, 1999; Dyachenko & Zakharov, 2005; Zakharov et al, 2006]. Вместе с тем, отличительная «живучесть» квазисолитонов волн огибающей на глубокой воде отмечалась в работах [Zakharov et al, 2006; Dyachenko & Zakharov, 2008], в которых было выполнено численное моделирование уравнений гидродинамики в конформных переменных без ограничения на степень нелинейности. В работе [Dyachenko & Zakharov, 2008] эволюция начального возмущения, близкого к солитону НУШ, приводила к появлению и длительному распространению короткой нелинейной группы волн с максимальной крутизной волн, близкой к предельному значению для волн Стокса. В [Zakharov et al, 2006] столкновение двух встречных солитонов огибающей (меньшей амплитуды, чем в [Dyachenko & Zakharov, 2008]) не приводило к заметному изменению их параметров, но отмечалась сильно отличная динамика волновой группы с формой солитона НУШ (записанного в конформных переменных) большей амплитуды. С другой стороны, высокая точность описания волновой динамики в модельной задаче распада группы волн в рамках уравнения Диста отмечалась в

работе [Clamond et al, 2006] по результатам сопоставления между собой моделей НУШ, Диста и сильнонелинейных подходов.

Слабо нелинейные солитонные решения НУШ еще ранее проверялись в лабораторных условиях в работах [Feir, 1967; Yuen & Lake, 1975, 1982]. Подобно выводам, сделанным на основе численных экспериментов [Dommermuth & Yue, 1987; West et al, 1987], экспериментаторы подтвердили существование солитонов малой амплитуды, но уже относительно крутые солитоны огибающей с  $k_0 A \gg 0.2$  ( $k_0$  – волновое число несущей и  $A$  – максимальная амплитуда волн) в лабораторных лотках претерпевали значительные изменения формы. Таким образом, накопленные результаты были в некотором роде противоречивы: хотя численное моделирование демонстрировало существование устойчивых очень коротких групп очень крутых волн, которые, в отличие от солитонов огибающей НУШ, назывались бризерами или фриконами, существование даже умеренно интенсивных солитоноподобных группы волн в лабораторных экспериментах не подтверждалось. Для разрешения этого противоречия были проведены эксперименты в лотке Берлинского университета со следующими целями:

- воспроизвести в лабораторных условиях короткие устойчивые группы крутых волн (с максимальной крутизной не менее  $k_0 A = 0.2$ );
- протестировать солитонное решение НУШ в качестве граничного условия на волнопродукторе для генерации интенсивных солитонов огибающей.

В этом разделе рассмотрено распространение и взаимодействие солитонов огибающей, включающих волны, близкие к обрушению, с помощью численного моделирования потенциальных уравнений идеальной гидродинамики. Также обсуждается, насколько приближенные уравнения для огибающей способны описывать короткие интенсивные солитоноподобные волновые группы. Будут рассмотрены одиночные волновые группы и их парное взаимодействие. Задание начальных условий базируется на точных одно- и двухсолитонных решениях НУШ и процедуре учета связанных нелинейных волн, описанной в Разделе 2.5. Использование формул реконструкции отличает наш подход от способа задания начальных условий в виде солитонов НУШ в работах [Dommermuth & Yue, 1987; West et al, 1987; Zakharov et al, 2006; Dyachenko & Zakharov, 2008]. Отметим также, что в работе [Zakharov et al, 2006] было выведено уравнение Шредингера для конформных переменных, и начальное условие задавалось на основе солитонного решения НУШ в конформных переменных. Нами используется классическое НУШ. Далее описаны результаты наблюдения интенсивных солитонов огибающей в лабораторном лотке.

## Численное моделирование рождения и распространения солитонов огибающей

Односолитонное решение НУШ (2.2.35), описывающего эволюцию во времени, в безразмерном виде дано в (2.3.24), а в размерном имеет вид (с точностью до выбора начала отсчета времени, координаты и фазы)

$$A(x, t) = A_s \frac{\exp\left[i \frac{s^2}{4} \omega_0 t\right]}{\cosh\left[\sqrt{2s} k_0 (x - C_{gr} t)\right]}, \quad (3.2.1)$$

Здесь  $s = k_0 A_s$  – крутизна, определенная по амплитуде солитона  $A_s$  и волновому числу заполнения  $k_0$ . Вообще говоря, солитонное решение НУШ обладает еще одним свободным параметром, задающим его скорость в системе отсчета, связанной с линейной групповой скоростью несущей. Волны в рамках уравнения для огибающей описываются тем лучше, чем ближе их спектр к значению  $k_0$ , по этой причине мы будем рассматривать солитон (3.2.1), распространяющийся со скоростью несущей волны  $C_{gr}$ .

Нами было выполнено несколько численных расчетов, где в качестве начального условия задавалось решение (3.2.1) с учетом поправок трех порядков малости (2.5.4)–(2.5.5). Для удобства волновое число выбиралось  $k_0 = 1$ , а амплитуда солитона  $A_s$  варьировалась. Ускорение свободного падения в этих расчетах было выбрано равным единице для удобства. Таким образом, период несущей волны равен  $2\pi$ . Исходное положение солитона выбиралось равным нулю. Универсальным параметром является крутизна  $s = k_0 A_s$  (здесь  $s = A_s$  в силу выбора  $k_0$ ). С учетом нелинейных поправок (2.5.4) крутизна однородной волны может быть также определена через полувысоту волны  $(A_{cr} + A_{tr}) / 2$ , где  $A_{cr}$  – высота гребня и  $A_{tr}$  – глубина впадины, как

$$k_0 A_{nl} = k_0 \frac{A_{cr} + A_{tr}}{2} = k_0 A + \frac{3}{8} k_0^3 A^3, \quad (3.2.2)$$

$$k_0 A_{cr}^{(3)} = k_0 A + \frac{1}{2} k_0^2 A^2 + \frac{3}{8} k_0^3 A^3, \quad k_0 A_{tr}^{(3)} = k_0 A - \frac{1}{2} k_0^2 A^2 + \frac{3}{8} k_0^3 A^3, \quad (3.2.3)$$

здесь  $A$  – амплитуда огибающей. Кроме того, крутизну можно определять непосредственно как производную по координате от функции  $\eta(x)$  (наклон волновой поверхности). Тогда значением крутизны, соответствующим гребню с углом  $120^\circ$ , является величина  $3^{-1/2} \approx 0.577$ . Такая локальная крутизна отвечает геометрическому критерию обрушения волн.

Профили смещения поверхности по результатам расчета эволюции солитона огибающей (3.2.1) с амплитудой  $A_s = 0.2$  в рамках полной модели в конформных переменных (сплошная линия) и уравнения Диста (пунктир) показаны на Рис. 3.2.1 для различных времен. На вычислительную область накладывались периодические граничные условия, и за время эволюции группа совершила несколько циклических проходов по домену. Начальный

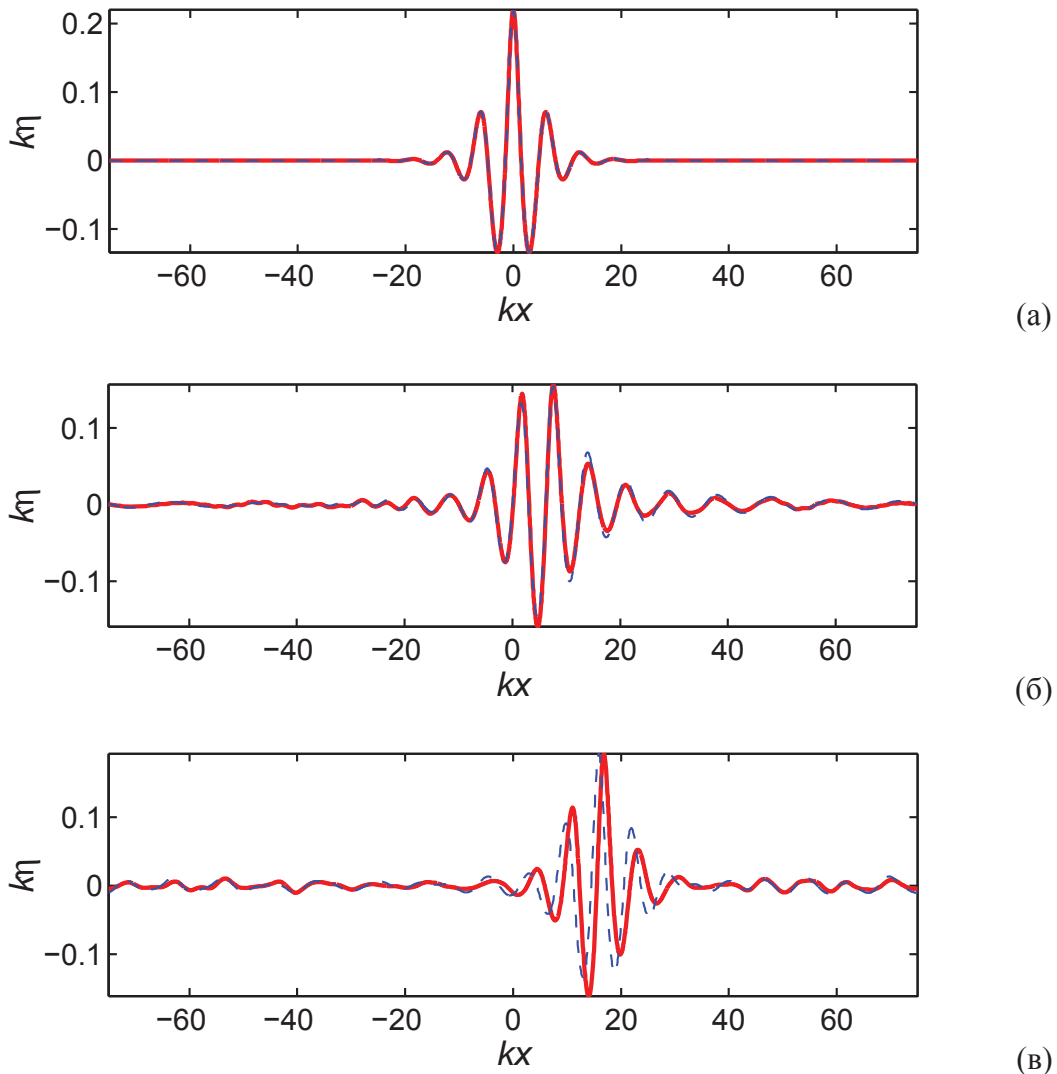


Рис. 3.2.1. Расчет эволюции солитона огибающей с  $k_0 A_s = 0.2$  в рамках полных уравнений (сплошная линия) и уравнения Диста (пунктир). Показаны моменты времени:  $\omega_0 t = 0$  (а),  $\omega_0 t = 300$  (б) и  $\omega_0 t = 900$  (в).

этап эволюции возмущения сопровождается некоторым искажением группы и заметным излучением волн вперед (низкочастотная компонента) и назад (высокочастотная компонента); искажение профиля огибающей на начальном этапе особенно хорошо было заметно при расчете уравнения Диста, где вычисляются профили огибающей. Перед

излучением волн вперед и назад происходит укрупнение профиля огибающей; он становится снова гладким после излучения волн. Далее интенсивная группа распространяется на фоне малоамплитудных излученных волн без видимых искажений, как показано на Рис. 3.2.1в.

Амплитуда волновой группы в каждый момент времени может быть определена как полуразница между максимумом и минимумом поля смещения по счетному домену, то есть, это половина высоты максимальной волны (далее – максимальная полувысота). Эта величина характеризует интенсивность волнового пакета и построена на Рис. 3.2.2 (сплошная линия и пунктир). Так как число волн в группе мало, то полувысота волн на Рис. 3.3.2 осциллирует; она также несколько меньше, чем амплитуда исходного возмущения  $A_s$ , даже в начальный момент времени, несмотря на поправку (2.5.4) из-за связанных волн, что также связано с малым числом заполняющих волн в группе. Из Рис. 3.2.2 видно, что хотя эволюция начального возмущения сопровождается уменьшением полувысоты волн до времен около  $\omega_0 t = 300$ , далее наблюдается стабилизация значения полувысоты. Некоторые долговременные колебания полувысоты на Рис. 3.2.2 связаны, очевидно, с взаимодействием с излученными на начальном этапе волнами. Таким образом, после некоторой перестройки, связанной, по всей видимости, с неидеальным заданием начального условия, солитон НУШ распространяется как целое на фоне малоамплитудных волн без видимых искажений.

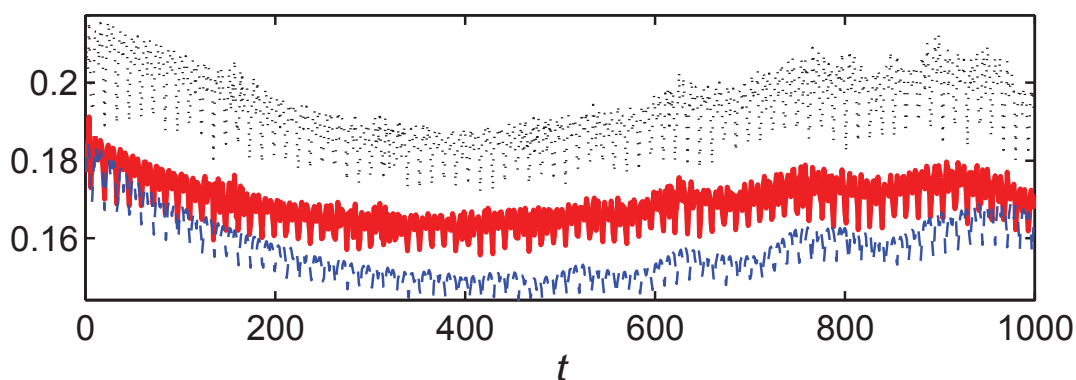


Рис. 3.2.2. Максимальная полувысота волн при эволюции солитона огибающей с  $k_0 A_s = 0.2$  в рамках полных уравнений (сплошная жирная линия) и уравнения Диста (длинный пунктир) как функция безразмерного времени  $\omega_0 t$ . Максимальная крутизна поверхности (точки) по результатам полнонелинейного моделирования



Из Рис. 3.2.1 следует, что первые отличия между моделированием в рамках полных уравнений и модели огибающей проявляются в слабом расхождении профилей индивидуальных волн (Рис. 3.2.1б) (вероятно, из-за расхождения между фазами волн, моделируемых различными уравнениями). Позднее проявляются отличия и между огибающими, в частности, волновой пакет в рамках уравнения Диста как целое распространяется медленнее, чем в рамках полных уравнений (Рис. 3.2.1в). Рис. 3.2.2 демонстрирует, что высота волн, рассчитанных в рамках уравнения Диста, несколько меньше высоты волн в рамках полнонелинейного расчета, хотя качественно поведение максимальных высот волн схоже. Для оценки действия нелинейности можно использовать так называемое нелинейное время, получаемое сопоставлением эволюционного и

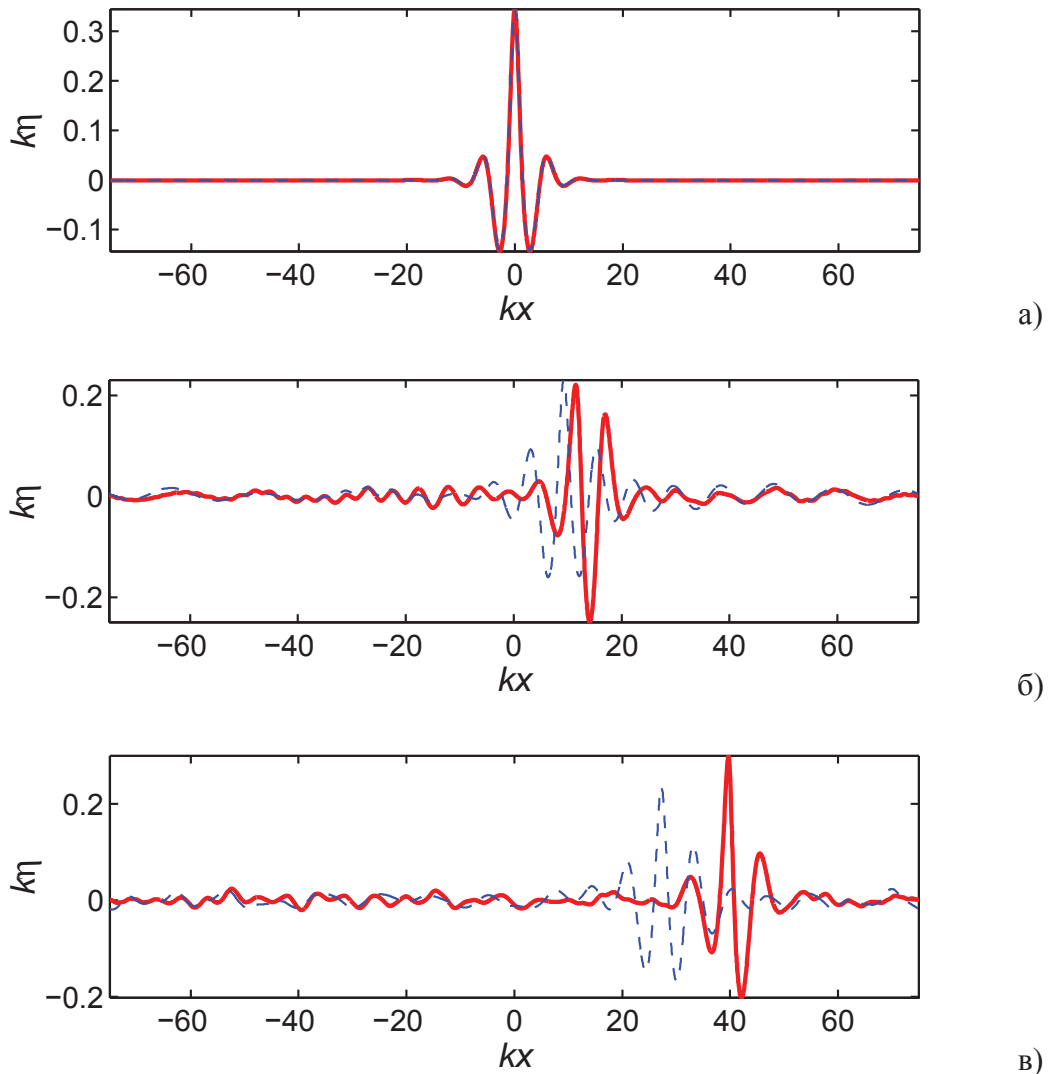


Рис. 3.2.3. Расчет эволюции солитона огибающей с  $k_0 A_s = 0.3$  в рамках полных уравнений (сплошная линия) и уравнения Диста (пунктир). Показаны моменты времени:  $\omega_0 t = 0$  (а),  $\omega_0 t = 300$  (б) и  $\omega_0 t = 900$  (в).

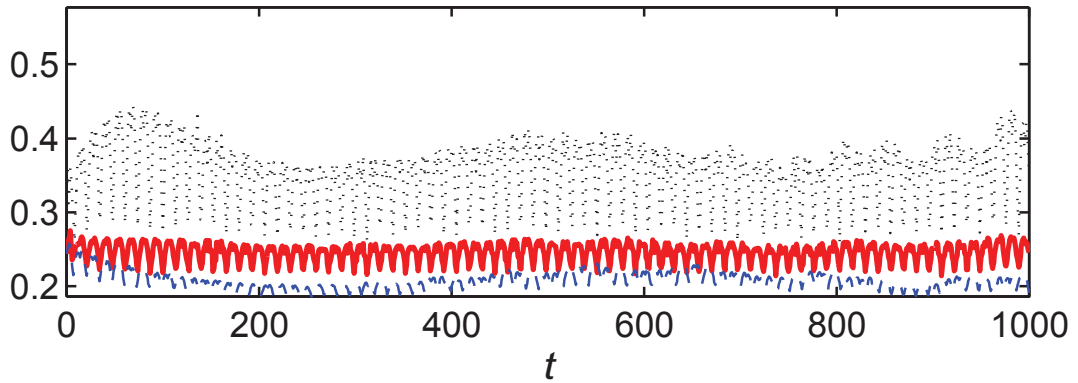


Рис. 3.2.4. Максимальная полувысота волн при эволюции солитона огибающей с  $k_0 A_s = 0.3$  в рамках полных уравнений (сплошная жирная линия) и уравнения Диста (длинный пунктир) как функция безразмерного времени  $\omega_0 t$ . Максимальная крутизна поверхности (точки) по результатам полнонелинейного моделирования. Максимум вертикальной оси графика соответствует наклону поверхности  $60^\circ$ .

нелинейного слагаемых в уравнении НУШ:

$$\omega_0 T_{nl} \cong \frac{2}{k_0^2 A^2}. \quad (3.2.4)$$

Случай  $k_0 A_s = 0.2$  дает оценку  $\omega_0 T_{nl} \approx 50$ , тогда моделирование на Рис. 3.2.1, 3.2.2 соответствует 20 характерным временам нелинейности.

Аналогичный расчет для  $k_0 A_s = 0.3$  показан на Рис. 3.2.3 и 3.2.4. В этом случае  $\omega_0 T_{nl} \approx 20$ , и расхождения между моделью Диста и расчетом полных уравнений проявляются быстрее, так что при  $\omega_0 t = 300$  (Рис. 3.2.3б) уже есть существенные отличия между огибающими, группа бежит быстрее в рамках полных уравнений. Если на Рис. 3.2.2 на больших временах высоты волн в рамках полной и приближенной моделей были близки, то на Рис. 3.2.4 недооценка высот волн приближенной моделью носит регулярный характер; тенденции значений высот волн на Рис. 3.2.4 также кажутся различными для двух моделей. Из Рис. 3.2.3 видно, что мелкомасштабные волны плохо описываются моделью Диста, в отличие от результатов на Рис. 3.2.1.

Итак, существование солитонной волновой группы демонстрируется как приближенной моделью огибающей, так и полной моделью. Неизменность полувысоты волновой группы, рассчитанной в рамках полных уравнений гидродинамики, выглядит на Рис. 3.2.4 даже более впечатляющей, чем на Рис. 3.2.2. Здесь осцилляции значения максимальной высоты волн еще более выражены, чем в предыдущем случае, поскольку в пакете фактически заключены 1-2 индивидуальные волны, см. Рис. 3.2.3.

На Рис. 3.2.2, 3.2.4 точками построены зависимости максимума крутизны (наклона) поверхности, рассчитанной как производная от профиля поверхности по координате; для

этого использованы данные полнонелинейного моделирования. Такой расчет позволяет учесть сложное отклонение профиля волн от синусоидального. Максимум вертикальной оси графика на Рис. 3.2.4 соответствует наклону поверхности в  $60^\circ$ ,  $3^{-1/2} \approx 0.577$ . После перестройки волновой группы, которой на Рис. 3.2.4 соответствуют времена  $\omega_0 t < 200$ , волны в нелинейном пакете достигают около 70% предельной крутизны.

Отметим различия в поведении зависимостей максимальной крутизны на Рис. 3.2.2 и Рис. 3.2.4 на начальном этапе эволюции. Хотя характер поведения максимальной полувысоты волн схож в обоих случаях, максимальная крутизна (точки на Рис. 3.2.2 и Рис. 3.2.4) во втором случае сначала нарастает. При задании начального условия с немного большим значением  $A_s$  крутизна волн быстро вырастает, и они обрушиваются. Расчет для  $k_0 A_s = 0.25$  демонстрировал зависимости максимальных полувысот качественно схожие со случаем  $k_0 A_s = 0.2$ , но на начальном этапе крутизны волн нарастали, аналогично случаю  $k_0 A_s = 0.3$ .

Встречное и попутное взаимодействие интенсивных солитонов огибающей с совпадающими и отличающимися длинами несущих волн исследовалось в нашей работе

Таблица 3.2.1. Характеристики солитонных волновых групп в численных экспериментах

№	$k_0 A_s$	$k_0 A^{(3)}_{cr}$	$k_0 A^{(3)}_{tr}$	$A_{cr} \frac{\omega_m^2}{g}$	$A_{tr} \frac{\omega_m^2}{g}$	$\max(H_t) \frac{\omega_m^2}{2g}$	$k_p$ , рад/м	$k_m$ , рад/м	$\omega_p$ , рад/с	$\omega_m$ , рад/с	$V$ , м/с
1	0.15	0.16	0.14	0.15	0.13	0.14	0.99	0.99	3.13	3.16	1.60
2	0.16	0.17	0.15	0.16	0.14	0.15	1.01	0.99	3.13	3.16	1.61
3	0.20	0.22	0.18	0.19	0.16	0.17	0.97	0.98	3.07	3.17	1.62
4	0.22	0.25	0.20	0.21	0.18	0.20	0.97	0.98	3.13	3.18	1.63
5	0.23	0.26	0.21	0.23	0.19	0.21	0.97	0.98	3.13	3.20	1.64
6	0.25	0.29	0.22	0.27	0.21	0.23	0.88	0.98	3.19	3.22	1.66
7	0.28	0.33	0.25	0.28	0.22	0.26	0.98	0.98	3.07	3.22	1.67
8	0.29	0.34	0.26	0.30	0.23	0.28	0.96	0.97	3.07	3.23	1.68
9	0.30	0.36	0.27	0.33	0.25	0.29	0.92	0.97	3.07	3.25	1.69
10	0.31	0.37	0.27	0.37	0.27	0.31	0.90	0.97	3.01	3.29	1.70
11	0.32	0.38	0.28	0.40	0.29	0.33	0.88	0.96	3.07	3.31	1.72

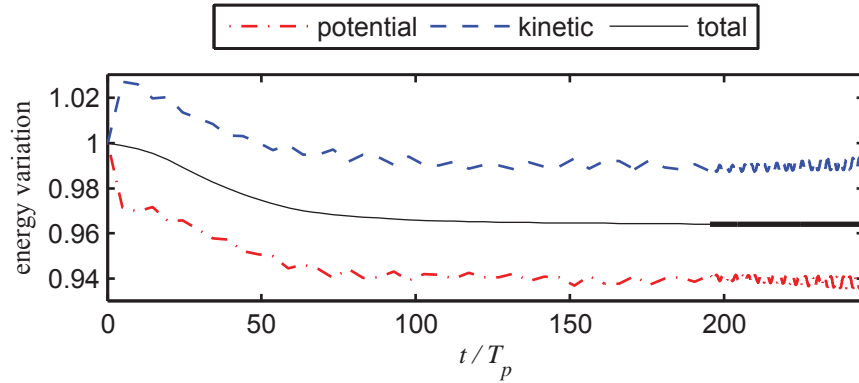


Рис. 3.2.5. Эволюция потенциальной, кинетической и полной энергий в системе в численных расчетах уравнений Эйлера (относительно начальных значений). Показан эксперимент № 9 из Табл. 3.2.1 ( $k_0 A_s = 0.3$ ).

[Слюняев, 2009\*]. В ней найдено, что при многократном встречном столкновении интенсивные солитоны огибающей приблизительно сохраняют свои амплитуды, а при попутном – солитон с большей длиной волны сохраняется, но разрушается коротковолновый. При взаимодействии солитонов с близкими волновыми числами заполняющих волн возможно образование связанных солитонных состояний, когда за большим солитоном следует меньший; при этом между ними остается «перетяжка», обеспечивающая их взаимодействие. Этот эффект не описывается ни первым приближением уравнения на модуляции (нелинейное уравнение Шредингера), ни вторым (модифицированное уравнение Диста). Нужно, однако, отметить, что такое взаимодействие происходит очень долго (в рассмотренном примере – около 500 характерных времен нелинейности  $T_{nl}$ ), а потому применимость асимптотической модели Диста формально необоснованна; на таких больших временах малые поправки (например, нарушение гамильтоновой структуры уравнениями Диста, см. [Захаров и Кузнецов, 1998; Gramstad & Trulsen, 2011]) могут приводить к заметным качественным особенностям динамики.

### Общий «портрет» интенсивных солитонов огибающей

Интенсивные солитоны огибающей, приведенные на Рис. 3.2.1 и Рис. 3.2.3, в вычислительной области соседствуют с волнами, излученными на начальной стадии расчета. Для сравнения с лабораторными экспериментами были получены профили солитонов без них с помощью введения маски, на каждом шаге по времени подавляющей любые волны на некотором расстоянии от уединенной группы (схожий подход использовался в [Dyachenko & Zakharov, 2008]). Первые 200 периодов волновых колебаний отводятся на подстройку группы, заданной, как и ранее, начальным условием в виде солитона НУШ со связанными волнами трех порядков малости. Из-за подавления волн маской общая энергия системы на

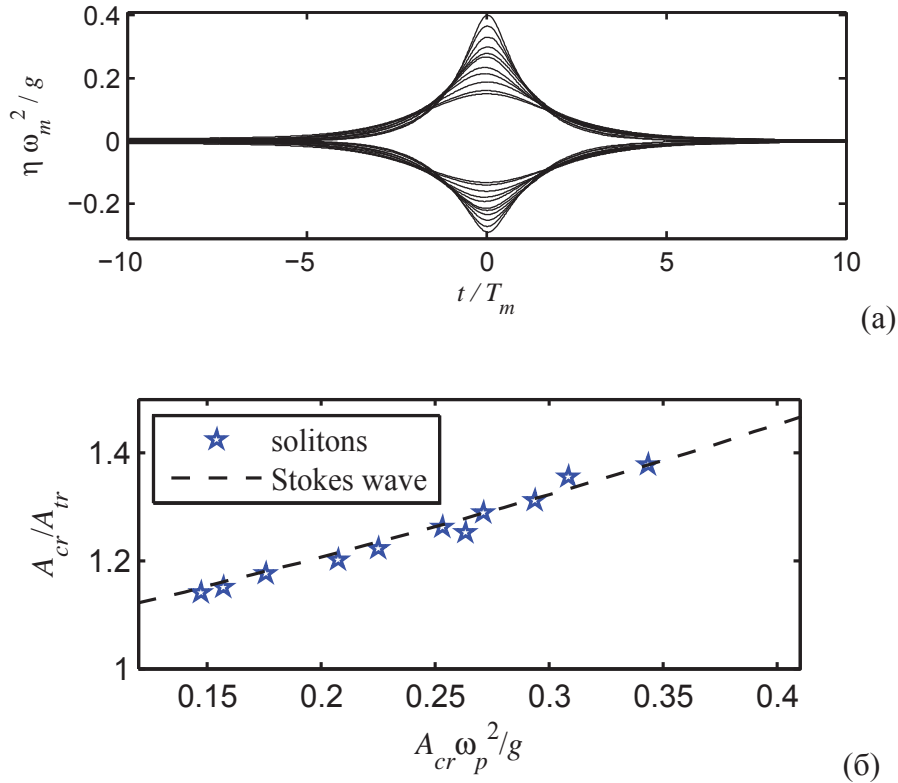


Рис. 3.2.6. Огибающие солитонных групп по результатам численного моделирования для начальных условий  $k_0 A_s = 0.15, 0.16, 0.20, 0.22, 0.23, 0.25, 0.28, 0.29, 0.30, 0.31, 0.32$  (а), а также вертикальная асимметрия огибающей  $A_{cr} / A_{tr}$  как функция безразмерной амплитуды гребней (звезды на (б)). Длинный пунктир на (б) соответствует решению в виде волны Стокса, когда учтена нелинейная поправка к частоте  $\omega_p$ .

начальном этапе (когда идет излучение) падает, а потом выходит на примерно постоянный уровень (когда сформирован квазисолитон). На Рис. 3.2.5 показана зависимость энергии от времени, нормированном на пиковый период  $T_p$  для эксперимента №9 из Табл. 3.2.1. Видно, что начальное условие не соответствует верному балансу между потенциальной и кинетической энергиями, их значения сразу изменяются. Потеря общей энергии за время «подстройки» составляет около 3%, что одного порядка с разницей между потенциальной и кинетической энергиями. Потеря энергии и разница между кинетической и потенциальной энергиями меньше в случаях волн меньшей амплитуды. Данные в интервале 200 – 250 периодов используются для получения как пространственного, так и временного профиля солитона огибающей. Задавались крутизны от  $k_0 A_s = 0.15$  до 0.25, см. Табл. 3.2.1. Частотные и временный спектры используются для нахождения пиковых и средних значений (первый момент соответствующего энергетического спектра) частоты и волнового числа несущей,  $(\omega_p, k_p)$  и  $(\omega_m, k_m)$  соответственно. По результатам расчетов  $\omega_p$  несколько меньше линейной частоты несущей волны начального условия  $\omega_0$ . Волновое число  $k_p$  в начальный момент

времени совпадает с  $k_0$ , но потом становится немного меньше его. Средние частоты и волновые числа немного выше пиковых значений, см. Табл. 3.2.1 и детали в нашей работе [Slunyaev et al, 2013a\*].

Определять амплитуду огибающей  $A$  по данным измерений затруднительно, потому для оценки интенсивности волн мы используем амплитуду гребней  $A_{cr}$  и ложбин  $A_{tr}$ , теория для волн огибающей дает их оценки для начального условия  $A_{cr}^{(3)}$ ,  $A_{tr}^{(3)}$  по формулам (3.2.3);  $H_t$  – высота максимальной волны, определенная по временной записи, см. Табл. 3.2.1.

Огибающая волн построена посредством усреднения профилей смещения по фазе в

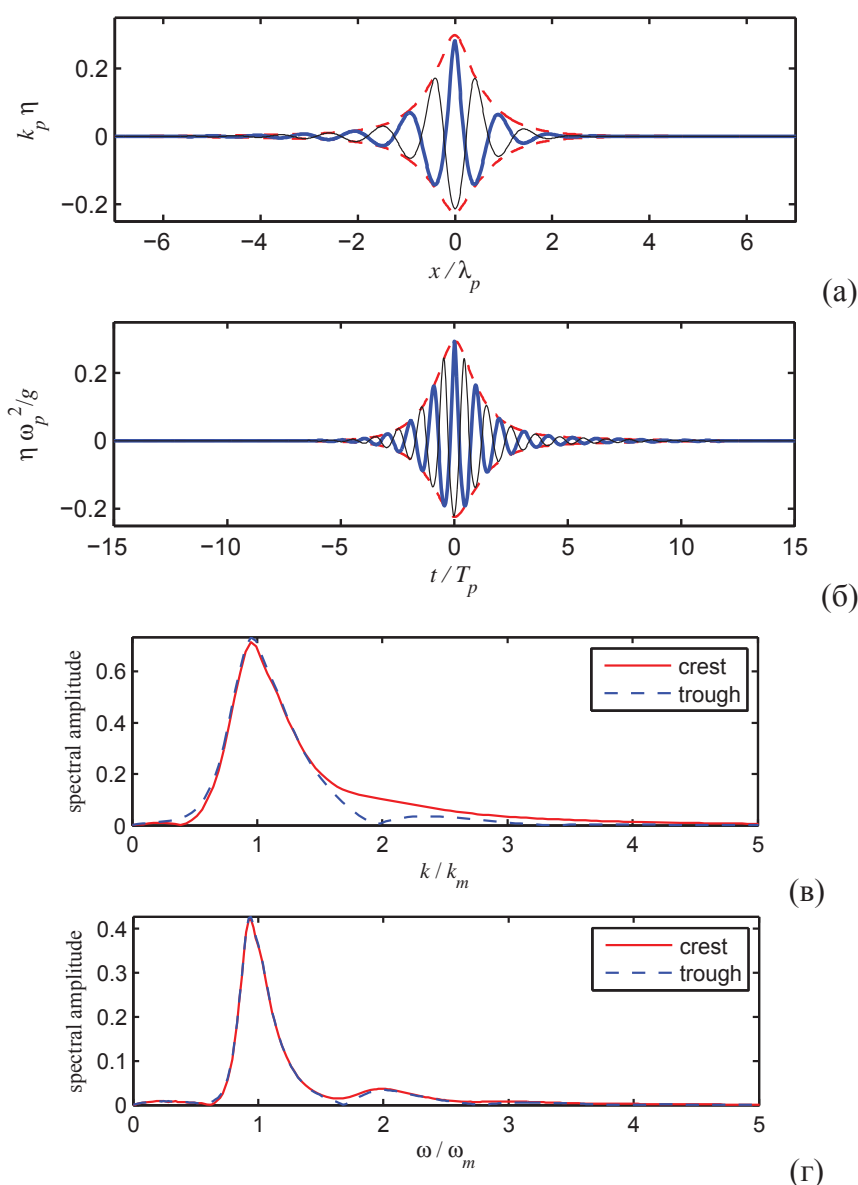


Рис. 3.2.7. Стационарная волновая группа, полученная в результате эксперимента №9 (см. Табл. 3.2.1): смещения поверхности и огибающие как функции координаты (а) и времени (б), а также соответствующие спектры (в, г).

сопровождающей системе координат. Соответствующая скорость группы  $V$  определена путем слежения за «центром масс»  $x_s$  смещения поверхности,

$$x_s(t) = \frac{\int x \eta^2(x, t) dx}{\int \eta^2(x, t) dx}. \quad (3.2.5)$$

Последовательность  $x_s(t)$  потом аппроксимировалась линейной зависимостью  $x_s = x_0 + Vt$ , найденные таким образом скорость солитонов огибающей приведены в Табл. 3.2.1, а также на Рис. 2.3.11. Огибающие стационарных групп для временных записей построены на Рис. 3.2.6а. Группы становятся выше и короче с ростом крутизны начального условия. Вертикальная асимметрия групп, определенная по максимальным амплитудам гребней и ложбин,  $A_{cr} / A_{lr}$ , построена на Рис. 3.2.6 звездочками и сравнена с аналогичной характеристикой для однородных волн Стокса. Из рисунка следует, что по величине вертикальной асимметрии различий между однородными волнами и солитонными группами не наблюдается.

Пример интенсивного солитона огибающей (эксперимент №9 из Табл. 3.2.1 с  $k_0 A_s = 0.3$ ) дан на Рис. 3.2.7. Разными линиями на Рис. 3.2.7а,б показаны профили смещения поверхности в моменты максимального гребня (синим) и ложбины (черным), красным показана область, занимаемая границей воды в разные моменты времени (огибающая). Ясно видно разное число волн заполнения во временной и пространственной записях; группа на моментальном снимке Рис. 3.2.7а включает примерно 3 волны, в то время как группа на временной записи Рис. 3.2.7б визуальнее шире.

Пространственный и временной спектры на Рис. 3.2.7в,г также построены для двух моментов: максимального гребня и самой глубокой ложбины. Видно, что в момент максимального гребня локальный минимум между первой и второй гармониками в спектре волновых чисел исчезает (Рис. 3.2.7в). В области длинных волн ситуация обратная: там наблюдается больший уровень энергии в момент наиболее глубокой ложбины. На частотном спектре эта динамика практически неразличима (Рис. 3.2.7г), что подтверждает, что динамика спектра волновых чисел обусловлена сложением энергии, содержащейся в связанных волнах. Для меньших крутиз (например, в случае  $k_0 A_s = 0.20$ ) изменения частотного спектра практически незаметны.

### **Лабораторное моделирование интенсивных солитонов огибающей**

Лабораторное моделирование интенсивных солитонов огибающей было проведено группой Технического университета Берлина. Постановка эксперимента (краевые условия, позиции датчиков, цели измерений) выполнялась совместно. Схема лотка дана на Рис. 3.2.8.

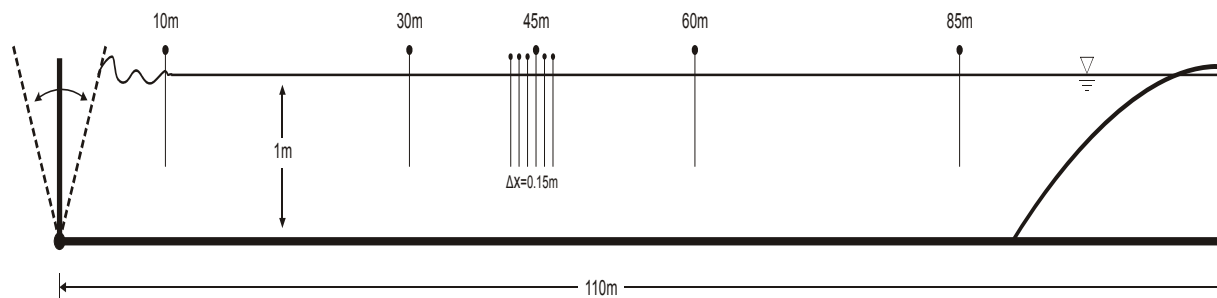


Рис. 3.2.8. Схема волнового лотка Технического университета Берлина и размещение измерителей. Волнопродуктор размещен слева, справа – абсорбирующий пляж.

Эффективная длина лотка 90 м, глубина 1 м и ширина 8 м, пластинчатый волнопродуктор работал в режиме качания с центром вращения на дне бассейна. Условие на волнопродукторе задавалось в соответствии со следующими тремя различными подходами:

**Метод 1:** в форме солитона НУШ для компоненты свободных волн. Для этого решение (3.2.1) нужно переписать для временной записи в следующей форме:

$$A(x, t) = A_s \frac{\exp\left[i \frac{s^2}{2} k_0 x\right]}{\cosh\left[\sqrt{2}s k_0 (x - C_{gr} t)\right]}, \quad (3.2.6)$$

(здесь значение  $x$  может быть выбрано произвольно, например  $x = 0$ ) и использовать формулу реконструкции первого порядка для смещения поверхности  $\eta = \text{Re}(A(t) \exp(i\omega_0 t))$ ;

**Метод 2:** в виде временной последовательности смещения поверхности, полученной на основе численного моделирования уравнений Эйлера как описано выше;

Таблица 3.2.2. Условия для «удачных» лабораторных экспериментов по генерации интенсивных солитонов огибающей.

Код эксперимента	$k_0 A_s$	$\omega_0$ , рад/с	$k_0 h$	Максимальная частота, воспроизводимая волнопродуктором, $\omega_{max}$ , рад/с	Метод задания условия на волнопродукторе	Фаза волн в группе	Стабильность группы
29.14	0.2	6.86	4.80	12	2	гребень	да
30.07	0.2	6.86	4.80	12	2	ложбина	да
30.13	0.3	6.86	4.80	12	2	гребень	да
30.16	0.3	6.86	4.80	12	2	ложбина	да
30.29	0.3	5.92	3.57	20	1	гребень	нет
30.37	0.35	6.82	4.74	15	1	гребень	да



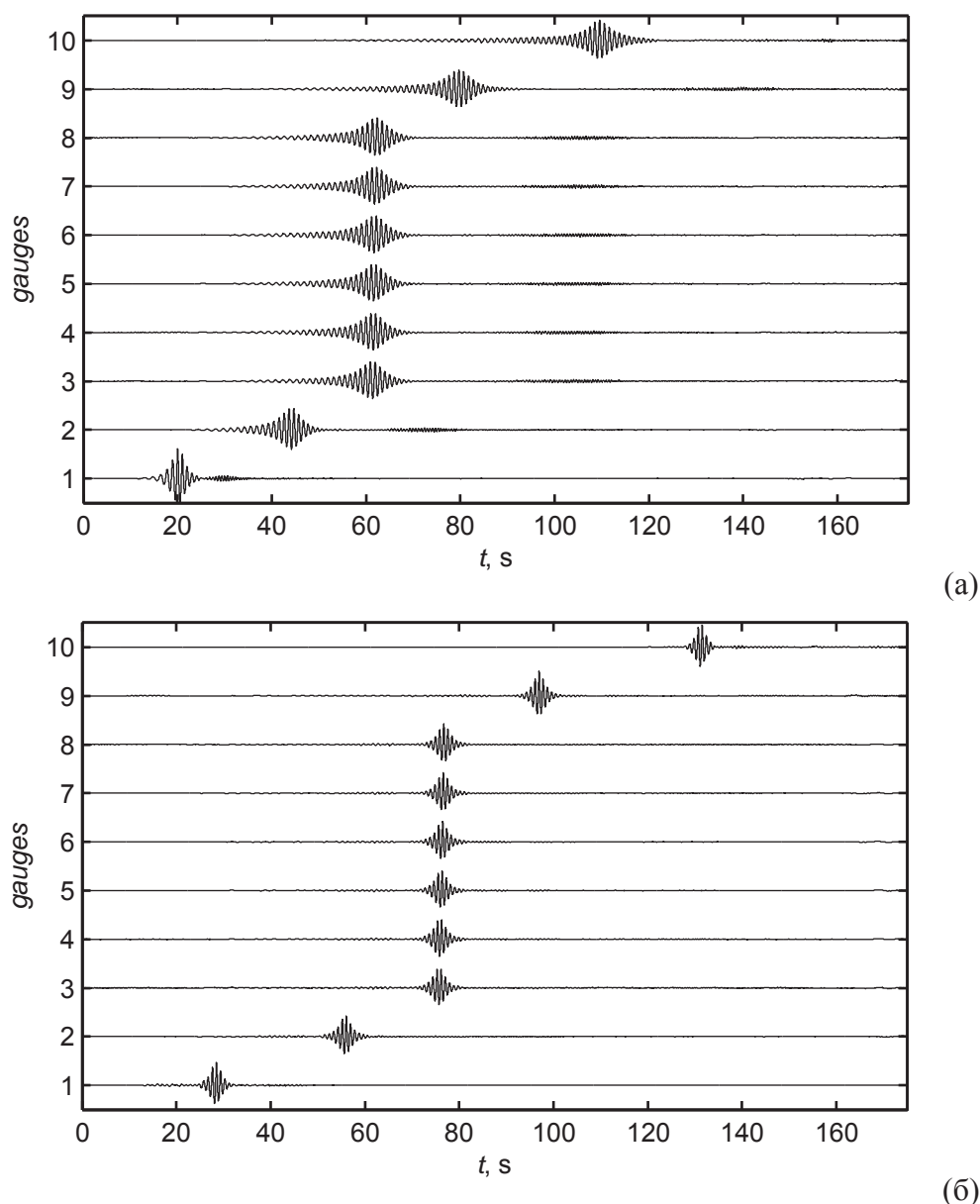


Рис. 3.2.9. Записи смещения поверхности с 10 датчиков для эксперимента No 30.29 (а) и No 30.16 (б), для них  $k_0 A_s = 0.3$ .

**Метод 3:** в форме солитона НУШ (3.2.6), но в отличие от Метода 1, – с учетом связанных волн третьего порядка (2.5.10).

Кроме того, в разных экспериментах начальные условия задавались в двух разных фазах: с максимальным гребнем или с глубокой ложбиной. Далее производился пересчет начального условия для смещения в сигнал для волнопродуктора в соответствии с гидродинамической и электрической передаточными функциями (см. подробнее в [Slunyaev et al, 2013a\*]).

Серия из всего 43 экспериментов проводилась для крутизн  $k_0 A_s = 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35$  и различных частот несущей  $\omega_0 = 5.92, 6.82, 6.86, 7.52$  рад/с (по линейной дисперсионной

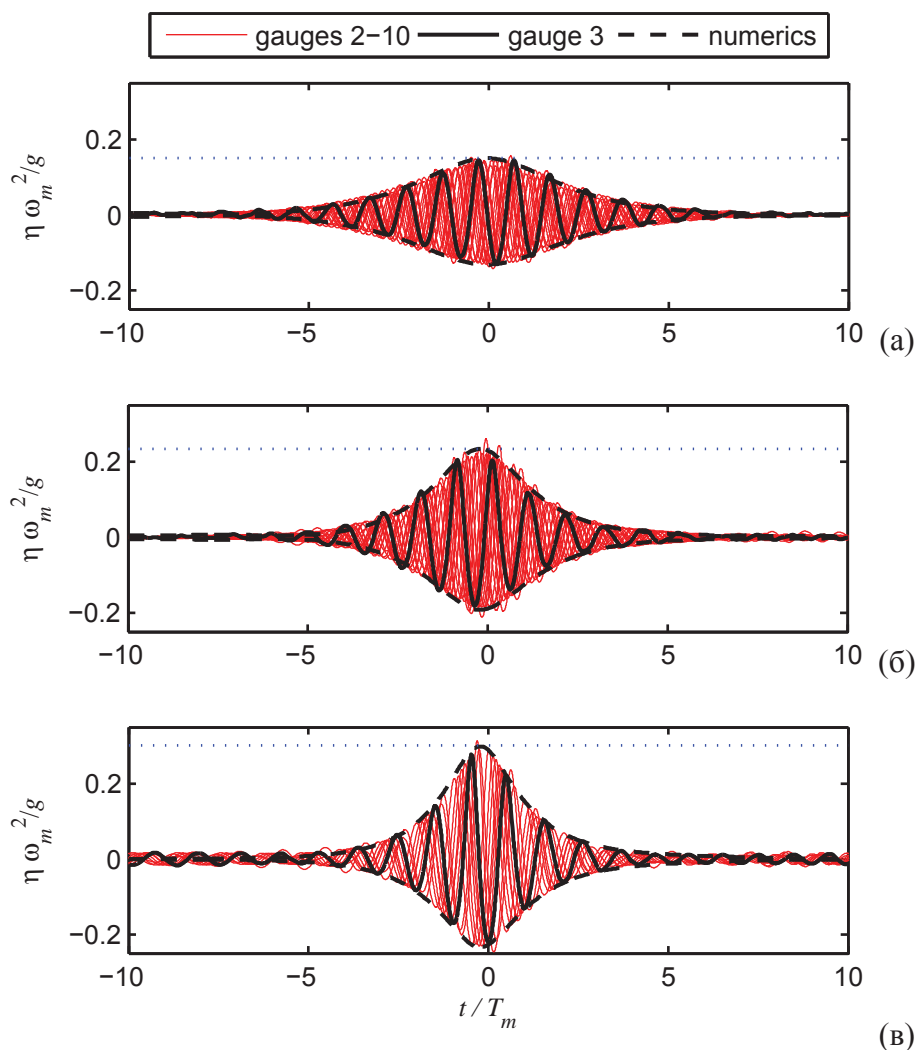


Рис. 3.2.10. Стационарные волновые группы. Красной тонкой линией построены смещения поверхности на разных датчиках; черной сплошной построена запись с 3-го датчика: эксперименты No 29.14 и No 30.07,  $k_0 A_s = 0.20$  (а), эксперименты No 30.13 и No 30.16,  $k_0 A_s = 0.30$  (б) и эксперимент No 30.37,  $k_0 A_s = 0.35$  (в). Огибающая, построенная длинным пунктиром, получена по результатам численного расчета уравнений Эйлера для подобранной крутизны начальных условий (эксперименты № 1, 5 и 8 из Табл. 3.2.1). Горизонтальные пунктирные линии соответствуют наблюдаемым крутизнам  $A_{cr} \omega_m^2/g \approx 0.150, 0.235, 0.301$ .

зависимости безразмерные глубины  $k_0 h = 3.57, 4.74, 4.80, 5.76$ ). Эксперименты с обрушением не рассматривались. Параметры избранных экспериментов приведены в Табл. 3.2.2. Многие из попыток увенчались неудачей: группы демонстрировали излучение вперед и назад, так что на длине лотка форма группы претерпевала значительные искажения (расплывалась), подобно примеру на Рис. 3.2.9а.

Устойчивая волновая группа была воспроизведена в эксперименте No 30.16 ( $k_0 A_s = 0.3$ , Метод 2, см. Табл. 3.2.2), записи с различных датчиков показаны на Рис. 3.2.9б. Как в численных экспериментах, для каждого эксперимента определялась скорость группы  $V$ , а

затем визуально оценивалась изменчивость ее формы в сопровождающей системе координат. Эксперименты, в которых форма группы сохранялась, приведены в Табл. 3.2.2 (кроме No 30.29) и рассматриваются далее. Смещения поверхности в сопровождающей системе координат для разных крутизн волн построены по этим данным на Рис. 3.2.10 (красные и черная сплошные линии) и сравнены с результатами соответствующих численных экспериментов в рамках исходных уравнений, описанных выше (длинный пунктир). Видно

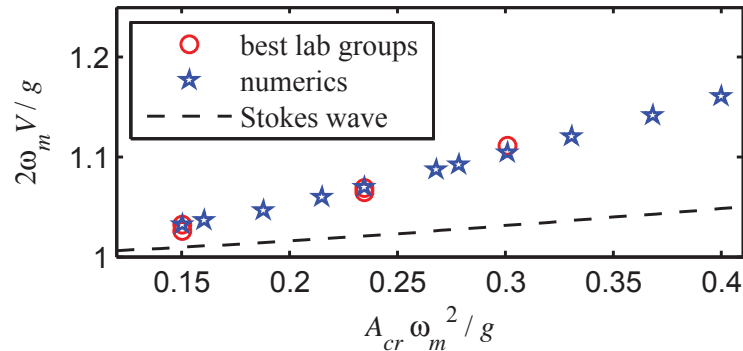


Рис. 3.2.11. Скорости стационарных нелинейных групп по данным численных (звездочки) и удачных лабораторных (кружки) экспериментов. Они сравнены со скоростью однородных волн Стокса для аналогичной крутизны.

очень хорошее совпадение между численным расчетом и лабораторными измерениями. Крутизна волновых групп, определенная по гребню и средней частоте, равна  $A_{cr} \omega_m^2 / g \approx 0.150, 0.235, 0.301$  соответственно и построена горизонтальным пунктиром на Рис. 3.2.10. Рис. 3.2.10в демонстрирует случай наиболее крутой стационарной группы волн, воспроизведенной в лабораторных условиях. Ей соответствует одна из самых крутых солитонных групп, полученных по результатам численного моделирования.

График скоростей стационарных групп в зависимости от крутизны максимального гребня построен на Рис. 3.2.11: кружками для удачных лабораторных экспериментов и звездочками для численных. Скорости нормированы на линейную групповую скорость, определенную для временных записей как  $C_{gr} = g / (2\omega_m)$ . Отметим прекрасное совпадение между численными и лабораторными результатами. Скорость солитонов НУШ (3.2.6) равна  $C_{gr}$  и не зависит от их амплитуды, в то время как на Рис. 3.2.11 такая зависимость очевидна. Скорость солитонов огибающей растет с амплитудой, в случае максимальной группы в лаборатории скорость группы превышает  $C_{gr}$  на 11%, для максимальной группы в численных счетах превышение составляет 16%. Для примера на Рис. 3.2.11 пунктиром построен нелинейный сдвиг скорости для волны Стокса. Видно, что нелинейная поправка к скорости солитонной группы существенно превышает Стоксову поправку.

В качестве вывода относительно эффективности разных граничных условий по генерации интенсивных солитонов огибающей можно подытожить, что разница между Методом 1 и 2 не очевидна, оба этих метода существенно лучше, чем Метод 3 (учет связанных волн по теории НУШ высокого порядка). Начальное условие с крутизной  $k_0 A_s = 0.35$  в численных экспериментах привело к образованию слишком крутой (вероятно, обрушающейся) волны, которая не может быть рассчитана методом НОСМ, а Метод 1 (аналитическое решение НУШ) формально дает ответ при любой крутизне.

Для сравнительно низких частот работы волнопродуктора параметр глубины падал до  $k_0 h \approx 3.6$ , в то время как использовалось решение для предела бесконечной глубины. В этом случае отношение коэффициента нелинейности к коэффициенту дисперсии в НУШ (2.2.33) уменьшается примерно в 1.8 раз, и тогда амплитуда начального условия должна быть выше аналогичной в случае бесконечно глубокой воды почти на треть. Этот эффект (который не учитывался при задании сигнала волнопродуктора) может объяснить структурную неустойчивость волновых групп в ряде экспериментов. Кроме эффектов затухания, среди причин, почему в лабораторных условиях максимальные солитоны огибающей оказались чуть ниже, чем в численных, можно предложить возможную роль поперечной динамики, не учитываемой в численном моделировании.

### **3.3 Моделирование бризера (одной моды модуляционной неустойчивости волны Стокса) в рамках исходных уравнений гидродинамики**

По-видимому, первым вопрос о максимально высокой волне, образующейся в результате модуляционной неустойчивости реальных волн, для которых условие малой нелинейности нарушается, был обсужден в работе [Tanaka, 1990] на материале численного моделирования волновых цугов в рамках полного по нелинейности кода Долда и Перегринна, решающего уравнение Лапласа с переменной границей (см. ссылки в [Henderson et al, 1999]). Там же были приведены сравнение с расчетом НУШ и результаты имевшихся немногочисленных лабораторных измерений [Su & Green, 1985] (они примерно в полтора раза занижали значения, полученные в численных экспериментах [Tanaka, 1990]). Начальные условия в работе [Tanaka, 1990] соответствовали Стоксовой волне с учетом слагаемых первых трех порядков по крутизне  $k_0 H/2 = 0.05 \dots 0.17$ , с 10% модуляцией на длине, соответствующей максимально неустойчивой моде (согласно классической теории НУШ, см. Раздел 2.3). Согласно [Tanaka, 1990], максимальное усиление волновых гребней для необрушающихся случаев соответствует примерно 3.4, а в случае обрушения – 3.7.

Позднее лабораторные результаты [Su & Green, 1984] сравнивались с новыми лабораторными экспериментами в [Tulin & Waseda, 1999], а еще позднее – дополнительно с численными расчетами в рамках разных моделей [Waseda, 2005]. В работе [Tulin & Waseda, 1999] максимальное усиление волн в экспериментальном лотке было больше, чем в [Su & Green, 1984] и достигало примерно 2.5, схожее значение – в лабораторных экспериментах [Zhang et al, 2014].

К. Хендерсон с коллегами [Henderson et al, 1999] выполнили более детальное исследование нелинейной стадии модуляционной неустойчивости, чем [Tanaka, 1990] (в рамках того же численного кода); начальное условие задавалось в виде модулированного волнового пуга из  $n$  волн и  $m$  модуляций, где  $n$  и  $m$  – целые числа. Одним из основных результатов стало разделение случаев с обрушением и без обрушения на плоскости параметров начальная крутизна – длина модуляции. Исследования степени усиления волн во время нелинейной фокусировки сделано не было. Судя по представленным в работе иллюстрациям, превышение достигает немногим более трех раз. Профиль максимальной волны был сопоставлен с бризерными решениями НУШ и сделан вывод об их значительном сходстве (в работе [Clamond et al, 2006] также подчеркивалась схожесть бризерных решений и групп, полученных в результате самофокусировки сильно нелинейных волн).

Бризероподобные группы наблюдались в ряде численных (например, [Henderson et al.

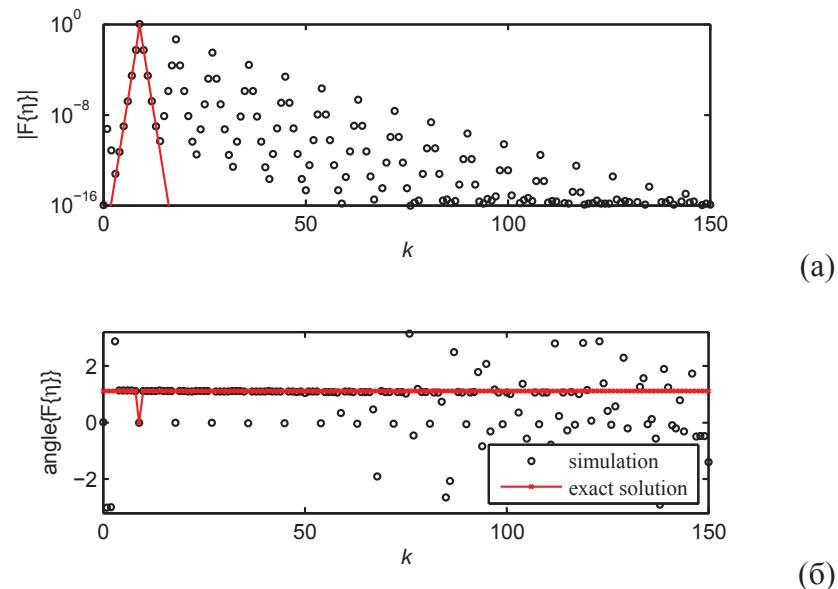


Рис. 3.3.1. Спектр Фурье: амплитуды (а) и фазы (б) начального условия. Кружки – условие для численного моделирования исходных уравнений, красная линия – соответствующее решение НУШ.

1999; Clamond et al. 2006]) и лабораторных экспериментов [Karjanto & van Groesen 2010; Chabchoub et al, 2011, 2012, 2012\*, 2013a,b; Clauss et al. 2012; Shemer & Alperovich 2013]. Предельный случай, когда короткие группы интенсивных волн распространяются на нулевом пьедестале, обсуждался в предыдущем разделе диссертации. Близость бризероподобных волн в рамках обобщенных уравнений НУШ к решению интегрируемого уравнения обсуждалась в [Schober, 2006; Ankiewicz et al, 2009]. Потому объекты, подобные бризерам НУШ должны существовать в реальности, во всяком случае, в контролируемых условиях лабораторных лотков для волн с узким спектром.

В настоящем разделе исследована нелинейная самофокусировка амплитудно модулированных цугов интенсивных волн, включая нелинейную стадию процесса. Поскольку бризеры являются ключевыми элементами для описания нелинейной динамики модулированных волн в рамках слабо нелинейного приближения, можно ожидать, что они играют главную роль и в случае сильной (относительно сильной) нелинейности, и тогда установление связей между слабо нелинейной теорией и динамикой в рамках исходных уравнений позволит получить эффективное описание сильно нелинейной динамики.

Понимая бризер как одну моду модуляционной неустойчивости, особое внимание в его исследовании уделяется заданию начальных условий. Они задаются в виде цуга Стоксовых волн (полученных численно с высокой точностью), далее функции смещения поверхности и потенциала на поверхности домножаются на профиль модуляции так, чтобы амплитуда несущей гармоники и ее модуляция были в полном соответствии с аналитическим бризерным решением НУШ (рассматриваются периодические в пространстве бризеры Ахмедиева см. Раздел 2.3), см. детали в нашей работе [Slunyaev & Shrira, 2013\*]. Такое начальное условие учитывает многие (а не один) спектральные сателлиты и специфический сдвиг фаз между Фурье компонентами несущей волны и модуляции (см. Раздел 2.3 и Рис. 3.3.1). В большинстве случаев модуляция соответствовала 1% возмущению ближайших спектральных компонент ( $\Delta_1 = 0.01$  в (2.3.22)). Теоретическое описание усиления волн, времени жизни и времени фокусировки в рамках слабо нелинейной теории представлено формулами (2.3.9), (2.3.11) и (2.3.21).

Эволюция волн в этом разделе считалась в рамках уравнений Эйлера в конформных переменных для плоских волн на поверхности бесконечно глубокой воды, часть численных экспериментов была параллельно рассчитана методом NOSM, учитывающим вплоть до 7-волновых взаимодействий ( $M = 6$ , см. Приложение Б); достоверными считались результаты, когда оба кода давали близкие результаты.

## Примеры эволюции бризеров в рамках полных уравнений гидродинамики

Сначала была проверена численная реализация бризерного решения в рамках численного кода НУШ, показавшая с одной стороны возможность воспроизведения аналитического решения на довольно больших временах, а с другой – эффект численного шума, проявившийся в зарождении других мод неустойчивости (других бризерных решений), соответствующий эффектам многомодовой неустойчивости, обсуждавшимся в классической работе [Yuen & Lake, 1982].

Пример динамики бризера в рамках исходных уравнений с начальными параметрами  $k_0 H/2 = 0.05$ ,  $N_w = 9$  (в одной модуляции 9 волн),  $\Delta = 0.01$  приведен на Рис. 3.3.2. На Рис. 3.3.2а показана зависимость максимума смещения поверхности от времени: для численного расчета (точки, соединенные линиями) и для аналитического бризерного решения НУШ (красный пунктир). Горизонтальной штрих-пунктирной линией обозначен максимум усиления в рамках теории НУШ (2.3.9). Видно, что в рамках полных уравнений фокусировка наступает существенно позднее (что согласуется с расчетом инкремента роста волн, входящим за рамки НУШ [Longuet-Higgins, 1978]), но величина усиления хорошо совпадает с предсказанием НУШ. На Рис. 3.3.2б кружками построен спектр Фурье смещения поверхности в момент максимальной фокусировки ( $t \approx 111T_0$ ), а также аналитическое решение в момент максимума ( $t = 0$ ). На Рис. 3.3.2в приведены аналогичные данные, но для момента времени после дефокусировки: моменты времени выбраны симметрично относительно моментов максимальной фокусировки,  $t \approx 937T_0$  для численного расчета и  $t \approx 692T_0$  для аналитического решения. На Рис. 3.3.2г приведена эволюция амплитуд спектра Фурье: несущей гармоники и спектральных сателлитов. Виден сдвиг энергии на первых сателлитах в сторону длинных волн (Рис. 3.3.2г), хотя для более далеких сателлитов ситуация может быть обратной (Рис. 3.3.2б). Рис. 3.3.2в,г свидетельствуют о приближенном возврате волн в исходное состояние после акта фокусировки, хотя более пристальное рассмотрение динамики спектральных сателлитов говорит о возбуждении новых мод неустойчивости. В сравнении с описанием НУШ, в процессе фокусировки доминантная мода отдает меньше энергии (Рис. 3.3.2г), но из-за вклада связанных волн итоговое усиление амплитуды гребней оказалось очень близким к прогнозу НУШ для амплитуды огибающей (Рис. 3.3.2б).

Эволюция более крутых волн, с крутизной  $k_0H/2 = 0.09$ , проиллюстрирована на Рис. 3.3.3. В этом случае время фокусировки значительно сократилось (и снова фокусировка в рамках полных уравнений происходит медленнее), а коэффициент усиления в рамках полных уравнений  $AI_{cr}$  оказался существенно выше, чем прогноз НУШ  $AI_{env}$ . В момент

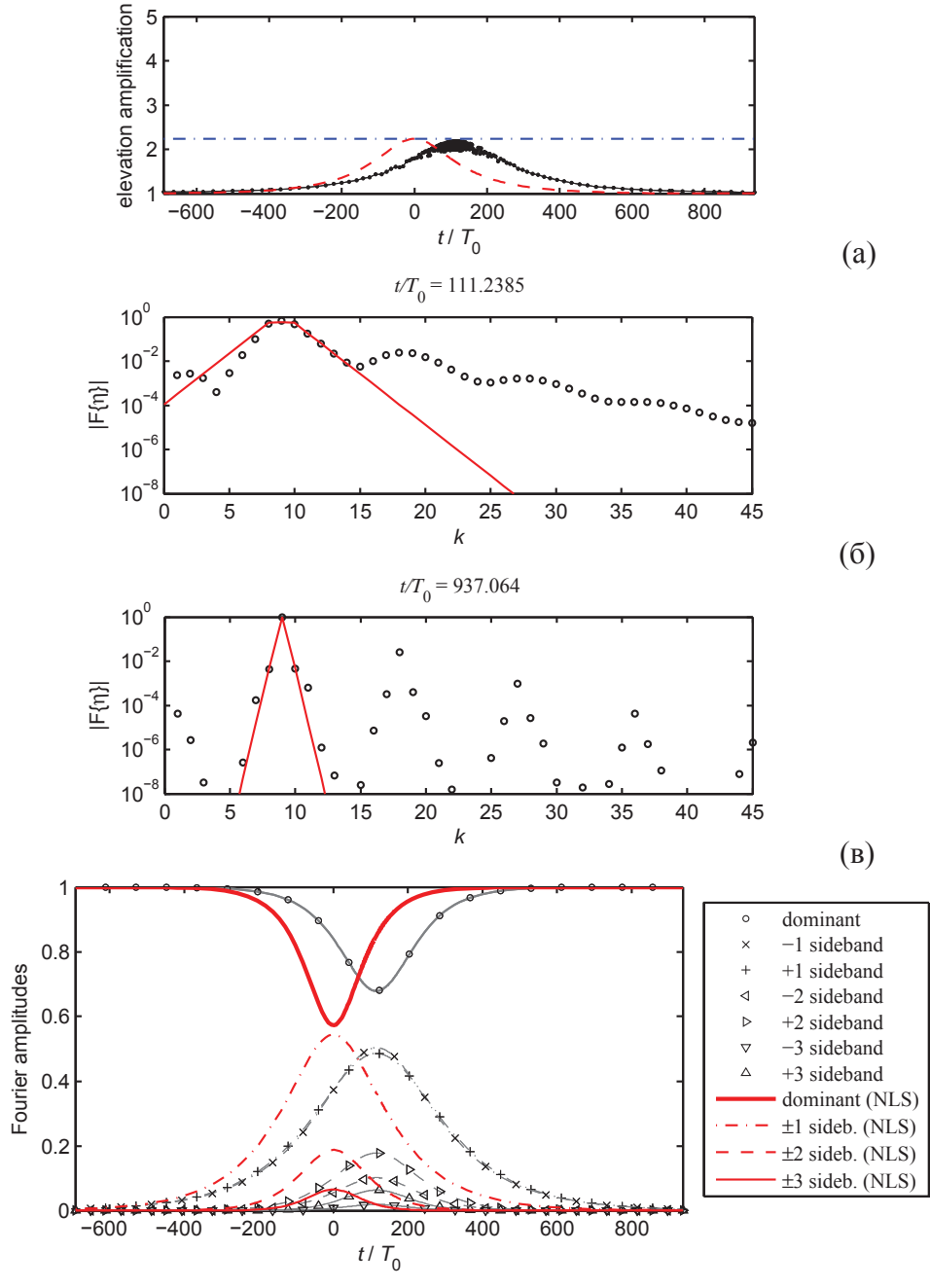


Рис. 3.3.2. Расчет бризера в рамках исходных уравнений для параметров  $k_0H/2 = 0.05$ ,  $N_w = 9$ ,  $\Delta = 0.01$ . (а): усиление гребня  $AI_{cr}$  (точки на линии), аналитическое решение НУШ  $AI_{env}$  (пунктир) и максимальное усиление  $1 + 2\lambda$  (штрих-пунктир). (б): нормированный спектр Фурье для смещения поверхности в момент максимальной фокусировки (кружки) и соответствующее аналитическое решение НУШ для  $t = 0$  (сплошная линия). (в): как на (б), но рассчитанный спектр построен в момент  $t \approx 937T_0$ , а аналитическое решение – для  $t \approx 692T_0$ . (г): эволюция нормированных амплитуд Фурье; красные линии построены для аналитического решения, символы поверх серой линии – результат моделирования.



фокусировки максимальная волна становится столь крутой, что Фурье спектр спадает медленно. Одновременно группа становится столь короткой, что спектр огибающей становится очень широким. В результате, пропадает выраженный гребенчатый характер спектра (ср. Рис. 3.3.2б и Рис. 3.3.3б).

Из анализа Рис. 3.3.3в следует, что в отличие от предыдущего случая доминантная гармоника отдала возмущению даже большую энергию, чем предсказывает решение НУШ. Также неожиданно, что максимальное усиление волн достигается несколькими периодами позднее момента максимальной отдачи энергии доминантной гармоникой. Хотя

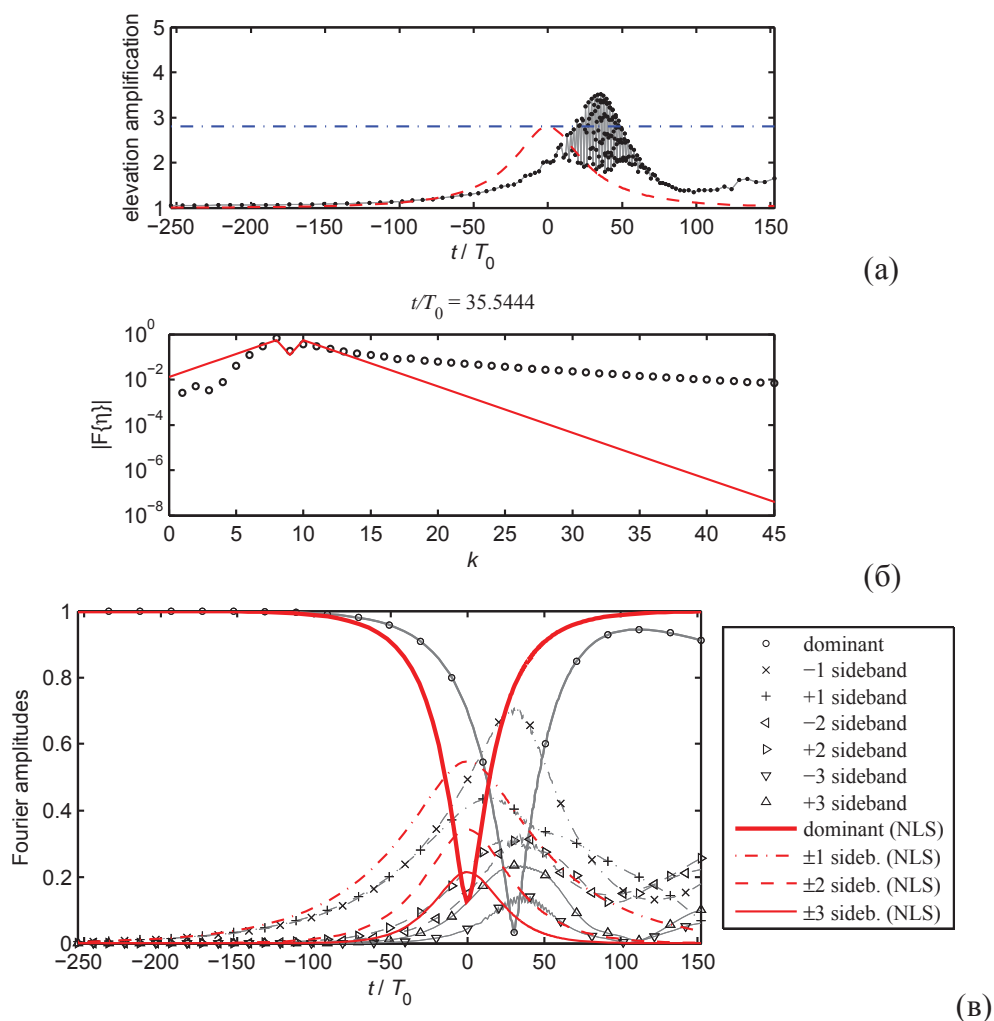


Рис. 3.3.3. Расчет бризера в рамках исходных уравнений для параметров  $k_0H/2 = 0.09$ ,  $N_w = 9$ ,  $\Delta = 0.01$ . (а): усиление гребня  $AI_{cr}$  (точки на линии), аналитическое решение НУШ  $AI_{env}$  (пунктир) и максимальное усиление  $1 + 2\lambda$  (штрих-пунктир). (б): нормированный спектр Фурье для смещения поверхности в момент максимальной фокусировки (кружки) и соответствующее аналитическое решение НУШ для  $t = 0$  (сплошная линия). (в): эволюция нормированных амплитуд Фурье; красные линии построены для аналитического решения, символы поверх серой линии – результат моделирования.

длинноволновая часть спектра огибающей на Рис. 3.3.3б расположена ниже коротковолновой, на какое-то время первый левый спутник содержит максимум энергии (см. Рис. 3.3.3в), тогда в цуге «пропадает» одна волна (подобно наблюдениям [Henderson et al, 1999]). Эволюция спектральных спутников на Рис. 3.3.3в выглядит очень сложно; в частности, они достигают локальных максимумов в разные моменты времени, что, вероятно, снижает потенциальную возможность самофокусировки. Также очевидно зарождение других неустойчивых мод, которые нарастают после стадии квазирекурренции.

Приведенные примеры демонстрируют существование сильно нелинейных аналогов бризерных решений НУШ. Примененный подход позволяет рассматривать отдельные бризеры (моды неустойчивости); их индивидуальную динамику мы далее будем рассматривать с целью построения «карты соответствия» между решениями исходных уравнений и слабо нелинейной теорией.

### Картина эволюции бризеров в рамках уравнений Эйлера

Для построения полной картины параметров бризеров в рамках исходных уравнений гидродинамики, было проведено множество экспериментов с крутизной в диапазоне  $k_0H/2 = 0.04...0.24$  для целых чисел модуляции  $N_w = 2...20$ , а также небольшое число расчетов – для дробных. Поскольку очень крутые волны обрушиваются до того, как успевают существенно вырасти, мы далее ограничиваем наш интерес областью параметров начальных условий с числом волн  $N_w = 3, 7/2, 4, 5, \dots, 20$  и крутизнами  $k_0H/2 = 0.04...0.16$ . Степень начального возмущения, как и прежде,  $\Delta = 0.01$ .

В отличие от уравнений для огибающей, в рассматриваемом случае способ введения функции огибающей не очевиден, потому мы будем рассматривать сразу 3 характеристики интенсивности волн: усиление гребня  $AI_{cr}$ , усиление ложбины  $AI_{tr}$  и усиление высоты  $AI_H$ . Когда в численном домене только одна группа волн, эти величины можно определять как

$$AI_{cr} \equiv \frac{\max_t \max_x \eta(x,t)}{\max_x \eta(x,t = -t_f)}, \quad AI_{tr} \equiv \frac{\min_t \min_x \eta(x,t)}{\min_x \eta(x,t = -t_f)},$$

$$AI_H \equiv \frac{\max_t (\max_x \eta(x,t) - \min_x \eta(x,t))}{\max_x \eta(x,t = -t_f) - \min_x \eta(x,t = -t_f)}. \quad (3.3.1)$$

Здесь момент  $t = -t_f$  соответствует началу численного расчета,  $t_f$  – время фокусировки для решения НУШ.

В нашем анализе не делается различий между способами определения волны, up-crossing или down-crossing (см., например, [Massel, 1996; Holthuijsen, 2007]). Также следует

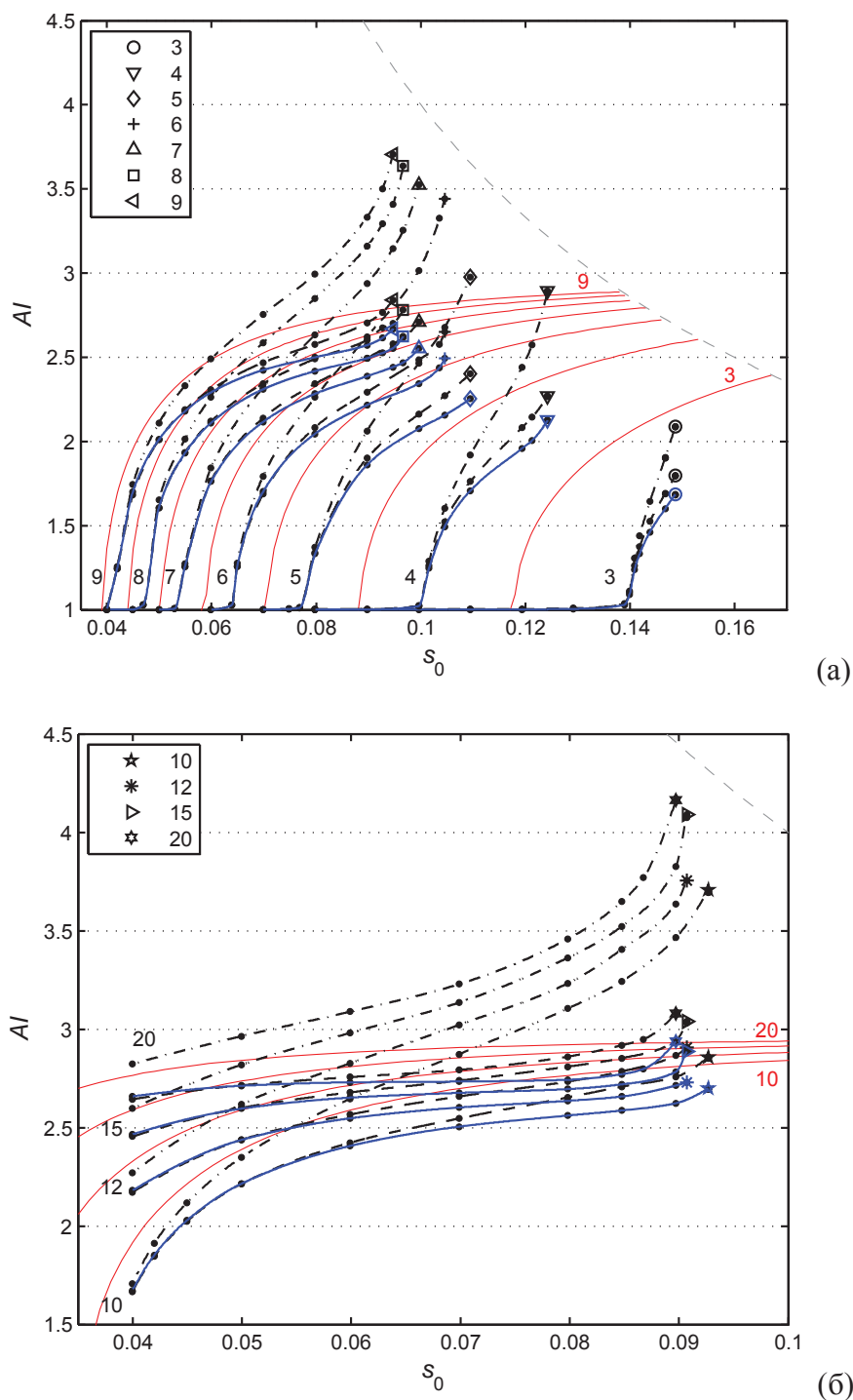


Рис.3.3.4. Символы, соединенные линиями, показывают усиление гребня  $AI_{cr}$  (черный штрих-пунктир), ложбины  $AI_{tr}$  (черный пунктир) и высоты  $AI_H$  (синяя сплошная). Красными линиями построено решение НУШ для  $AI_{env}$ . Числа при линиях указывают значения  $N_w$  (см. также легенду). По горизонтали отложена крутизна, определенная для несущей гармоники,  $s_0 = k_0 A_0$ . Пунктир в правом верхнем углу обозначает условную область обрушения  $0.4/s_0$ . Показаны только случаи без обрушения.

иметь в виде, что здесь мы рассматриваем не временные записи, а моментальные снимки волн. Общая картина усиления волн в результате нелинейной самофокусировки показана на Рис. 3.3.4 (без обрушения), а также Рис. 3.3.5 (с обрушением). Рис. 3.3.4 разбит на 2 части - по числу волн в модуляции  $N_w$ . По горизонтали на Рис. 3.3.4, 3.3.5 отложена крутизна, определенная по несущей гармонике, она немного меньше полной крутизны волн. Так, крутизна  $k_0H/2 = 0.15$  соответствует  $s_0 \approx 0.1486$ .

Сравнивая кривые для решения НУШ и по данным численных расчетов, можно сделать следующие заключения. Некоторые бризеры не растут вопреки прогнозу теории НУШ. Например, модуляция длиной 3 волны начинает нарастать только при  $k_0H/2 > \sim 0.142$ , что существенно больше, чем в рамках слабо нелинейной теории. Этот вывод согласуется с работой [Longuet-Higgins, 1978], где показана переоценка области модуляционной неустойчивости НУШ. В численных экспериментах [Henderson et al, 1999] нарастания таких модуляций не было обнаружено вообще. В целом, картина линий в рамках слабо нелинейной теории и численного моделирования исходных уравнений получилась схожей. В частности, более длинные модуляции приводят к большему усилению. В то же время абсолютные значения могут сильно отличаться даже в случае малой крутизны начального условия, как в случае на Рис. 3.3.3а.

Согласно Рис. 3.3.4, усиление высот  $A_H$  всегда меньше, чем усиление ложбин  $A_T$ , что в

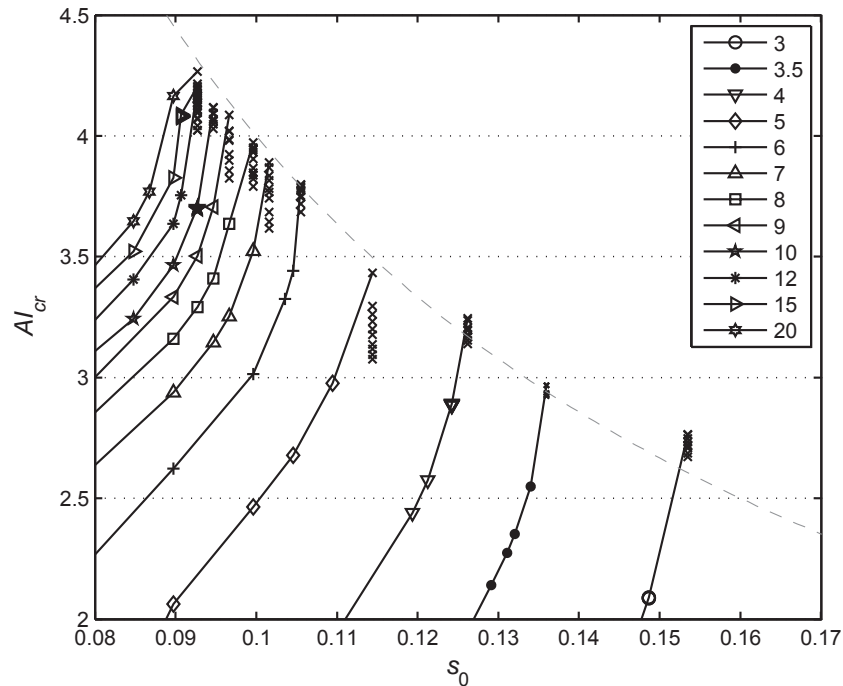


Рис. 3.3.5. Увеличенная область диаграммы усиления гребней на Рис. 3.3.3. Крестами показаны случаи с обрушением, другими символами (см. легенду) – без обрушения.

свою очередь меньше усиления гребней  $A_{cr}$ . Максимальное усиление гребней превышает 4 раз, максимальное усиление ложбин – чуть более 3, а усиление высот – всегда менее 3. В частности, три модулированные волны никогда не превышают порога «волн-убийц», определенного по высоте или амплитуде гребня; для таких условий более двух может быть только  $A_{cr}$ .

Эффект обрушения ограничивает максимальные значения усиления волн для заданной длины модуляции (подробнее об использованном критерии обрушения или почти обрушения см. в нашей статье [Slunyaev & Shrira, 2013\*]). Из-за него изначально крутые волны не успевают усилиться; вблизи области обрушения наблюдаются наибольшие отличия между численным расчетом и моделью НУШ. Обрушение (или почти обрушение) начинается с крутизны  $k_0 H/2 = 0.9$  для длинного цуга (20 волн). Разделение областей режимов с обрушением и без на плоскости параметров крутизна – длина модуляции примерно соответствует картине, полученной в [Henderson et al, 1999] (в последней было рассмотрено максимум 15 волн в модуляции). Случаи с обрушением добавлены к картине усиления амплитуд гребней на Рис. 3.3.5. Для этих ситуаций для каждого выбора крутизны и длины модуляции задавалось 10 начальных условий, отличающихся расположением положения максимума модуляции относительно гребней волны, как показано на Рис. 3.3.6. По этой причине в случае обрушения значения  $A_{cr}$  на Рис. 3.3.5, обозначенные крестиками, многозначны. Из Рис. 3.3.5 видно, что условная область обрушения  $A_{cr} = 0.4/s_0$  хорошо соответствует наблюдаемому в численных экспериментах. Вблизи обрушения усиление амплитуд гребней резко увеличивается.

Асимметрия волн, образующихся в результате фокусировки, проиллюстрирована на Рис. 3.3.7, где отложены величины

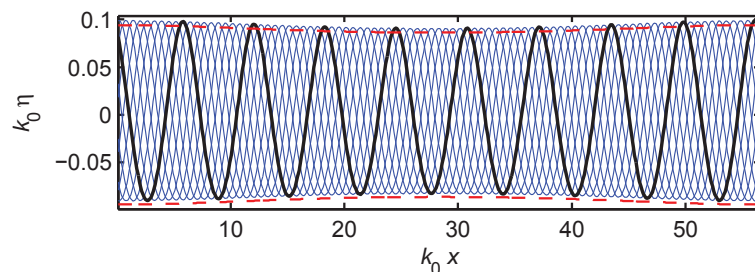


Рис. 3.3.6. 10 реализаций модулированных цугов волн Стокса (синим, одна из них дана черной линией) с одной огибающей (красный пунктир), использованные для расчета случаев с обрушением.

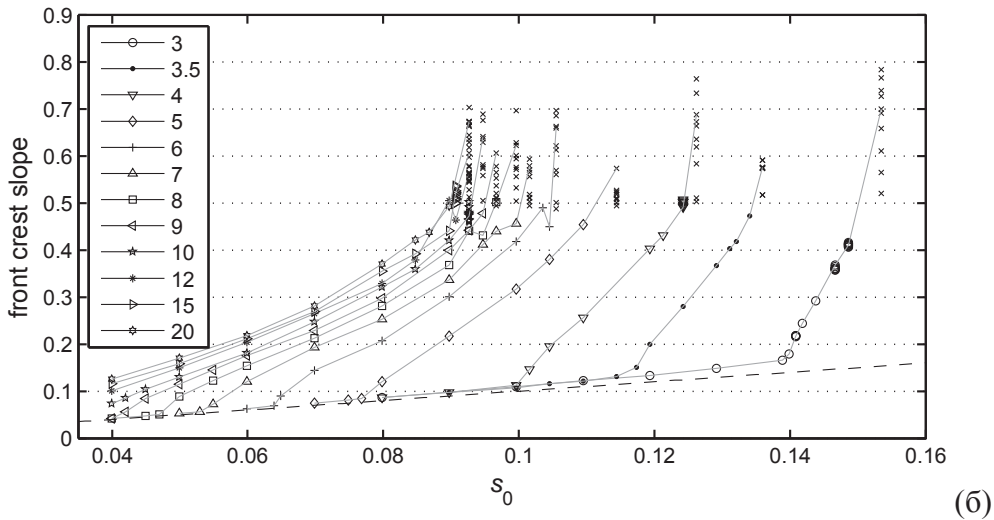
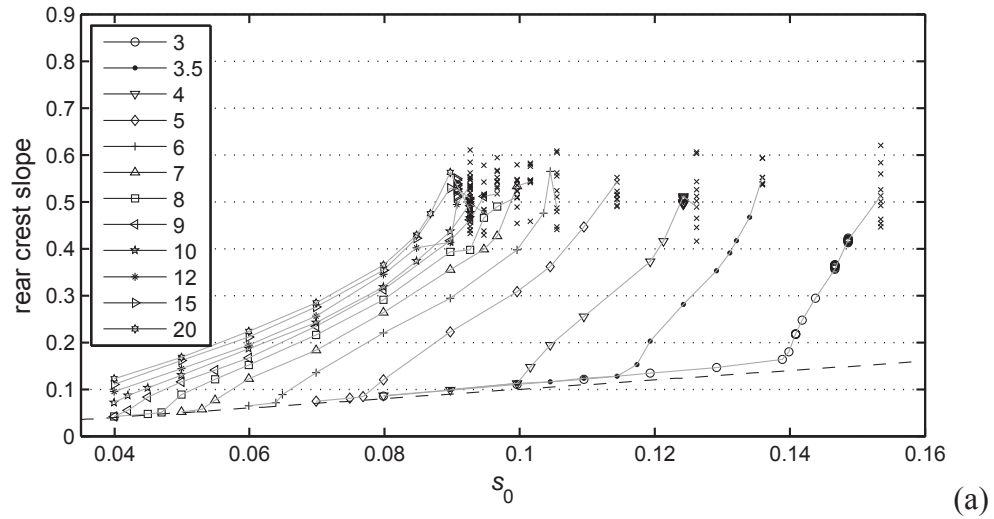


Рис. 3.3.7. Уклоны максимального гребня в зависимости от начальной крутизны  $s_0 = k_0 A_0$  для разных длин модуляций (в легенде числами даны значения  $N_w$ ): задний склон (а) и передний склон (б). Крестиками даны случаи обрушения. Пунктирная линия соответствует условию, когда максимальная крутизна равна начальной.

$$s_{cr}^{rear} = \frac{\pi H_{cr}}{2L_z^{rear}}, \quad s_{cr}^{front} = \frac{\pi H_{cr}}{2L_z^{front}}. \quad (3.3.2)$$

Здесь  $H_{cr}$  – высота гребня,  $L_z^{rear}$  и  $L_z^{front}$  – горизонтальные расстояния между координатой гребня и пересечением линии смещения поверхности невозмущенного уровня сзади и впереди гребня соответственно. В пределе малой амплитуды крутизны (3.3.2) совпадают с крутизной волн  $k_0 H/2$ . Как следует из Рис. 3.3.7, передние склоны максимальных гребней волн заметно круче задних. При обрушениях эта разница становится ярче. Не наблюдается зависимости порога обрушения от начальной крутизны условия, кажется, что обрушение контролируется только локальным значением уклона волн. Предельная крутизна, когда волны начинают обрушаться, может быть оценена как  $s_{cr}^{rear} \approx 0.5$  и  $s_{cr}^{front} \approx 0.7$ .

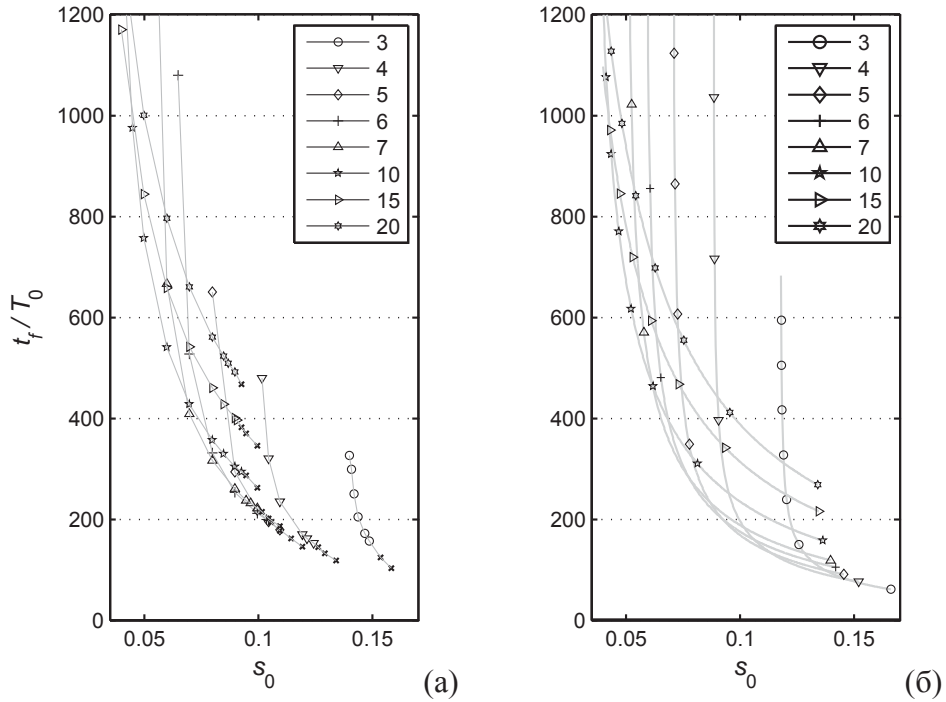


Рис. 3.3.8. Время фокусировки в зависимости от крутизны начальных условий для разных длин модуляции  $N_w$  (см. легенду): численное решение исходных уравнений (крестики для случаев обрушения) (а) и решение НУШ (б).

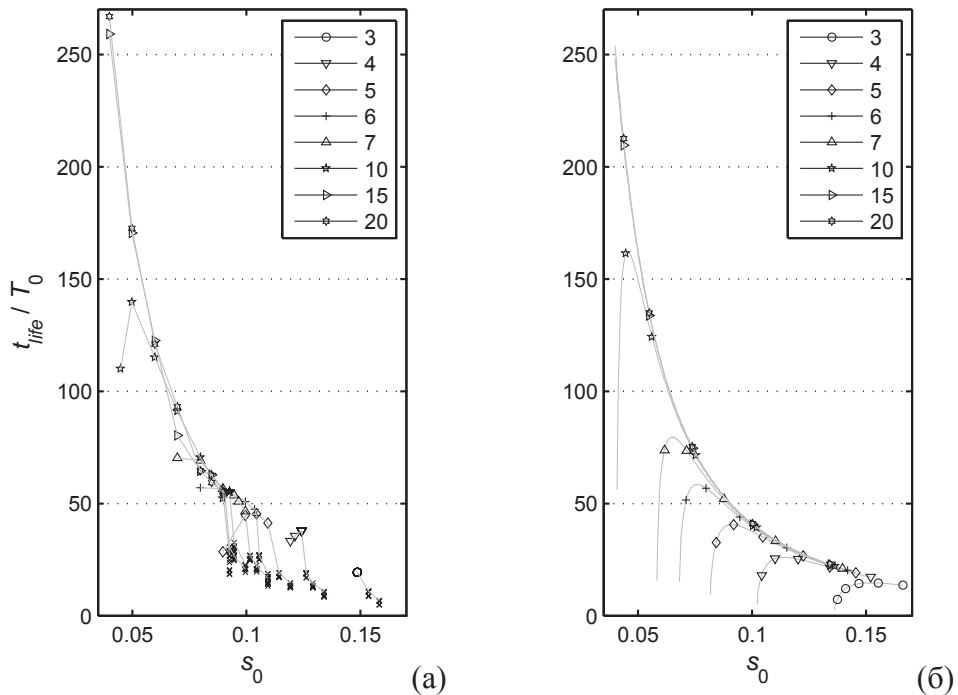


Рис. 3.3.9. Время жизни "волн-убийц": численное решение исходных уравнений (крестики для случаев обрушения) (а) и решение НУШ (б).

Времена фокусировки бризеров (от начального условия до первого фокуса) и времена жизни описываемых «волн-убийц» показаны на Рис. 3.3.8 и Рис. 3.3.9 для численных экспериментов и в рамках модели НУШ. Рис. 3.3.8 подтверждает отмеченное выше свойство,

что в рамках полных уравнений фокусировка проходит медленнее. Это обстоятельство также наблюдалось в лабораторных экспериментах [Shemer & Alperovich, 2013], опубликованных одновременно с нашей работой. По данным наших экспериментов наиболее быстро наступила фокусировка в случаях  $N_w = 3$  и  $k_0H/2 = 0.15$  и  $N_w = 4$  и  $k_0H/2 = 0.125$  – волны достигают максимума за примерно 150 периодов волн и обрушаются. Фокусировка без обрушений занимает большее время. Наиболее долгая фокусировка из рассчитанных (более 2500 периодов волн) соответствует  $N_w = 9$  и  $k_0H/2 = 0.042$ , этот случай лежит вне границ Рис. 3.3.8а и соответствует слабому превышению порога неустойчивости. Оценки НУШ качественно выглядят схоже (Рис. 3.3.8б), но заметно недооценивают время фокусировки. Отметим в заключение, что в случае выбора большей затравки  $\Delta$  времена фокусировки, конечно, сократятся (см. также Раздел 3.4).

Времена жизни "волн-убийц" определены по критериям  $AI_{cr} > 2$  для полнонелинейных расчетов (Рис. 3.3.9а) и  $AI_{env} > 2$  для решения НУШ (2.3.11) (Рис. 3.3.9б). Отметим очень хорошее сходство между этими результатами. Длинные модуляции могут вызывать долгоживущие «волны-убийцы», удовлетворяющие критерию  $AI_{cr} > 2$  в течение сотен периодов волн. С другой стороны, обрушение волн, от которого больше всего страдают длинные цуги, приводит к существенному ограничению времени жизни «волн-убийц».

### **Карта соответствия между расчетами исходных уравнений гидродинамики и приближенным аналитическим решением в рамках НУШ**

Как уже отмечалось выше, порог модуляционной неустойчивости для коротких групп интенсивных волн оказался сильно занижен теорией НУШ, что согласуется с более ранними работами. В рамках НУШ волны становятся модуляционно устойчивыми, когда  $BFI > 1$ ,

$$BFI = 2\sqrt{2}s_0N_w \quad (3.3.3)$$

(ср. с (2.3.4)), где  $s_0 = k_0A_0$  – крутизна, определенная по амплитуде Фурье доминантной гармоники. Результаты, полученные в численных экспериментах, оказываются описанными прежним условием неустойчивости  $BFI > 1$  с удовлетворительной точностью, если модифицировать индекс модуляционной неустойчивости как

$$BFI_{adj} = 2\sqrt{2}s_0(N_w - N_{adj}), \quad (3.3.4)$$

где  $N_{adj}$  – константа подгонки. Наилучшее совпадение пороговых значений крутизн, когда начинается модуляционная неустойчивость для данного  $N_w$ , наблюдается при выборе  $N_{adj} = 0.47$ ; оно чуть хуже при выборе  $N_{adj} = 0.5$ . Для малых крутизн (больших  $N_w$ ) выражение



(3.3.4) переходит в классическое определение (3.3.3). Точность определения минимальной длины неустойчивых цугов изменяется в диапазоне 0.5–3% для  $N_w = 3 \dots 9$ .

Другое яркое отличие результатов численных экспериментов и слабонелинейной теории НУШ заключается в расхождении картин усиления волн на плоскости параметров (Рис. 3.3.4). Поскольку динамика волн в рамках полных уравнений качественно очень похожа на описание НУШ, предположим возможность улучшения модели огибающей для описания полученных результатов. Отличия между расчетом полных уравнений и теории НУШ могут возникать из-за следующих эффектов:

- 1) нарушение приближения узости спектра, поскольку формирующиеся при фокусировке группы короткие;
- 2) резонансные и квазирезонансные взаимодействия волн высоких порядков, которые могут «вступать в игру», когда волны становятся крутыми;
- 3) нерезонансные взаимодействия (связанные волны), которые изменяют профиль волны, но не играют роли в ее динамике.

Теоретически, все эти эффекты могут быть учтены в рамках асимптотической теории высокого порядка, если не нарушается иерархия асимптотических разложений (что априори неизвестно). С другой стороны, обобщения НУШ для волн на воде становятся неинтегрируемыми, и тогда их использовать неудобно. Потому мы будем предполагать, что подход в терминах огибающей остается применим и в нашем случае (не конкретизируя, каким образом вводится огибающая), и что проблема может быть разбита на 2 уровня: 1) описание эволюции огибающей и 2) описание вклада связанных волн.

Методы учета связанных волн обсуждались в Разделе 2.5. Кроме там перечисленных можно добавить формулы учета связанных волн, полученные для уравнений Захарова в работе [Krasitskii, 1994] до четвертой степени по нелинейности. Для описания крутых близких к обрушению волн здесь мы используем разложение для волны Стокса 9-го порядка [Lautrup, 2011] (см. также приложение в нашей работе [Slunyaev & Shrira, 2013\*]). Хотя разложение волны Стокса не учитывает модуляцию волн, для максимума группы слагаемые асимптотического разложения (если бы оно было выписано), пропорциональные нечетным степеням производной по координате, зануляются, что дает надежду на более точное описание. Таким образом, безразмерные высоты гребня  $s_{cr}$  и ложбины  $s_{tr}$  в начальный момент времени будем определять по формулам

$$\begin{aligned} s_{cr} &= H_{Stokes}(s_0), & s_{cr} &\equiv k_0 A_{cr}, \\ s_{tr} &= -H_{Stokes}(-s_0), & s_{tr} &\equiv k_0 A_{tr}, \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

где  $s_0 \equiv k_0 A_0$  – крутизна доминантной Фурье гармоники, а функция  $H_{Stokes}$  основана на разложении волны Стокса 9-го порядка.

Для цуга из  $N_w$  волн с крутизной  $s_0$  теория НУШ прогнозирует рост модуляций с максимальным усилением крутизны доминирующей гармоники  $s^{(foc)} = s_0 A I_{env}$ , где  $A I_{env}(BFI)$  – известная функция (2.3.9), величина  $BFI$  определяется (3.3.3). Тогда максимальные безразмерные высота гребня и глубина ложбины записываются через амплитуду огибающей в фокусе как, соответственно,

$$s_{cr}^{(foc)} = H_{Stokes}(s^{(foc)}), \quad s_{tr}^{(foc)} = -H_{Stokes}(-s^{(foc)}). \quad (3.3.6)$$

Тогда усиление амплитуды гребней и ложбин равно, соответственно, отношениям  $s_{cr}^{(foc)}/s_{cr}$  и  $s_{tr}^{(foc)}/s_{tr}$ . Полученные таким образом формульные зависимости усиления гребней и ложбин, учитывающие Стоксовы поправки к форме волны, значительно больше подходят на найденные путем численного моделирования исходных уравнений (Рис. 3.3.4). Для дальнейшего улучшения аналитического описания мы подправили закон усиления огибающей по формуле

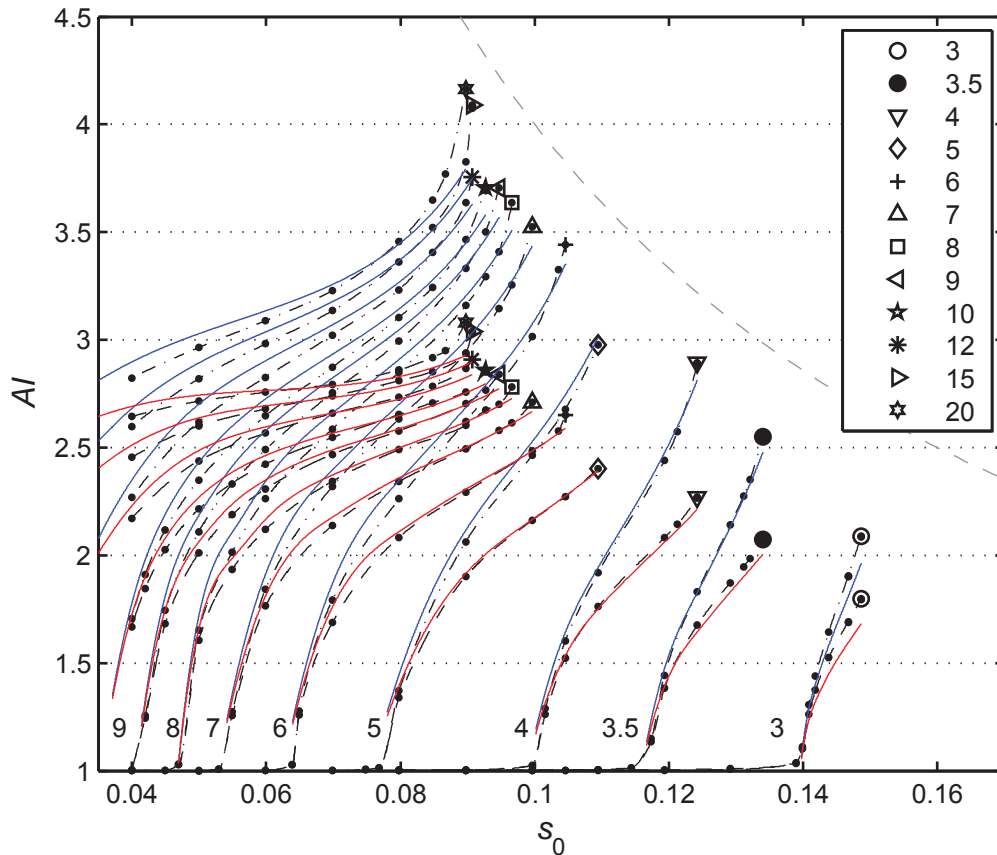


Рис. 3.3.10. Усиление гребней и ложбин волн: результаты численного моделирования полных уравнений (черные штрих-пунктирная и пунктирная линии соответственно с символами, данные совпадают с представленными на Рис. 3.3.4) и аппроксимация формулой (3.3.8) с параметрами  $\alpha = 1000$  и  $\beta = 7$  (синяя и красная линии).

$$AI_{env}^{(fit)}(BFI_{adj}) = AI_{env} \left[ 1 + \alpha (AI_{env})^\beta \right], \quad (3.3.7)$$

содержащей два параметра подгонки,  $\alpha$  и  $\beta$ , а также учитывающий поправку к границе возникновения неустойчивости через использование подправленной функции усиления огибающей с учетом (3.3.4):  $AI_{env} = AI_{env}(BFI_{adj})$ . Тогда формулы для усиления гребней и ложбин приобретают вид

$$AI_{cr}^{(fit)} = \frac{H_{Stokes}(s_0 AI_{env}^{(fit)})}{H_{Stokes}(s_0)}, \quad AI_{tr}^{(fit)} = \frac{H_{Stokes}(-s_0 AI_{env}^{(fit)})}{H_{Stokes}(-s_0)}. \quad (3.3.8)$$

Параметры подгонки определялись для всей картины линий  $AI_{cr}$  и  $AI_{tr}$  на Рис. 3.3.4 с помощью итерационной процедуры, оптимизирующей среднее квадратичное отклонение численных результатов и анзаца (3.3.8), исключая только несколько точек, очень близких к обрушению. Результат подгонки для параметров  $\alpha = 1000$  и  $\beta = 7$  дан на Рис. 3.3.10, где символами и длинным пунктиром и штрих-пунктиром показаны численные результаты для ложбин и гребней соответственно. Красная и синяя сплошные линии соответствуют решению (3.3.8). Итоговое среднеквадратическое расхождение менее 15%.

Как следует из Рис. 3.3.10, аппроксимирующая формула, использующая только один физический параметр начального условия  $BFI$  (3.3) (или  $\lambda$ , см. (2.3.8)), способна обеспечить удивительно хорошее описание коэффициентов усиления в физически интересной области параметров, включая сильно нелинейные случаи. Различия на Рис. 3.3.10 становятся значимыми только для очень крутых близких к обрушению волн с максимальным усилением (длинные цуги,  $N_w = 15, 20$ ).

## Максимальная волна в группе

Рассмотрим максимальные группы и максимальные волны более детально. Под максимальными группами имеются в виду те, которые при фиксированном числе волн в группе  $N_w$  демонстрируют максимальное усиление волн, но не достигают обрушения. Уже отмечалось, что в то время как усиление амплитуд гребней и ложбин превышает значение 3, усиление высот волн (вертикального расстояния от дна ложбины до пика гребня) менее 3 для всех необрушивающихся случаев. Для цуга из 20 волн с начальной крутизной  $k_0 H/2 = 0.93$ , относящегося к случаю обрушения,  $AI_H$  лишь немного превышает 3.

Пример профилей смещения поверхности для максимально усиленных волн показан на Рис. 3.3.11а для условий  $k_0 H/2 = 0.125$ ,  $N_w = 4$  (показана вся область численного счета). Эволюция величин превышения показана на Рис. 3.3.11б. Это случай близок к обрушению. Максимальные значения амплитуд гребней, ложбин и высот волн достигаются в близкие, но разные моменты времени (см. значки на Рис. 3.3.11б). Соответствующие профили выделены

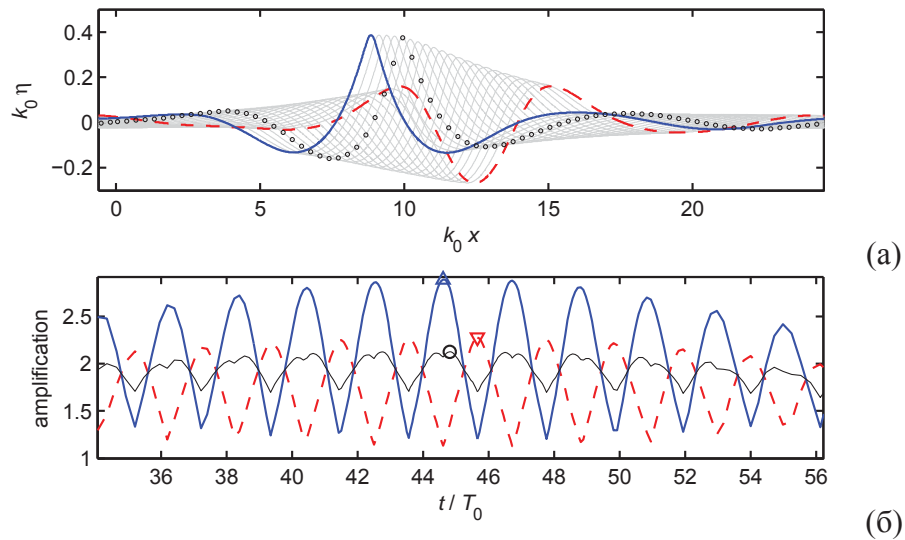


Рис. 3.3.11. Профили максимальных волн в рамках уравнений Эйлера (а) и временная зависимость индексов превышения (б) для случая  $k_0 H/2 = 0.125$ ,  $N_w = 4$ ,  $\Delta = 0.01$ . На (а) сплошная синяя линия – момент максимального гребня, красный длинный пунктир – момент самой глубокой ложбины, кружками отмечен профиль в момент самой большой высоты волн. На (б) сплошная синяя линия, красный длинный пунктир и тонкая черная линия демонстрируют, соответственно,  $A_{I_{cr}}$ ,  $A_{I_{tr}}$  и  $A_{I_H}$ ; значками отмечены моменты экстремальных значений.

на Рис. 3.3.11а, серыми линиями показаны профили волн в промежуточные моменты времени. Из Рис. 3.3.11б следует, что амплитуды гребней и ложбин претерпевают значительно большие величины изменения, чем высоты, но осциллируют только один раз за два периода, в то время как высоты волн – осциллируют 2 раза за 2 периода. Функция  $A_{I_H}(t)$  имеет два локальных максимума в течение двух периодов, но ни один из них не совпадает с моментами максимального гребня или ложбины. Такая динамика, равно как меньшее усиление высот волн по сравнению с усилением гребней и ложбин, объясняется малой протяженностью группы, так что ее форма (модуляция) существенно влияет на эти характеристики. Начальное условие для эксперимента, показанного на Рис. 3.3.11, состоит из всего 4 довольно крутых волн. В момент максимума фокусировки волны становятся очень крутыми и заключены в короткий пакет, состоящий из 2 или менее индивидуальных волн, причем вне группы возмущение поверхности очень слабо.

Существенно, что картина максимальных волновых пакетов и максимальных волн, возникающих в численных экспериментах для других параметров, очень похожа на только что описанную. В качестве примера приведен Рис. 3.3.12 для длинного цуга. Закрашенная область соответствует нахождению поверхности раздела в разные фазы волны, контрастной линией построен профиль поверхности в момент максимума гребня. Максимальная волна обладает большой крутизной и принадлежит очень короткой группе, она очень похожа на

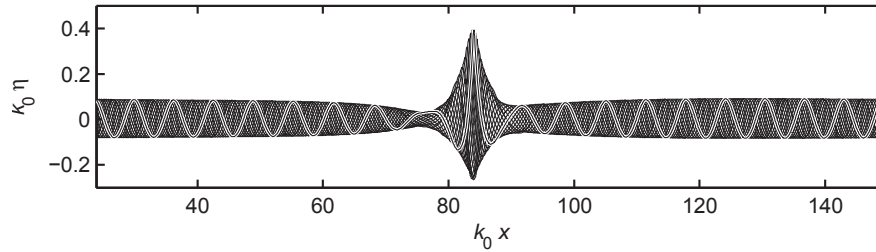


Рис. 3.3.12. Максимальная группа и профиль волн с максимальным гребнем. Моделирование уравнений Эйлера  $k_0 H/2 = 0.09$ ,  $N_w = 20$ ,  $\Delta = 0.01$ .

профиль на Рис. 3.3.11а. Зависимости коэффициентов усиления от времени в этом случае также очень похожи на Рис. 3.3.11б. В этом эксперименте наблюдалось максимальное значение  $AI_{cr}$  среди прочих, равное 4.16. Так как в рассматриваемых случаях концепция введения огибающей не ясна, для построения области нахождения линии смещения поверхности на Рис. 3.3.12 (ее границы условно соответствуют огибающей) использовано несколько профилей смещения в разные фазы волны за один период в сопровождающей с линейной групповой скоростью системе координат. Хотя теория НУШ предсказывает касание огибающей нуля по сторонам от сфокусированной группы, на Рис. 3.3.12 наблюдаются перетяжки поля, но не до нуля. С другой стороны, нужно отметить условность огибающей, построенной на Рис. 3.3.12, потому что прямое сопоставление с огибающей в рамках НУШ кажется неправомерным.

Профиль волны с максимальным гребнем на Рис. 3.3.11а исследован более подробно на Рис. 3.3.13. Смещение поверхности в этот момент построено длинным пунктиром. По его экстремумам (максимум и две соседние ложбины) определена максимальная высота  $H_{max}$ , по расстоянию между координатами ложбин – волновое число  $k_{extr}$ , по вертикальному положению экстремумов – подъем группы как целого  $\Delta \bar{\eta}$ . Эти характеристики (см. подпись к Рис. 3.3.13) свидетельствуют об укорачивании максимальной волны (при том, что в целом по группе наблюдается удлинение волн, обсужденное ранее) и эффективном подъеме группы. Крутизна, определенная по максимальной высоте и этому волновому числу  $k_{extr} H_{max}/2 = 0.31$  оказывается не очень большой, но сравнивая на Рис. 3.3.13 профиль волны Стокса и профиль сфокусированной волны, можно сделать вывод об их существенном отличии. Потому на следующем этапе волна Стокса была вписана в гребень максимальной волны с помощью итерационной процедуры, как показано на Рис. 3.3.13 синей широкой линией. Видно, что гребень волны очень хорошо аппроксимируется профилем волны Стокса, но при этом ее крутизна близка к предельной,  $s_{cr} \approx 0.38$ , что значительно больше, чем оценка, сделанная по экстремумам максимальной волны.

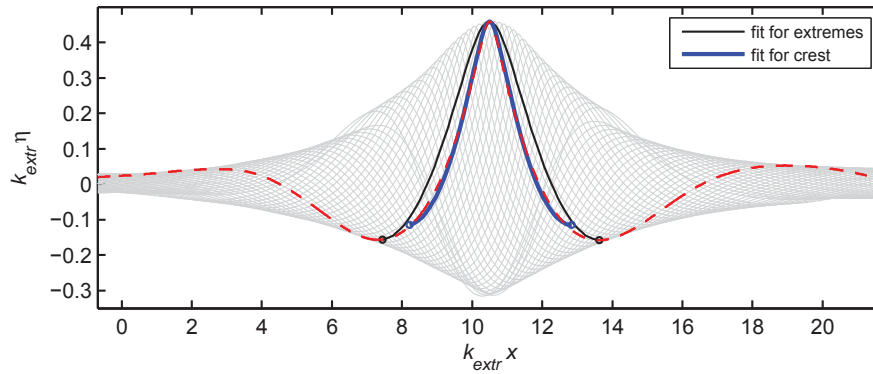


Рис. 3.3.13. Волна с максимальным гребнем (длинный пунктир) для случая, изображенного на Рис. 3.3.11а. Подогнанные профили волн Стокса по экстремумам волны (черная тонкая линия) и по гребню (широкая синяя линия). Параметры начальных условий:  $k_0 H/2 = 0.125$ ,  $N_w = 4$ ,  $k_0 = 4$  рад/м,  $\Delta = 0.01$ ; параметры подгонки по экстремумам:  $k_{extr} = 4.7$  рад/м,  $k_{extr} H_{max}/2 = 0.31$ ,  $k_{extr} \Delta \bar{\eta} = +0.1$ .

Случай, изображенный на Рис. 3.3.12, демонстрирует максимальную волну с очень схожими характеристиками. Для нее  $k_0 H/2 = 0.09$ ,  $N_w = 20$ ,  $k_0 = 20$  рад/м,  $\Delta = 0.01$ ; параметры подгонки по экстремумам  $k_{extr} = 24.0$  рад/м,  $k_{extr} H_{max}/2 = 0.31$ ,  $k_{extr} \Delta \bar{\eta} = +0.1$ ; крутизна волны Стокса, подогнанной к гребню,  $s_{cr} \approx 0.41$ . Во всех проведенных экспериментах наблюдается заметное увеличение волнового числа, определенного по максимальной волне,  $k_{extr}/k_0 \approx 1.15 \dots 1.25$  при сдвиге пика спектра в длинноволновую область. Можно убедиться, что на Рис. 3.3.12 только 19 волн, хотя в начальном условии их было 20. Таким образом, сфокусированный цуг сильно неоднороден по длинам волн.

### 3.4 Моделирование динамики мультибризерных полей («супер-волн-убийц»)

Хотя наши численные эксперименты явились еще одним доказательством к существованию бризероподобных волн в реальной жизни (в дополнение к уже упомянутым работам [Henderson et al. 1999; Clamond et al. 2006; Karjanto & van Groesen 2010; Chabchoub et al. 2011, 2012, 2012\*; 2013a,b; Clauss et al. 2012; Shemer & Alperovich 2013]), в отношении интегрируемого НУШ они играют фундаментальную роль, поскольку принадлежат дискретной части спектра задачи рассеяния, описывающей неисчезающие локализованные волны.

Для прояснения роли бризерных решений в условиях, когда нелинейность не мала, в статье [Slunyaev & Shrira, 2013\*] нами была рассмотрена роль малых возмущений (которые сами способны приводить к модуляционной неустойчивости). Как и ожидалось, результат нарастания таких модуляций определяется балансом инкрементов роста и затравочных амплитуд парциальных возмущений. Если шумовая компонента не слишком интенсивна, а

желаемое возмущение соответствует достаточно быстро растущей моде, то бризеры устойчивы, шумовые добавки приводят к более позднему искажению динамики модуляций волн.

В этом разделе рассматривается случай, когда «полезные» затравочные возмущения соответствуют нескольким взаимодействующим модам. Точнее будет рассмотрена динамика вырожденных (рациональных) мультибризерных решений, соответствующих решениям Перегринна высокого порядка. В терминах задачи рассеяния, изложенной в Разделе 2.3, эти решения соответствуют предельному переходу общего  $N$ -бризерного решения, когда их собственные значения одновременно стремятся к значению  $\lambda = 1$ .

Рациональные решения высоких порядков были получены в серии недавних работ с применением численных пакетов символьной математики с использованием развиваемых подходов для получения мультисолитонных решений [Akhmediev et al, 2009; Dubard et al, 2010; Gaillard et al, 2012]. Бризер Перегринна первого порядка выглядит схоже с изображенным на Рис. 2.3.1а, бризеры порядков  $N = 2, 3, 4, 5$  построены на Рис. 3.4.1. Интересно отметить, что формула максимального усиления, описываемого рациональным мультибризером,

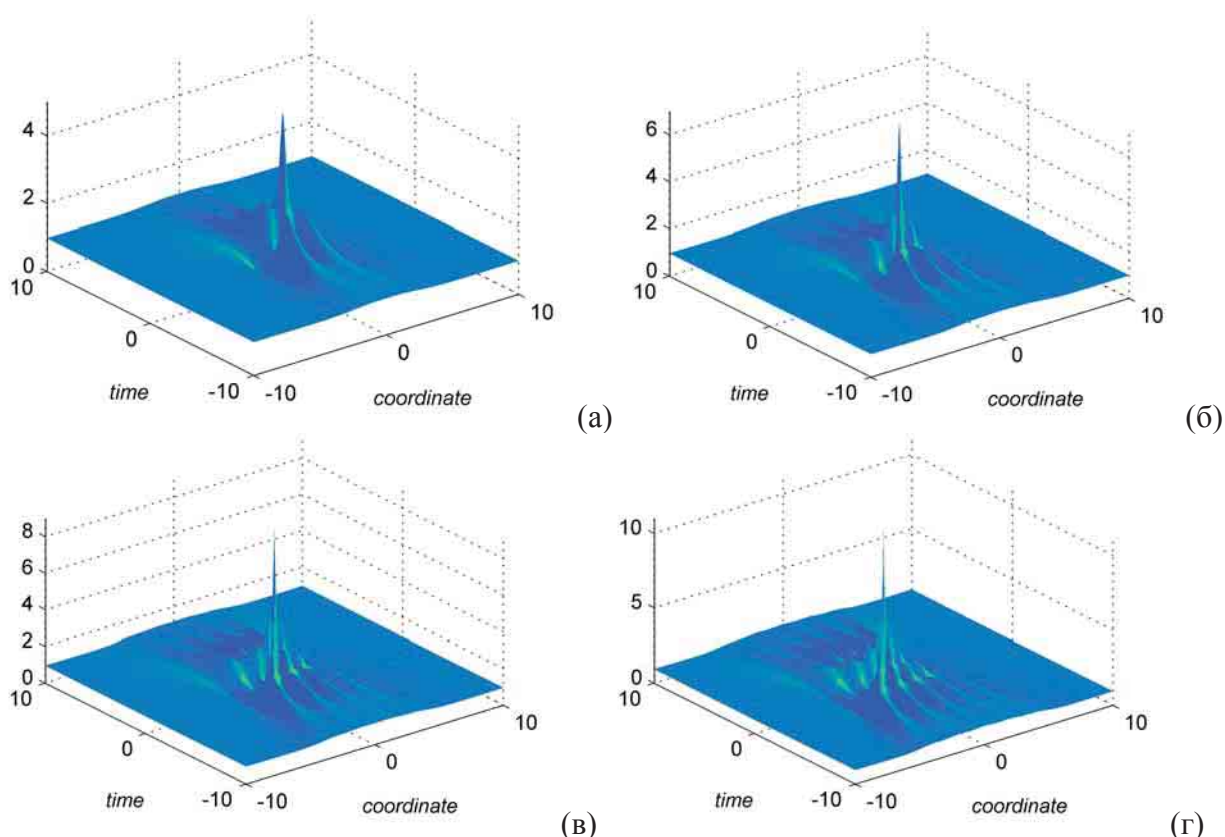


Рис. 3.4.1. Мультибризерные решения НУШ 2 – 5 порядков (а–г). Построена огибающая  $|A|$  для случая в нормированных координатах.

$$AI_N = 1 + 2N, \quad (3.4.1)$$

(видимо, впервые отмеченная в [Akhmediev et al, 2009]) обсуждалась в недавней работе [Dubard & Matveev, 2013] как остающаяся эмпирической гипотезой. Она же тривиально следует из идеологии «на пальцах», изложенной в Разделе 2.3 диссертации. Максимальная амплитуда взаимодействующих волн равна сумме амплитуд взаимодействующих солитонов огибающей и подложки. В случае рационального решения Перегринна амплитуда образующего его солитона равна 2 (по формуле (2.3.26) для  $\lambda = 1$ ), а амплитуда фона равна 1. Рациональный бризер порядка  $N$  образуется согласованным взаимодействием  $N$  бризеров Перегринна. Решение первого порядка, полученное в работе [Peregrine, 1983], соответствует  $N = 1$  и дает усиление в 3 раза.

Рациональные решения интересны тем, что, с одной стороны, они проще по математической записи, с другой – представляют экстремальный случай усиления волн с бесконечной области пространства. Кроме того, рациональное решение может рассматриваться как общее решение типа «волны-убийцы», к которому близки другие бризеры [Shrira & Geogjaev, 2010].

Лабораторные наблюдения рациональных бризеров разных порядков докладывались в работах [Chabchoub et al, 2011; 2012; 2012\*]. Такие волны иногда называют «супер-волнами-убийцами» из-за степени усиления, описываемой формулой (3.4.1). В работе с нашим участием [Chabchoub et al, 2012\*] были воспроизведены бризерные решения вплоть до 5-го порядка, обеспечивающие 11-кратное усиление слабо модулированной волны. Лабораторные измерения в [Chabchoub et al, 2012\*] в лотке Технического университета Гамбурга показали хорошее соответствие с аналитическим решением НУШ. Для них на одном конце лотка  $x = -d$  с помощью программируемого волнопродуктора задавалось условие в соответствии с точным аналитическим бризерным решением НУШ порядка  $N$ ,  $A_N(-d, t)$ , которое должно достигать своего максимального значения в точке  $x = 0$  в момент времени  $t = 0$ . Чтобы фокусировка достигалась в границах лотка размера  $L$ , должно выполняться следующее условие:  $|d| < L$ . В действительности, фокусировка в лотке достигалась в точке, не сильно отличающейся от предсказания НУШ, даже для волн, которые в точке фокусировки близки к обрушению.

Ограничение по длине экспериментального лотка приводит к исследованию случаев относительно коротких дистанций ( $|d|$  мало). Фокусировка происходит на масштабах длин  $\sim \varepsilon^{-2}$ , где  $\varepsilon$  – крутизна волн, что довольно долгий процесс (см. предыдущий раздел диссертации). Потому чтобы достичь максимального усиления в лотке, граничное условие уже содержит сильную модуляцию. Тогда реально наблюдаемое усиление волн в лотке



составляет лишь часть от ожидаемого (3.4.1). Численное моделирование, которое описано в настоящем разделе, позволяет снять ограничения экспериментальных лотков и дополнить результаты нашей работы [Chabchoub et al, 2012\*]. Перед численными экспериментами

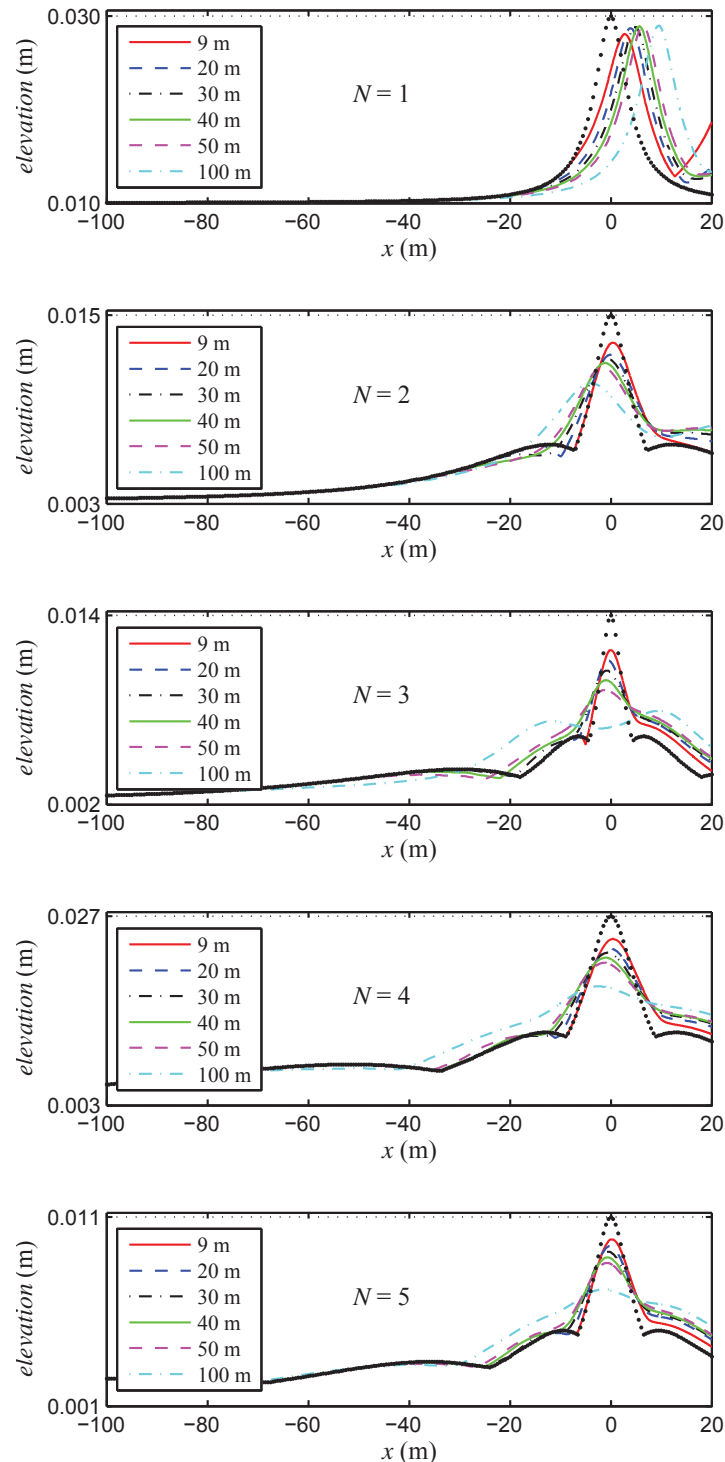


Рис. 3.4.2. Эволюция максимума амплитуды огибающей  $|A|$  в рамках уравнений Диста. Подписи к линиям указывают величину  $d$ , задающую точку задания начальных условий  $x = -d$ . Точками построено аналитическое решение НУШ. Нижний предел вертикальной оси соответствует амплитуде невозмущенной волны при  $x \rightarrow -\infty$ .

ставятся следующие главные вопросы:

- как дистанция фокусировки  $|d|$  (или соответствующее время фокусировки  $T_f$ ) влияет на процесс фокусировки в реалистичных условиях, и насколько хорошо решение НУШ описывает реальную динамику волн;

- как выглядит максимально усиленная волна и каков реализуемый коэффициент усиления волн. Какова должна быть интенсивность слабо возмущенной волны, чтобы в момент фокусировки достигался порог обрушения. В частности, в [Chabchoub et al, 2012\*] для решения пятого порядка  $N = 5$  обрушение ожидается даже для очень малой начальной волны с крутизной более 0.01.

### Моделирование в рамках пространственной версии уравнений Диста

Как уже отмечалось, пространственная версия уравнений для модулированных волн наиболее удобна для сравнения с лабораторными экспериментами, где волнение задается волнопродуктором на одной стороне лотка. В первом приближении такое уравнение – НУШ, и динамика волн описывается аналитическими решениями. В этом параграфе эволюция в рамках мультибризерных бризерных решений будет сопоставлена с расчетом пространственной версии уравнений Диста (2.5.7)-(2.5.9), которая точно описывает линейную дисперсию волн на глубокой воде и учитывает следующий порядок малости по нелинейности в сравнении с НУШ. Модель Диста также учитывает наведенное течение, что существенно для модулированных групп.

Аналогично тому, как это сделано в лабораторных экспериментах [Chabchoub et al, 2012\*], в координате  $x = -d$  задается условие в виде точного решения НУШ – рационального

Таблица 3.4.1. Параметры численного моделирования в рамках модели Диста.

Порядок решения, $N$	Крутизна невозмущенной волны, $k_0 A_0$	Амплитуда невозмущенной волны, $A_0$ (м)	Длина волны несущей, $2\pi/k_0$ , м
1	0.117	0.01	0.54
2	0.05	0.003	0.38
3	0.04	0.002	0.31
4	0.03	0.003	0.67
5	0.02	0.002	0.67

бризера  $A_N(x = -d, t)$  порядка  $N = 1, 2, 3, 4, 5$ , которое в рамках классического НУШ сфокусировалось бы в точке  $x = 0$  в момент времени  $t = 0$ . Отметим, что бралось точное бризерное решение пространственной версии НУШ

$$i \left( \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{C_{gr}} \frac{\partial A}{\partial t} \right) + \frac{k_0}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + k_0^3 |A|^2 A = 0, \quad (3.4.2)$$

которое отличается от временной версии в порядке  $O(\varepsilon^4)$ . И НУШ и модель Диста обе описывают динамику комплексной амплитуды  $A$ . Рациональные бризеры заданы на бесконечном интервале. Для расчета в ограниченном домене с периодическими граничными условиями границы выбраны таким образом, чтобы они оказались далеко от затравочного возмущения. Также в месте сшивки решения на периодическом домене создана плавная переходная область, где волны спадают в ноль (см. примеры для пространственных условий далее на Рис. 3.4.4).

Параметры численных экспериментов выбраны в соответствии с лабораторными измерениями [Chabchoub et al, 2012\*] и собраны в Табл. 3.4.1. Отметим высокое качество измерений в лабораторных экспериментах, в которых амплитуда несущей волны составляла 2 мм и даже меньше. В лабораторных условиях дистанция фокусировки  $d$  была ограничена значением 9 м; в численных экспериментах рассмотрены более длинные дистанции – до 100 м, что согласно данным в Табл. 3.4.1 соответствует 150–320 длинам волн.

Записи максимума амплитуды  $|A|$  как функции координаты даны на Рис. 3.4.2 разными цветами для бризеров пяти порядков. Аналитическое решение НУШ описывается зависимостями, построенными точками. Изучение Рис. 3.4.2 приводит к заключению, что несмотря на несколько меньшее усиление волн в рамках модели Диста, численное моделирование обобщенных уравнений во многих случаях дает результат очень близкий к предсказанию НУШ. Отличия становятся заметными для  $N > 1$  и  $d$  более 50 м (75–160 длин волн). Отличие становится значительным для самой большой дистанции  $d = 100$  м, наибольшее – для порядков  $N = 3, 4, 5$ . По мере роста желаемых модуляций, параллельно развиваются паразитные модуляции, которые в основном локализованы на границах цуга. Они выглядят очень схоже с теми, которые видны далее на Рис. 3.4.5 для результатов расчета исходных уравнений.

Из Рис. 3.4.2 может быть сделан вывод о качественном различии случаев  $N = 1$  и  $N > 1$ . В первом случае четко видно, как с ростом дистанции  $d$  растет итоговый максимум амплитуды. Также видно, что для случая  $N = 1$  большая дистанция фокусировки ведет к большему запозданию момента фокусировки (такой эффект уже был нами отмечен в Разделе 3.3). Такие закономерности не прослеживаются для бризеров высоких порядков.

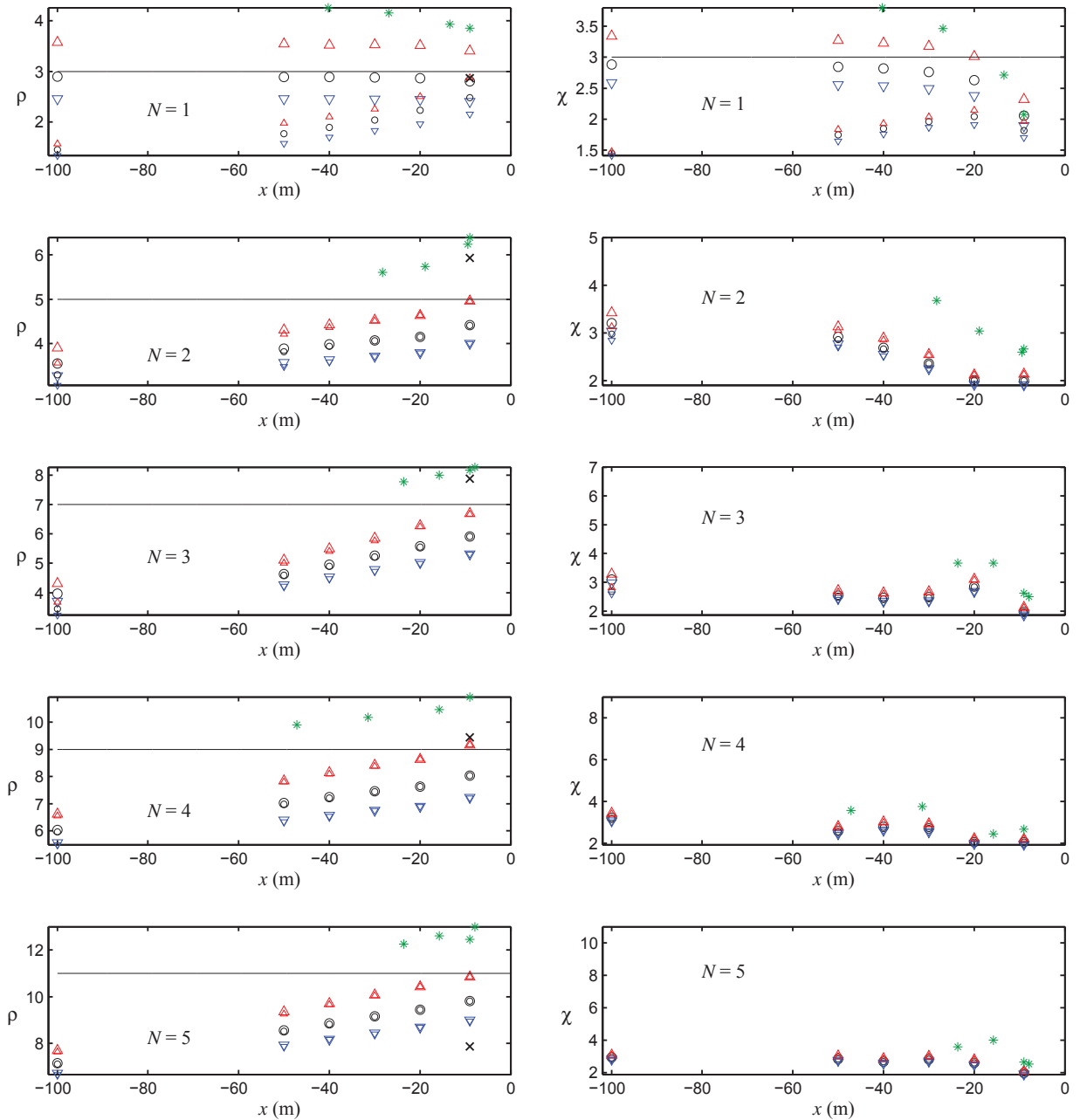


Рис. 3.4.3. Усиление волн в зависимости от расстояния  $d$ . Левый столбец: усиление относительно амплитуды огибающей невозмущенной волны, правый столбец: усиление относительно значений в точке  $x = -d$ . Кресты – лабораторные измерения, звездочки – расчет полных уравнений (для гребней). Кружки, треугольники вверх и треугольники вниз – расчет уравнений Диста для огибающей, гребней и ложбин соответственно. Значки малого размера – для окрестности точки  $x = 0$ , большого размера – для всего домена расчета.

Для сопоставления с результатами лабораторных экспериментов и расчетов полных уравнений, что описываются ниже, необходимо перейти от амплитуды огибающей к смещению поверхности, как описано в Разделе 2.5, формулы (2.5.10). На Рис. 3.4.3 приведены графики усиления волн, посчитанных различными способами. В первом способе (левая колонка рисунков на Рис. 3.4.3) рассчитанная амплитуда огибающей  $|A|$ , гребня

$\max(\eta)$  и ложбины  $\min(\eta)$  соотносятся с амплитудой огибающей на бесконечном удалении до точки фокусировки  $A_0$ , будем обозначать эти величины  $\rho_{env}$ ,  $\rho_{cr}$ ,  $\rho_{tr}$ .

$$\rho_{env} = \frac{\max_t |A|}{A_0}, \quad \rho_{cr} = \frac{\max_t \eta}{A_0}, \quad \rho_{tr} = -\frac{\min_t \eta}{A_0}. \quad (3.4.3)$$

Эти значения построены на Рис. 3.4.3 кружками, треугольниками с вершиной вверх и треугольниками с вершиной вниз. Причем максимальные значения этих величин определены как вблизи ожидаемой точки фокусировки  $x = 0$  (значки малого размера), так и на всем домене вычислений  $-d \leq x \leq 20$  м (крупные значки). Горизонтальные линии показывают прогноз по решению НУШ (3.4.1).

Видно (левая колонка на Рис. 3.4.3), что усиление огибающей (кружки) всегда меньше решения НУШ. Но за счет учета связанных волн (треугольники вверх) этот порог может превосходить. В случае  $N = 1$  фокусировка происходит позднее, потому величины усиления волн вблизи  $x = 0$  (малые символы) значительно менее, чем позднее (большие символы); усиление больше для больших  $d$ . Для  $N > 1$  максимальное усиление наступает вблизи  $x = 0$ , оно больше для малых  $d$ .

Результаты лабораторных измерений построены крестиками на Рис. 3.4.3 (для  $d = 9$  м). Для сравнения с расчетом уравнений Диста эти значения нужно сопоставлять с малыми треугольниками, смотрящими вверх. Результаты расчета совпали с экспериментальными для  $N = 1$  и  $N = 4$ . Для  $N = 2, 3$  расчет дает меньшие значения, чем лабораторные измерения; для  $N = 5$  ситуация обратная, что может объясняться другой крутизной волн в лабораторных экспериментах (0.01 вместо 0.02). Отметим также, что вертикальные оси на Рис. 3.4.3 начинаются не с нуля, так что отличия между лабораторными и численными результатами, а также от прогноза НУШ, действительно не велики.

Нижний предел вертикальных осей на Рис. 3.4.2 соответствует амплитуде невозмущенной волны  $A_0 = A_N(x \rightarrow \pm\infty)$ . Для  $N = 3, 4, 5$  уже в точке начала расчета  $x = -d$  модуляция амплитуды существенна, так что на рассчитанном интервале реально наблюдаемое усиление меньше. Введем определение коэффициентов усиления волн вторым способом – относительно условий на границе лотка,

$$\chi_{env} = \frac{\max_t |A|}{\max_t |A(x = -d)|}, \quad \chi_{cr} = \frac{\max_t \eta}{\max_t \eta(x = -d)}, \quad \chi_{tr} = \frac{\min_t \eta}{\min_t \eta(x = -d)}. \quad (3.4.4)$$

Эти величины построены в правом столбце Рис. 3.4.3, сохраняя те же обозначения, что и для левого столбца для величин  $\rho_{env}$ ,  $\rho_{cr}$ ,  $\rho_{tr}$ .

Если бы условия при  $x = -d$  представляли волну с очень слабой модуляцией, то рисунки в левой и правой колонках Рис. 3.4.3 совпадали бы. Данные в правой колонке сильно отличаются от аналогичных в левой для малых дистанций  $d$  и больших  $N$  (когда затравочное возмущение большое). Для самой короткой дистанции  $d = 9$  м все коэффициенты усиления по данным расчета уравнений Диста примерно равны 2. Абсолютный максимум для коэффициентов  $\chi$  среди всех случаев немного превышает 3. Несмотря на то, что решение НУШ при  $N > 1$  лучше описывает динамику на коротких расстояниях, наблюдаемое усиление больше для более длинных расстояний  $d$ .

### Моделирование в рамках полных уравнений гидродинамики

Рассмотренные случаи роста модуляций соответствуют возникновению очень крутых волн в момент фокусировки. Действительно, начальные условия, характеризуемые большей крутизной волн, приводили в лабораторных экспериментах [Chabchoub et al, 2012\*] к обрушению. В этом параграфе приведено сопоставление наблюдений и численного моделирования в рамках обобщенной модели огибающей с расчетом полных уравнений гидродинамики с помощью метода HOSM, учитывающего нелинейные эффекты вплоть до 7-волновых взаимодействий (см. Приложение Б). Некоторые расчеты были продублированы моделированием в рамках уравнений Эйлера в конформных переменных. Наибольший интерес представляет расчет случаев, близких к обрушению. В частности, мы сопоставили пороги обрушения, наблюдавшиеся в лабораторных условиях, и по данным нашего моделирования (Табл. 3.4.2).

Таблица 3.4.2. Параметры численного моделирования исходных уравнений гидродинамики

Порядок решения, $N$	Расстояние / время фокусировки $d / \tau$	Порог обрушения в численных экспериментах, $k_0 A_0$		Порог обрушения в лабораторных экспериментах, $k_0 A_0$
		Нет обрушения	Обрушение в фокусе	
1	$16.76\lambda_0 \approx 33.52 T_0$	<b>0.090</b>	0.095	0.12
2	$23.87\lambda_0 \approx 47.74 T_0$	<b>0.060</b>	0.065	0.06
3	$28.65\lambda_0 \approx 53.30 T_0$	<b>0.040</b>	0.045	0.05
4	$14.32\lambda_0 \approx 28.64 T_0$	<b>0.030</b>	0.035	0.04
5	$28.65\lambda_0 \approx 53.30 T_0$	<b>0.025</b>	0.030	0.02

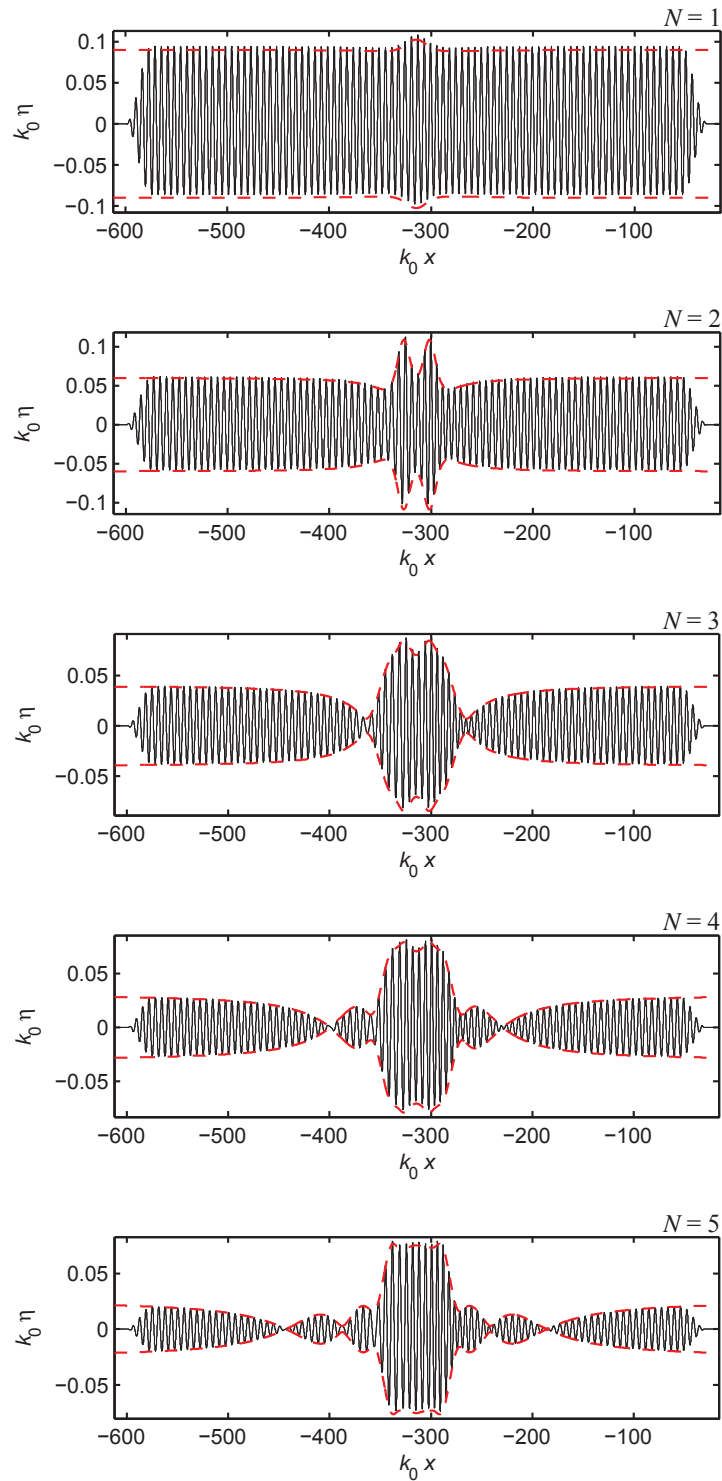


Рис. 3.4.4. Начальные условия для расчета уравнений Эйлера для  $\tau = 100T_0$ . Смещение поверхности дано сплошной линией, огибающая – решение НУШ – пунктирной. Крутизна фоновых волн выделена жирным в Табл. 3.4.2.

В отличие от расчета уравнений Диста, для моделирования исходных уравнений требуется задать начальное, а не граничное условие. Соотношение между дистанцией в предыдущих экспериментах и временем в расчете полных уравнений, осуществляется в предположении о движении с линейной групповой скоростью,  $\tau = d/C_{gr}$ . Начальные условия

в момент  $t = -\tau$  задаются по точному бризерному решению НУШ для огибающей с учетом связанных волн трех порядков. Ожидаемое фокусное расстояние в терминах длин волн  $\lambda_0$  и соответствующее ему время в периодах  $T_0$  даны в Табл. 3.4.2. Сами длины волн определены в Табл. 3.4.1. Примеры начальных условий для расчетов приведены на Рис. 3.4.4.

Пороги обрушения для лабораторных и численных экспериментов в Табл. 3.4.2 заметно отличаются для случая  $N = 1$ . Вероятным объяснением завышения этого порога в лабораторных экспериментах является то, что наибольшее усиление достигается позднее момента, предсказываемого теорией НУШ, в области  $x > 0$ , которая не отслеживалась в лабораторных экспериментах. В остальном пороги обрушения в Табл. 3.4.2 хорошо совпадают.

Следующая серия экспериментов выполнена для времен фокусировки  $\tau = 50T_0, 100T_0$  и  $200T_0$ . В этих экспериментах волновое число несущей  $k_0 = 20$  рад/м, а крутизна указана в Табл. 3.4.2 (выделена жирным). Соответствующие начальные условия для  $\tau = 100T_0$  показаны на Рис. 3.4.4. Результаты полнонелинейных расчетов построены на Рис. 3.4.3 зелеными звездочками, при этом учитывалось масштабирование результатов из-за различных длин волн несущей. Как следует из Рис. 3.4.3, результаты расчета исходных уравнений всегда дают несколько большее значение усиления волн, чем в модели Диста, по полностью следуют трендам, задаваемым моделью для огибающей. Расчеты в рамках НОСМ кажутся завышающими значения максимальных волн по сравнению с измерениями в случаях, близких к обрушению. Максимальное фактическое усиление в рамках уравнений Эйлера равно 3-4 независимо от порядка рационального решения (правая колонка Рис. 3.4.3).

Максимально сфокусированные группы волн (из начальных условий, показанных на Рис. 3.4.4) и профили волн с максимальным гребнем показаны на Рис. 3.4.5. Подобно как в рамках нелинейного уравнения Шредингера (Рис. 3.4.1) с ростом порядка  $N$  групповая структура в фокусе имеет более сложный вид с большим числом перетяжек, хотя полного соответствия с моделью НУШ нет. Явно видна асимметрия сфокусированных групп, особенно вблизи максимальной группы и для  $N > 1$ ; подобная симметрия наблюдалась и в лабораторных экспериментах [Chabchoub et al, 2012\*].

Максимальные сфокусированные группы вырастают в центральной части модулированного цуга и представлены в правой колонке Рис. 3.4.5. В каждом случае максимальная группа вмещает в себя всего пару осцилляций. Отметим схожесть максимальных групп и профилей волн с максимальным гребнем во-первых между собой, а во-вторых с ранее рассмотренным моделированием одномодовой неустойчивости в Разделе 3.3 (ср. с Рис. 3.3.13). Так же как и в предыдущем случае, максимальные волны на



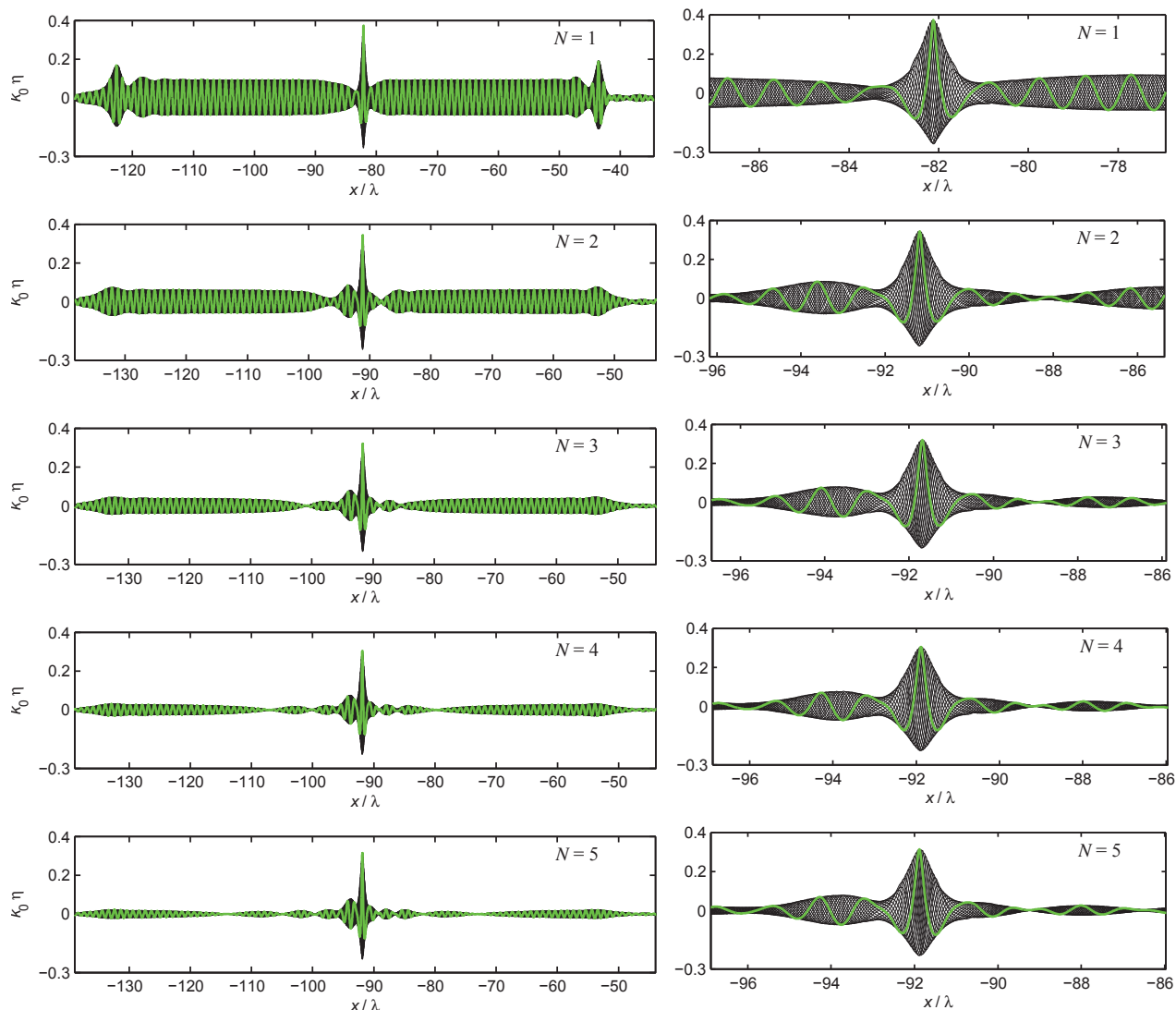


Рис. 3.4.5. Моменты максимальной фокусировки в рамках уравнений Эйлера с начальными условиями из Рис. 3.4.4: вычислительная область целиком (левая колонка) и сфокусированные группы в большем масштабе (правая колонка). Зеленой линией показано смещение поверхности с максимальным гребнем. Закрашена область нахождения границы жидкости в разные фазы волн.

Рис. 3.4.5 имеют более узкие гребни, чем волны Стокса (определенные по максимальному гребню и соседним ложбинам), так что их крутизны близки к порогу обрушения.

Из результатов, представленных в этом разделе (в частности, на Рис. 3.4.4 и 3.4.5), можно сделать вывод, что с увеличением дистанции / времени до фокусировки (иначе – с уменьшением затравочного возмущения) обеспечиваются условия для более эффективной одномодовой ( $N = 1$ ) фокусировки, в то время как условия для многомодовой ( $N > 1$ ) фокусировки нарушаются, при этом фактически реализуется сценарий одномодовой неустойчивости (с соответствующим коэффициентом усиления). На небольших дистанциях / временах решение полных уравнений хорошо согласуется с решением НУШ.

### 3.5 Заключение

По содержанию Главы 3 формулируются следующие основные результаты.

1. На основе численного моделирования исходных уравнений гидродинамики и в лабораторных экспериментах показано существование структурно устойчивых уединенных групп волн (в пренебрежении поперечными эффектами) во всем диапазоне амплитуд: от малых до предела обрушения. Наиболее короткие группы содержат около 2 осцилляций. Их вертикальная асимметрия подобна асимметрии однородных волн Стокса, но нелинейная поправка к скорости существенно больше. Такие группы могут взаимодействовать неупруго, либо почти упруго в зависимости от соотношения параметров.
2. Показано, что короткие солитоноподобные группы интенсивных волн с удовлетворительной точностью могут возбуждаться начальными / граничными условиями в виде классических солитонов огибающей НУШ. При слишком больших амплитудах задаваемых начальных / граничных условий (крутизна  $k_0A > 0.35$ ) волны быстро укручаются и обрушиваются. Эволюция интенсивных солитонов огибающей может быть довольно хорошо описана в рамках обобщенного уравнения Шредингера (модели Диста) до крутизн волн порядка  $k_0A \approx 0.2$ . Для еще больших крутизн отличия становятся качественными и быстро проявляются. Дальнейшее повышение порядка асимптотической теории (учет слагаемых трех порядков малости) улучшает описание процессов модуляционной неустойчивости интенсивных волн.
3. Детально исследовано развитие одномодовой модуляционной неустойчивости волн на поверхности глубокой воды для области параметров, наиболее интересной в приложении к морским "волнам-убийцам", в рамках исходных уравнений потенциальной гидродинамики, включая нелинейную стадию неустойчивости, образование максимальной группы и дефокусировку. Показано, что порог возникновения модуляционной неустойчивости занижен теорией НУШ, нелинейная фокусировка происходит медленнее, чем предсказывает бризерное решение НУШ. Описан порог модуляционной неустойчивости в терминах подправленного индекса модуляционной неустойчивости. Предложено аналитическое выражение на основе решения НУШ, использующее 3 подгоночных константы, которое описывает картину максимального усиления гребней волн и ложбин волн во всем рассмотренном диапазоне параметров (вне обрушения). Тем самым показано существование сильно нелинейных аналогов бризерных решений НУШ.
4. Обнаруженное в численных экспериментах (без обрушения) максимальное усиление гребней волн чуть менее 4.2, усиление ложбин – чуть более 3, усиление высот (по моментальным снимкам) – не более 3. Вблизи порога обрушения возможно еще большее

усиление волн по амплитуде. Обнаружена универсальность картины максимальной группы и максимальной волны в такой группе (до порога обрушения, для фиксированного числа волн в начальной модуляции): группа содержит около 2 осцилляций, волна с максимальным гребнем приподнята, ее гребень уже, чем у однородной волны Стокса, и локально имеет крутизну, близкую к пороговой обрушения. Схожие волновые группы наблюдаются в случае солитоноподобных коротких групп интенсивных волн (в численных и лабораторных условиях), а также при больших временах фокусировки мультибризерных решений.

5. Показана возможность устойчивости бризерных решений в рамках полных уравнений гидродинамики по отношению к возмущениям. Показано, что меньшая степень затравочной модуляции ведет к более оптимальной фокусировке. Мультибризерные рациональные решения НУШ способны удовлетворительно описывать динамику крутых волн только на небольших временах; на больших временах (малая затравочная модуляция) происходит развитие модуляционной неустойчивости по одномодовому сценарию.

## Глава 4 СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ «ВОЛН-УБИЙЦ» НА ПОВЕРХНОСТИ ГЛУБОКОЙ ВОДЫ

### 4.1 Введение

Поскольку построение статистики ветровых волн на основании натуральных данных в настоящее время невозможно (из-за ряда причин как технического, так и физического свойства, которые обсуждались в Разделе 1.3), лабораторное и в особенности численное моделирование динамики нерегулярных волн морских волн вызывают особый интерес.

Гипотеза о случайности волновых фаз является классической для статистических теорий [Longuet-Higgins, 1952]. Но использование классического для ветровых волн подхода для их статистического описания – на основе кинетических уравнений [Hasselmann, 1962; Zakharov, 1999; Janssen, 2004; Полников, 2007] – вступает в противоречие с родом волн, которые требуется описать. Для описания морских волн-убийц принципиален учет межволновых резонансных и квазирезонансных взаимодействий, приводящих к возникновению когерентных, не независимых состояний разных гармоник. Также существенными являются эффекты сильной нелинейности. По этим причинам гауссова статистика, как неоднократно показывалось, становится неприменимой; учет только нерезонансных взаимодействий (т.е., только софазных связанных волн на кратных гармониках) также не описывает динамику «волн-убийц» в достаточной мере (хотя нужно отметить, что в ряде случаев такое улучшение модели оказывается достаточным для хорошего описания наблюдений [Massel, 1996; Tayfun & Fedele, 2007]). Можно сказать, что в идеологическом смысле проблема морских «волн-убийц» находится между случайными гауссовыми процессами (слабонелинейное приближение) и солитонным газом (предельный случай нелинейности).

Для расчета эффектов «волн-убийц» требуются динамические модели (без фазового усреднения). Потому большой интерес в проблеме «волн-убийц» посвящен т.н. *стохастическому моделированию* (аналогу метода Монте-Карло), когда эволюция каждой из набора квазислучайных реализаций рассчитывается независимо, а затем происходит усреднение по ансамблю (среди прочих, [Onorato et al, 2001; Tanaka, 2001; Janssen, 2003; Dysthe et al, 2003; Chalikov, 2005, 2009; Socquet-Juglard et al, 2005; Annenkov & Shrira, 2006a; Pelinovsky & Sergeeva, 2006; Shemer & Sergeeva, 2009; Захаров и Шамин, 2010] и множество других более поздних работ). Здесь и далее предполагается выполнение эргодичности.

Если "волна-убийца", определенная по стандартному условию  $H > 2H_s$ , согласно распределения Рэля имеет вероятность примерно  $3 \cdot 10^{-4}$  (одна из примерно 3 000 волн) то существующие нормы Норвежской нефтяной дирекции (Norwegian Petroleum Directorate, Serviceability Limit State и Accidental Limit State) декларируют события с вероятностью 1 раз в 100 лет и даже 1 раз в 10 000 лет (см. в [Kharif et al, 2009\*]). Последнее для волн с периодом 10 с соответствует вероятности около  $3 \cdot 10^{-11}$  (!). Одно из наиболее представительных исследований натуральных регистраций волн [Christou & Ewans, 2011] базируется на массиве из 664 000 регистраций, то есть порядка  $3 \cdot 10^7$  волн, что соответствует непрерывной записи 10-с волн в течение примерно 9.5 лет. Определение вероятности столь редких событий на основе непосредственных измерений, по всей видимости, недостижимо. Развитие алгоритмов быстрого решения исходных уравнений гидродинамики и взрывной рост производительности компьютеров делает альтернативу использования "численных волновых бассейнов" (Numerical Wave Tanks) чрезвычайно привлекательной, коль скоро будет установлена эквивалентность численного лотка реальному (хотя бы лабораторному). Хотя и численное моделирование столь большого объема данных представляет собой тяжелую задачу.

Исследования по моделированию динамики нерегулярных интенсивных волн, изложенные в диссертации, используют возможности стохастического численного моделирования для получения вероятностного описания "волн-убийц" лишь отчасти. Главным образом они направлены на разработку самих подходов для аккуратного стохастического моделирования, верификацию моделей и определение их способности описывать статистические свойства и состояния равновесия нестационарной волновой системы, выяснение общей картины эволюции ансамблей морских волн. Исследуется роль когерентных состояний волн, возможности их идентификации и использования параметра модуляционной неустойчивости (BFI) для прогноза экстремальных состояний моря.

Приведенные исследования ограничиваются случаем однонаправленных волн; он (или чуть шире случай – узкого углового спектра) является наиболее благоприятным для возникновения аномально высоких волн [Onorato et al, 2002, 2009; Gramstad & Trulsen, 2007; Mori et al, 2011] (везде в этом разделе описывается случай большой глубины, если другое не указано особо). Проблема модуляционной неустойчивости не единственной плоской волны, а целого ансамбля (описываемого относительно узким спектром) решалась в работе [Alber, 1978] в рамках тех же приближений, что используются для вывода НУШ (в [Crawford, 1980] эта проблема была рассмотрена в рамках уравнений Захарова). Оказалось, что по сравнению со случаем одной волны, в случае случайных волн порог модуляционной неустойчивости

увеличивается, а инкремент роста уменьшается. В частности, в [Alber, 1978] было получено условие на соотношение параметров волн (типичной крутизны и ширины двумерного спектра волновых векторов), когда модуляционная неустойчивость может наблюдаться,

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \leq k_0 a_{rms} \quad (4.1.1)$$

(где  $a_{rms}$  – среднеквадратичная амплитуда волн,  $\omega_0$  и  $k_0$  – центральные частота и волновое число,  $\Delta\omega$  – ширина частотного спектра). Оценивая для условий Северного моря крутизну (справа в (4.1.1)) равной 0.066, а типичную нормированную ширину спектра (слева в (4.1.1)) заключенной в диапазоне 0.075...0.082, И. Альбер сделал вывод о модуляционной *устойчивости* типичных морских волн, хотя величины по сторонам условия (4.1.1) и близки по значению. Однако он допустил, что наблюдаемое в море условие может соответствовать состоянию, достигаемому в результате уширения изначально узкого спектра, для которого условие (4.1.1) могло бы выполняться.

Параметр, характеризующий степень модуляционной устойчивости ансамбля случайных волн с заданным спектром, аналогичный введенному И. Альбером, был позднее предложен М. Онорато [Onorato et al, 2001] и П. Янсенем [Janssen, 2003] на роль индикатора возможности модуляционной неустойчивости в реальном море, в англоязычной литературе получивший имя BFI (Benjamin – Feir Index),

$$BFI = \sqrt{2} \frac{k_0 \eta_{rms}}{\Delta\omega/\omega_0} = 2\sqrt{2} \frac{k_0 \eta_{rms}}{\Delta k/k_0}. \quad (4.1.2)$$

Модуляционная неустойчивость возникает для  $BFI > 1$ . Видно полное соответствие между (4.1.1) и (4.1.2), если учесть  $a_{rms} = \sqrt{2} \eta_{rms}$ . В работе [Onorato et al, 2001] параметр BFI вводился по аналогии с числом Урселла для волн на мелкой воде – как соотношение вкладов в эволюционное уравнение (НУШ) от слагаемых нелинейности и дисперсии. Таким образом, BFI был введен как параметр порядка НУШ, индекс модуляционной неустойчивости, который в случае детерминистских начальных условий в виде импульса, еще часто называют солитонным числом (см. Раздел 2.3). Важное соотношение, доказывающее ключевую роль BFI в предсказании экстремальных ситуаций, полнее, – доказывающее связь между спектральными и статистическими параметрами – было получено в работе [Mori & Janssen, 2006]

$$\lambda_4 - 3 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} BFI^2 + 24k_0^2 \eta_{rms}^2 \quad (4.1.3)$$

в рамках слабо нелинейной теории и предположения о слабом отличии процесса от гауссового. Статистические моменты смещения поверхности определены как

$$\sigma^2 = \langle \eta^2 \rangle, \quad \lambda_3 = \frac{\langle \eta^3 \rangle}{\sigma^3}, \quad \lambda_4 = \frac{\langle \eta^4 \rangle}{\sigma^4}, \quad (4.1.4)$$

где среднеквадратичное смещение поверхности равно дисперсии,  $\sigma = \eta_{rms}$ , третий и четвертый статистический моменты – асимметрия  $\lambda_3$  и эксцесс  $\lambda_4$ . Угловые скобки означают усреднение с центрированием (с вычетом математического ожидания).

Эксцесс определяет баланс между вероятностями большого и малого смещения поверхности (по сравнению с нормальным распределением), для гауссового процесса  $\lambda_4 = 3$ . Формула (4.1.3) для эксцесса содержит два слагаемых. И если последнее слагаемое пропорционально второй степени крутизны волн  $\varepsilon = k_0 \eta_{rms}$  и потому всегда мало, то первое пропорционально индексу модуляционной неустойчивости, который, в свою очередь, может быть как малым, так и порядка единицы, и даже большим (см. (4.1.2)). Вообще говоря, значение эксцесса больше 3 еще не гарантирует наличие высоких волн (эксцесс зависит не только от амплитуды волны, но и от ее формы). Но в различных работах условия  $\lambda_4 > 3$  фактически приравниваются к ситуациям высокой вероятности высоких волн. В частности, такая связь подтверждается на основе лабораторных измерений в работе [Shemer et al, 2010] и будет видна далее в этой главе по результатам наших исследований.

Связь между спектральными параметрами (описывающими волновые условия в океане) и статистическими (которые, в частности, предупреждают об экстремальных волнах) является первозадачей исследований по проблеме волн-убийц; ей посвящен Раздел 4.2 этой главы. Ее решение позволило бы реализовать оперативный прогноз опасных состояний моря, связанных с условиями, благоприятными для развития модуляционной неустойчивости. Хотя карты индексов BFI уже предоставляются Европейским центром среднесрочного прогноза погоды (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts, ECMWF) (отметим также пример построения таких карт по данным ретроспективного прогноза [Leon & Soares, 2014]), на наш взгляд, возможность использования BFI для прогноза «волн-убийц» еще не ясна окончательно. Эта проблема отчасти будет обсуждаться далее в Разделе 4.4. Обобщения BFI на случай трехмерных волн с определенным угловым спектром предлагались в работах [Waseda et al, 2009; Mori et al, 2011; Рубан, 2010], они не будут затронуты в диссертации.

Еще раз отметим, что исследуемый нами случай однонаправленных волн является наиболее благоприятным для развития модуляционной неустойчивости и одновременно вырожденным с точки зрения классической кинетической теории для резонансно взаимодействующих волн [Zakharov, 1999]; в случае широкого углового спектра волны близки к линейной суперпозиции Стоксовых волн, и доля высоких волн значительно меньше. (Здесь нужно отметить, что роль взаимодействий, близких к резонансным, очень

важна [Stiassnie & Shemer, 2005; Annenkov & Shrira, 2006b; Tanaka, 2007]. Они и играют главную роль в обсуждаемой нами далее динамике.)

В Разделе 4.3 нами описан подход, который был использован для получения статистической информации о нерегулярных однонаправленных волнах, характеризуемых заданным спектром, при сохранении подробной информации о всех реализациях. Это исследование опирается на Раздел 4.2 и имеет своим результатом требуемые окончательные данные: волновые поля с хорошим разрешением в пространстве и времени которые используются для выделения событий аномальных волн и их анализа.

Как обсуждалось в Разделе 3.3, обрушение волн ограничивает возможности их усиления, а потому и неизбежно влияет на вероятность высоких волн. Аккуратный учет этого эффекта в рамках численного моделирования требует аккуратной параметризации эффектов обрушения. В нашем исследовании обрушения волн либо нет вообще (не достигается порог обрушения либо используются модели огибающей, в которых волны не обрушаются), либо обрушений очень мало, так что этот эффект нивелируется введением численной вязкости на коротких масштабах, подобно как в [Chalikov, 2005]. На наш взгляд, проблема учета обрушений волн в статистике экстремальных волн не ограничивается таким техническим подходом и можно ожидать нетривиальных эффектов динамики морских волн, связанных с ограничивающим действием обрушений (например, [Liu et al, 2015]).

Для нас особый интерес представляет вопрос обнаружения в полях нерегулярных волн долгоживущих солитоноподобных групп волн и связанных с ними фазовых корреляций, что делается в Разделе 4.4. Там же содержится обсуждение физических эффектов, обусловленных присутствием солитоноподобных групп, и их реакцией на изменение условий распространения, внешнее воздействие.

В работе нами рассмотрены условия очень большой глубины. Имеющиеся натурные данные для промежуточных глубин ( $kh \sim 1$ ) говорят, по-видимому, о меньшей вероятности «волн-убийц», чем в пределе большой глубины, что качественно согласуется с ослаблением модуляционной неустойчивости на мелководье [Slunyaev et al, 2002; Didenkulova et al, 2013]. Исследования для случая конечной глубины, когда влияние дна существенно, стали появляться лишь недавно (теоретические работы [Janssen & Onorato, 2007; Toffoli et al, 2013; Fernandez et al, 2014] и натурные измерения [Mori et al, 2002; Mai et al, 2010; Didenkulova & Anderson, 2010; Didenkulova, 2011; Зайцев и др., 2011; Кузнецов и др., 2014]). В этом отношении большой интерес представляет случай изменения глубины. Распространяясь из открытого океана к берегу, волны трансформируются из-за изменяющейся глубины. Как следует из предварительных исследований [Sergeeva et al, 2011; Trulsen et al, 2012; Zeng &



Trulsen, 2012; Viotti & Dias, 2014], возможны режимы дополнительного увеличения вероятности высоких волн. Этот вопрос нами затронут в Разделе 4.4.

По содержанию Главы опубликованы следующие статьи в журналах: по Разделу 4.2 [Shemer et al, 2010\*; Слюняев и Сергеева, 2011\*], Разделу 4.3 – [Слюняев и Сергеева, 2011\*, 2012\*; Sergeeva & Slunyaev, 2013\*], Разделу 4.4 – [Slunyaev, 2010\*; Слюняев и Сергеева, 2011\*; Slunyaev et al, 2015\*].

## 4.2 Нелинейная динамика нерегулярных волновых групп с заданным начальным спектром

Главная цель моделирования случайных волн заключается в установлении связи между спектральными и статистическими характеристиками, получение вероятностного описания «волн-убийц» напрямую в контролируемых условиях. В этом разделе рассматриваются, в том числе, результаты лабораторных экспериментов в Большом волновом канале (Groß Wellen Kanal, GWK) Университета г. Ганновера, которые используются, в первую очередь, для верификации и определения пределов применимости численных моделей эволюции волн, которые, в свою очередь, используются в последствии для получения более полной статистики, а также моделирования в условиях, практически недостижимых в экспериментальных лотках (например, расчет длительной эволюции волн, превышающей несколько десятков длин волн). Большой волновой канал является одной из крупнейших экспериментальных бассейнов в Европе и имеет размеры 300 м в длину, 5 м в ширину и 7 м в глубину (для наших экспериментов использовалась глубина  $h = 5$  м). С одной стороны канал оснащен поршневым волнопродуктором под управлением компьютера, с

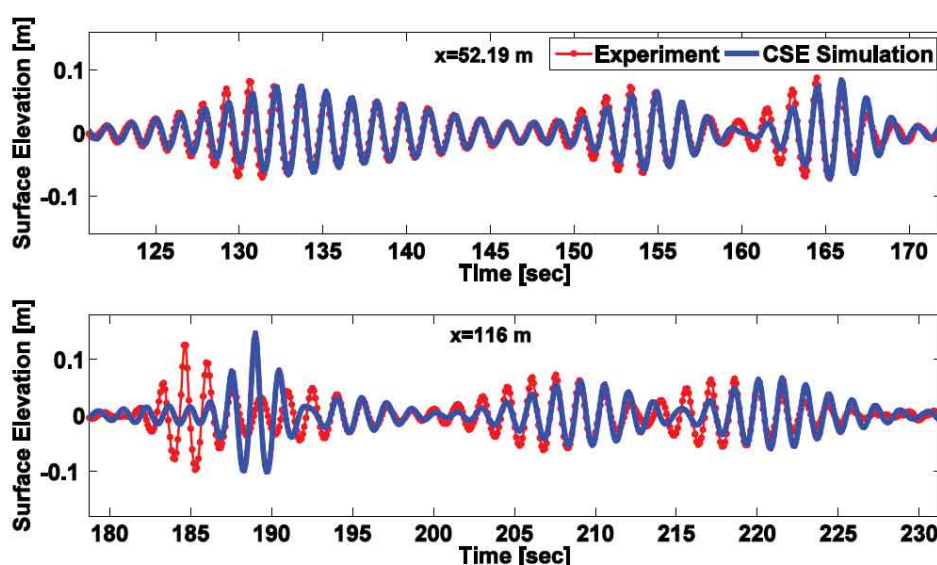


Рис. 4.2.1. Сопоставление данных лабораторных измерений (красным) с расчетом НУШ (синим) на разных расстояниях от волнопродуктора.

другой стороны на расстоянии 270 м от волнопродуктора начинается адсорбирующий пляж с  $30^\circ$  склоном.

Для всех экспериментов, описываемых в этой главе, начальное (или граничное) условие задается однотипно в виде случайной реализации синусоидальных волн с заданной формой относительно узкого спектра Фурье и случайными фазами. Достаточный объем данных для статистического усреднения достигается за счет длинных реализаций нерегулярных волн и большого числа таких реализаций.

В описываемых лабораторных экспериментах условия на волнопродукторе характеризовались гауссовым спектром с шириной на половине уровня энергии  $\Delta\omega/\omega_0=0.054$  и интенсивностью, характеризуемой  $k_0\eta_{rms} = 0.042$ . Этот случай соответствует довольно крутым волнам; при выборе большей амплитуды работы волнопродуктора наблюдались единичные обрушения волн на длине лотка. Эксперименты для других значений крутизны волн, формы и ширины начального спектра были выполнены, соответственно, в [Shemer & Sergeeva, 2009] и [Shemer et al, 2010]. Одна реализация была относительно короткой и составляла примерно 34 волновых периодов (период 1.5 с, откуда длина волны примерно 3.5 м и безразмерная глубина  $k_0h = 9$ ), что соответствует около 17 волн в моментальном

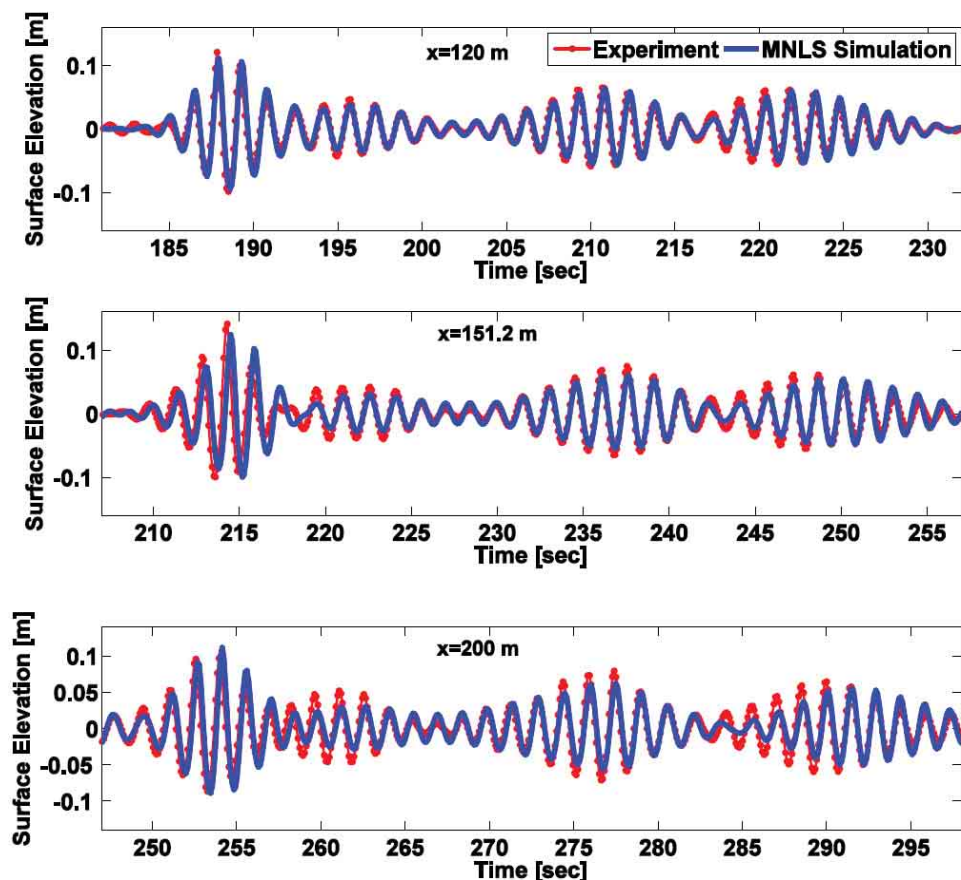


Рис. 4.2.2. Сопоставление данных лабораторных измерений (красным) с расчетом уравнений Диста (синим) на разных расстояниях от волнопродуктора.

снимке.

Волнопродуктор создавал последовательность из трех идентичных волновых цугов (общей длительностью 153.6 с), которая регистрировалась 25 датчиками смещения поверхности (частота измерений 40 Гц), расположенными по длине бассейна. Первый датчик находился на расстоянии 3.59 м от волнопродуктора, что примерно равно одной длине волны; последний датчик – на расстоянии 214 м, см. подробности в [Shemer & Sergeeva, 2009; Shemer et al, 2010\*]. Таким образом, последний датчик заканчивал запись полезного сигнала до того момента, когда цуг дойдет до поглощающего энергию пляжа. Запуск следующего цуга с новой реализацией осуществлялся много позже, когда видимые возмущения в бассейне исчезали. Такая постановка эксперимента призвана исключить эффект отраженных от другого конца бассейна волн, она отличается от использованной всеми другими исследователями, когда волнопродуктор работал непрерывно в течение длительного времени. Однако, медленно затухающие очень длинные волны (порядка длины бассейна) все равно регистрировались на некоторых записях волн; они отфильтровывались в процессе обработки.

Измерения смещения поверхности на первом датчике ( $x = 3.59$  м) использовались для задания граничного условия для последующего моделирования эволюции волн в рамках пространственной версии уравнения Диста (2.5.7)-(2.5.9), при этом для определения комплексной огибающей выделялась компонента свободных волн (вручную, по спектру Фурье). На Рис. 4.2.2 приведен пример сопоставления результатов такого расчета с измерениями в лабораторном лотке, в то время как на Рис. 4.2.1 дан схожий пример, но расчет велся в рамках более простой модели, – НУШ, а смещение поверхности восстанавливалось с учетом слагаемых трех порядков малости (2.5.10), как описано в Разделе 2.5. На Рис. 4.2.1 заметные отличия видны уже на дистанции 52 м, что равно примерно 15 длинам волн. На больших дистанциях количественное описание волн в рамках НУШ становится невозможным. В то же время численное моделирование в рамках модели

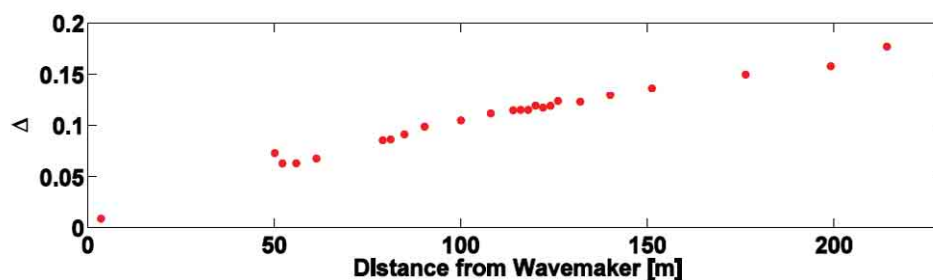


Рис. 4.2.3. Среднеквадратичное отклонение, нормированное на значительную высоту, для расчета эволюции волн в рамках уравнений Диста от лабораторных измерений.

оггибающей следующего порядка (Рис. 4.2.2) дает от хорошего до удовлетворительного описания волн на протяжении всего лотка. На Рис. 4.2.3 показано среднеквадратическое отклонение измеренного смещения поверхности от рассчитанного, подобно Рис. 3.1.2, 3.1.3, только сейчас абсолютная величина ошибки нормировалась на значительную высоту, определенную как  $4\eta_{rms}$ . Видно, что эволюция на расстоянии порядка 100 длин волн приводит к погрешности до порядка 15%, при том, что рассмотрен случай довольно большой крутизны волн. Рост погрешности с увеличением дистанции близок к линейному. Можно ожидать, что значительный вклад в погрешность оказывает условие при  $x = 3.59$  м, определенное по данным измерений, см. обсуждение в [Shemer et al, 2010\*]. Таким образом, модель Диста способна хорошо описывать динамику интенсивных волн, создаваемых в описываемых лабораторных экспериментах. Она использована в дальнейшем, в том числе, для моделирования вне рамок естественных технических ограничений лабораторных лотков: использования большего числа случайных реализаций и расчета эволюции волн на большие дистанции.

Рис. 4.2.4 дает представление об эволюции спектров волн. Как и прежде, каждая лабораторная реализация, измеренная на дистанции  $x = 3.59$  м, использована для расчета эволюции в рамках моделей НУШ и Диста. Частотные спектры на Рис. 4.2.4 построены посредством усреднения по 46 реализациям. Начальный спектр на расстоянии  $x = 3.59$  м еще сохраняет симметричность, предписанную гауссовым спектром сигнала на волнопродукторе, но кратные гармоники Стоксовых волн уже сформировались. На расстоянии примерно 15 волновых периодов ( $x = 52.2$  м) уже видны уширение и сильная асимметрия спектральных гармоник для лабораторных измерений и для расчета модели Диста. Асимметрия спектра не описывается моделью НУШ, и как видно из Рис. 4.2.4, эта модель завышает ширину спектра свободных волн. Модель Диста демонстрирует хорошее совпадение с измеренным спектром на всей длине лотка; это касается как области свободных волн, так и областей кратных частот. Погрешности измерений могут оправдать не слишком хорошее согласие между профилями измеренного спектра и рассчитанного в рамках уравнений Диста в областях провала между 1 и 2 гармониками и в областях 2 и 3 гармоник.

Определим безразмерную ширину частотного спектра как  $\nu_\omega = \Delta\omega/\omega_0$ , тогда

$$\nu_\omega = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{\int (\omega - \omega_0)^2 S(\omega) d\omega}{\int S(\omega) d\omega}} = \sqrt{\frac{m_0 m_2}{m_1^2} - 1}, \quad (4.2.1)$$

где  $S(\omega)$  – энергетический спектр, спектральные моменты определены по формуле

$$m_j = \int \omega^j S d\omega. \quad (4.2.2)$$

Здесь при сопоставлении результатов численных и лабораторных экспериментов интегрирование по спектральному домену в (4.2.1) и (4.2.2) осуществлялось только по области свободных волн, тем самым выделялись динамические эффекты в результате резонансных или квазирезонансных волновых взаимодействий. Нижний индекс в  $\nu_\omega$  означает ширину частотного спектра в отличие от ширины спектра волновых чисел  $\nu_k$ , которая будет обсуждаться далее.

Эволюция спектральной ширины вдоль лабораторного лотка построена на Рис. 4.2.5, она также рассчитана на расстояниях, превышающих длину экспериментальной установки. В целом, обе модели огибающей «схватывают» динамику спектральной ширины, демонстрируя сначала расширение. Видно, что после уширения спектр несколько сужается, и потом продолжаются долгопериодные осцилляции, которые кажутся затухающими в

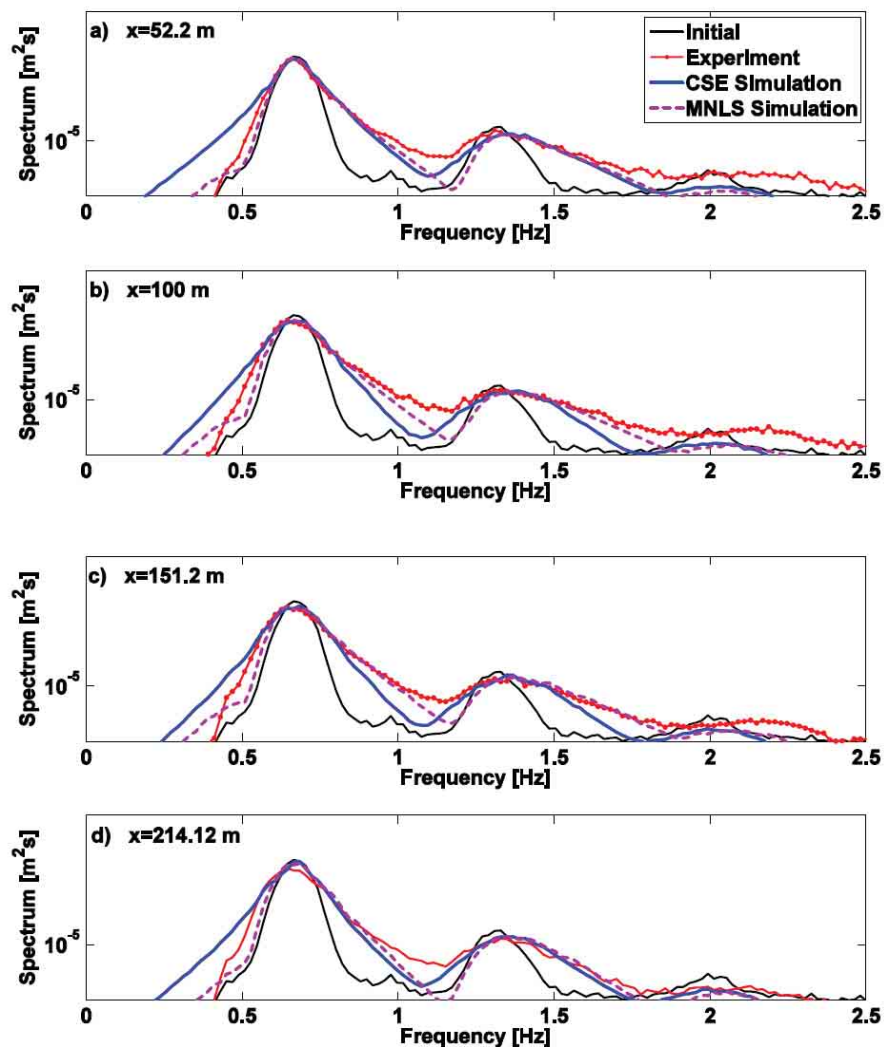


Рис. 4.2.4. Эволюция энергетического спектра волн вдоль лотка: по данным лабораторных измерений (красным с точками) и по данным расчетов моделей НУШ (синим) и Диста (фиолетовый пунктир). Спектр на дистанции  $x = 3.59$  м построен черной линией.

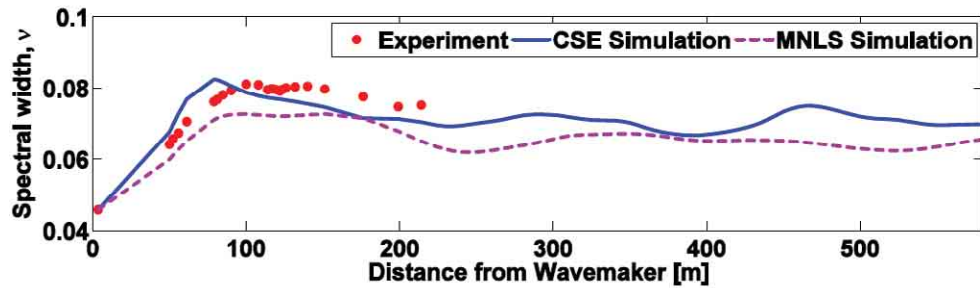
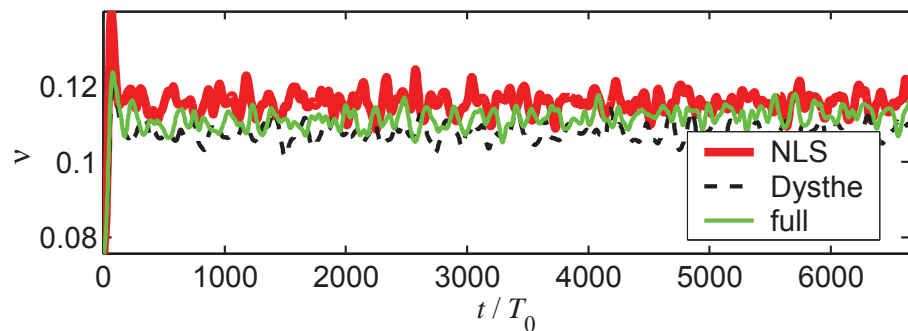


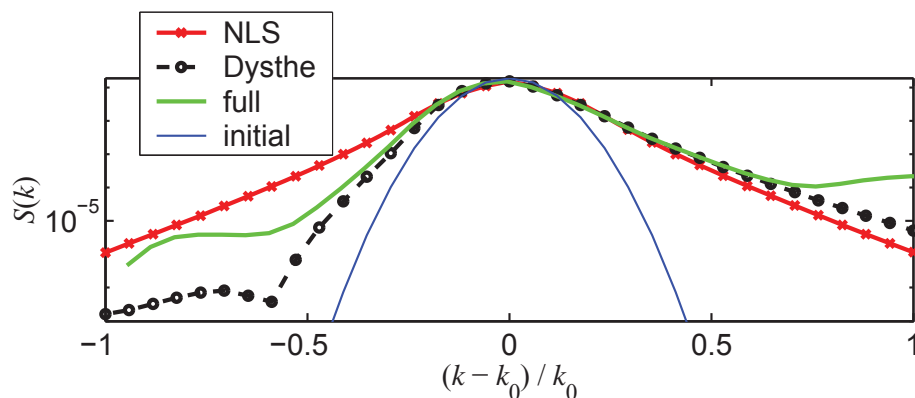
Рис. 4.2.5. Эволюция нормированной спектральной ширины по данным лабораторных (точки) и численных (НУШ – синим и модель Диста – фиолетовым пунктиром) экспериментов.

рамках модели Диста. По абсолютным значениям модель НУШ демонстрирует более экстремальное поведение, чем измерения: спектр растет быстрее и до большей ширины, а потом резче сужается. Модель Диста, наоборот, кажется занижающей скорость роста спектральной ширины и ее максимальные значения.

Численный расчет эволюции волн на дистанциях, превышающих лабораторный лоток, позволяет сделать вывод о немонотонной динамике спектральной ширины, отмеченной еще в экспериментальной работе [Shemer & Sergeeva, 2009]. На Рис. 4.2.5 видно, что



(a)



(б)

Рис. 4.2.6. Расчет моделей НУШ (красным), Диста (черный пунктир) и исходных уравнений Эйлера (зеленым): зависимость ширины спектра от времени (а) и профили квазистационарных энерггетических спектров в области свободных волн (б), синей линией построен спектр начального условия.

лабораторные данные позволили отследить некоторое сужение спектра после его резкого расширения, но является ли оно признаком цикличности или какой-то иной динамики, по данным лабораторных измерений было неясно.

Расчет волн на еще большие дистанции был выполнен в рамках моделей НУШ, Диста и полных уравнений в конформных переменных [Zakharov et al, 2002], только уже в рамках начальной задачи – с целью выяснения асимптотики волновых ансамблей на больших временах/дистанциях ( $\sim \varepsilon^{-4}$ , где  $\varepsilon$  – крутизна). Остальные параметры экспериментов сохранены (такое же число волн в счетном домене, изначально гауссов профиль спектра с характерной крутизной  $k_0 \eta_{rms} \approx 0.042$  и безразмерной шириной  $\nu_k \equiv \Delta k/k_0 \approx 0.076$ , использовано 100 реализаций). Поведение ширины спектра во времени и спектры волн, полученные в рамках разных моделей на больших временах, показаны на Рис. 4.2.6. Из него можно сделать вывод о достижении волнами квазиравновесного состояния после стадии кратковременного уширения на начальном этапе. Рис. 4.2.6а согласуется с результатами на Рис. 4.2.5, а Рис. 4.2.6б – со спектрами на Рис. 4.2.4. Также можно сделать заключение, что длина лабораторного лотка (более 200 метров!) оказалась едва достаточной для описания переходного процесса на начальной стадии, связанного с уширением спектра, см. Рис. 4.2.5.

Эволюция статистических моментов (асимметрии и эксцесса) для смещения поверхности показана на Рис. 4.2.7 для лабораторных данных расчетов в рамках пространственных моделей НУШ и Диста. Динамика статистических моментов качественно повторяет эволюцию спектральной ширины. Видно хорошее согласие между моделью Диста и лабораторными измерениями, оно особенно хорошо для компонент свободных волн (для модели огибающей она задается комплексной амплитудой огибающей, а для лабораторных измерений была выделена вручную по спектру Фурье). Из Рис. 4.2.7а следует, что асимметрия волн полностью определяется связанными (Стоксовыми) компонентами волн. Эксцесс (Рис. 4.2.7б) наоборот большей частью определяется свободными волнами, таким образом т.н. динамическая часть эксцесса (первое слагаемое в правой части формулы (4.1.3)) доминирует. Максимальное значение эксцесса на Рис. 4.2.7б по данным лабораторных экспериментов достигает около 5, при том, что в гауссовом случайном поле оно должно равняться 3. НУШ заметно переоценивает максимальное значение  $\lambda_4$ . Видно небольшое отличие эксцесса от 3 уже на первом датчике  $x = 3.59$  м, что связано с относительно небольшим размером статистического ансамбля. На больших временах эксцесс примерно равен 4.

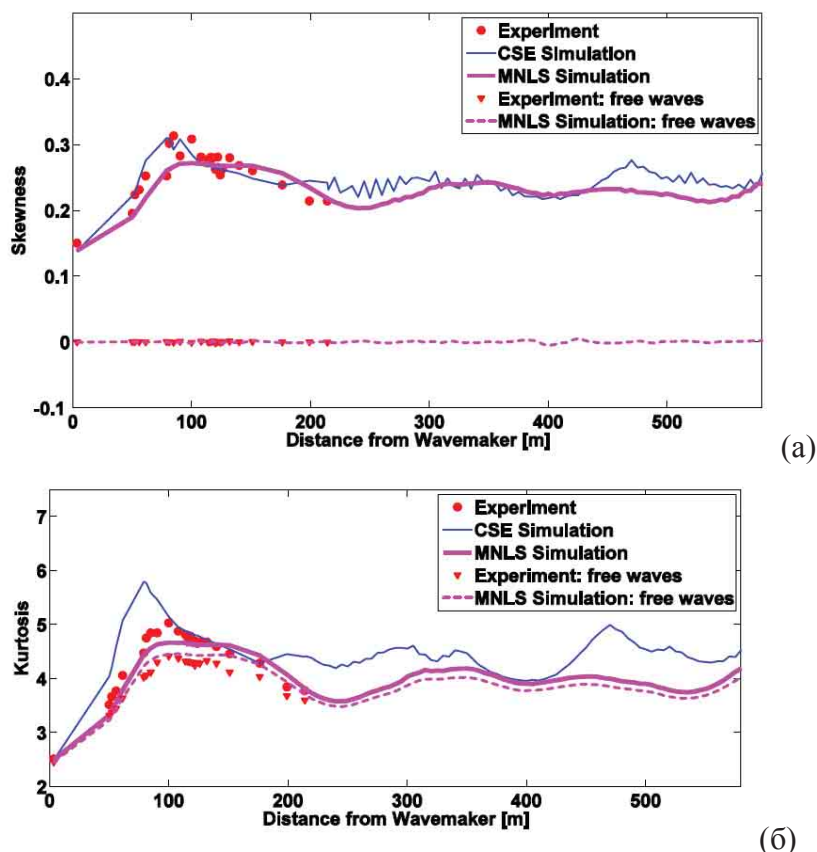


Рис. 4.2.7. Эволюция асимметрии  $\lambda_3$  и эксцесса  $\lambda_4$  смещения поверхности от дистанции по данным лабораторных (точки) и численных (НУШ – синим и модель Диста – розовым) экспериментов. Треугольники и пунктирная линия соответствуют статистическим моментам, построенным для компонент свободных волн в лабораторных экспериментах и расчетах модели Диста соответственно.

В вычислительных экспериментах [Annenkov & Shrira, 2009a] по моделированию трехмерных нерегулярных волн в рамках уравнений Захарова отмечалась очень схожая динамика: усиление эксцесса до примерно 4 и дальнейшее его уменьшение на больших временах до примерно 3.1 (для  $t > 60 T_0$ ), причем динамический эксцесс также претерпевал стадию обострения, а эксцесс от связанных волн монотонно убывал. Таким образом, наличие поперечной координаты не позволяет волнам достичь квазиравновесного состояния, наблюдающегося в наших экспериментах для однонаправленных волн.

Функции распределения вероятности превышения высот волн, построенные по данным лабораторных и численных экспериментов, построены на Рис. 4.2.8 для 3 дистанций внутри лотка и на 400 м от волнопродуктора (только результаты численного моделирования), что существенно превышает длину экспериментального бассейна. Имеет место очень хорошее совпадение между двумя моделями огибающей и лабораторными измерениями на всех дистанциях и фактически для всех значений высот волн. Некоторый несистематический



разброс величин есть только в области «волн-убийц»  $H > 8\eta_{rms}$ , который может быть связан с небольшим количеством событий в этом диапазоне высот. Видно превышение вероятности «волн-убийц» на порядок по отношению к распределению Рэля, также построенному на Рис. 4.2.8. Вероятность очень высоких волн уменьшается после стадии обострения на дистанции примерно 100 м (30 длин волн). Так что максимальная вероятность высоких волн наблюдается примерно на тех же дистанциях, где и максимум эксцесса, когда происходит максимальное уширение спектра.

Отметим, что функции распределения вероятности высот волн, амплитуд гребней и ложбин, построенные в [Shemer & Sergeeva, 2009] на основе теоретических распределений для нелинейных волн 2 и 3 порядка [Tayfun & Fedele, 2007], демонстрируют куда лучшее согласие с экспериментом, чем распределение Рэля, хотя и далеко не идеальное. Так же отметим, что для построения выше указанных распределений требуется вычислять

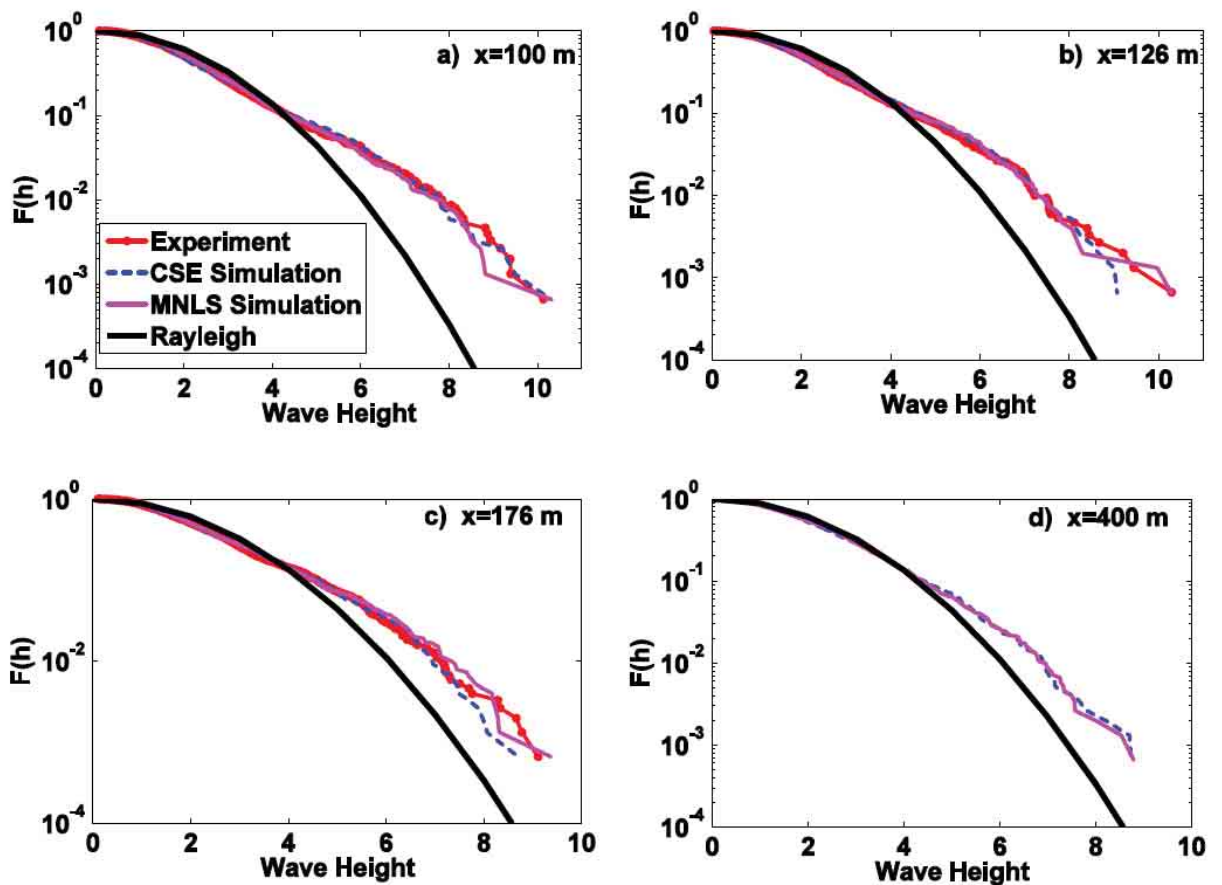


Рис. 4.2.8. Распределения вероятности высот волн на разных дистанциях от волнопродуктора: 100, 126, 176 и 400 м. Построены кривые для лабораторных измерений (красная линия с точками), моделирования НУШ (синий пунктир) и уравнений Диста (розовым). Также построено модельное распределение Рэля (черным). Высоты вероятности нормированы на  $\sigma = \eta_{rms}$ .

кумулянты разных порядков по данным полям смещения поверхности, таким образом, знания спектра не достаточно для вероятностного описания.

Итак, сопоставление результатов лабораторных измерений с численным моделированием показало хорошую применимость модели Диста и даже (в статистическом смысле и с очевидными ограничениями) нелинейного уравнения Шредингера для описания эволюции усредненного спектра и статистических моментов полей смещения поверхности. Численное моделирование уравнений огибающей было использовано для получения данных при других исходных условиях. Для расчета исходных уравнений гидродинамики решается начальная задача. В этом случае вместо временных записей волн исследуются пространственные записи. На Рис. 4.2.9 собраны результаты численного моделирования временной эволюции волн в рамках полных уравнений (штриховая линия) и НУШ (сплошная линия), а также лабораторных экспериментов (значки, из работ [Shemer & Sergeeva, 2009; Shemer et al, 2010, 2010\*]), построенные в переменных  $BFI$  от времени, нормированного на характерное нелинейное время  $T_{nl}$ , где (в отличие от формулы (3.2.4) для единичных солитонов)

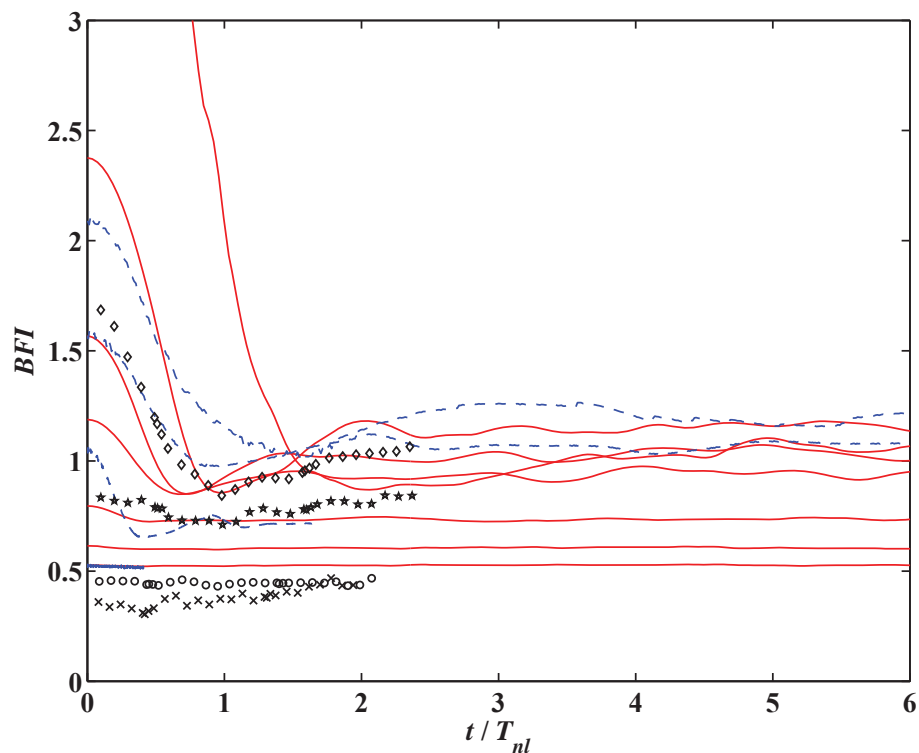


Рис. 4.2.9. Зависимость моментального значения  $BFI$  от нормированной дистанции / времени по данным численного моделирования НУШ (сплошная красная линия), исходных уравнений гидродинамики (синяя штриховая линия) и лабораторных экспериментов (последовательности значков). Общая картина.

$$T_{nl} = \frac{1}{\omega_0 \varepsilon^2}, \quad \varepsilon = k_0 \eta_{rms}. \quad (4.2.3)$$

Пересчет дистанции в эквивалентное время происходил через групповую скорость волн характерной длины  $x = C_{gr}t$ ,  $C_{gr} = \omega_0/(2k_0)$ . Начальные условия для расчета НУШ отличались выбором разной ширины гауссового спектра при заданной интенсивности волн, а для моделирования исходных уравнений и в лабораторных экспериментах наоборот, фиксированной оставалась ширина спектра, а изменялась интенсивность волн (см. параметры экспериментов в [Slunyaev, 2010\*]).

Видно, что результаты всех экспериментов хорошо согласуются в выбранных осях. Если начальные условия соответствуют  $BFI > 1$ , то имеет место переходный процесс, описанный выше, с характерным временем  $\sim \varepsilon^{-2} \omega_0^{-1}$ . За это время за счет изменения спектра система приходит в состояние с  $BFI \sim 1$ . Начальные условия, соответствующие малым  $BFI$ , не демонстрируют такого транзитного эффекта. Важно, что наибольшее число аномально высоких волн (как по рассчитанным функциям вероятностей, так и по величине эксцесса) наблюдается именно во время переходного процесса. Эти результаты согласуются с имеющимися в литературе (например, [Onorato et al, 2001; Dysthe et al, 2003; Janssen, 2003; Socquet-Juglard et al, 2005; Mori et al, 2007]).

Зависимости ширины усредненного спектра на Рис. 2.4.6а, полученные в результате длительного численного моделирования различных моделей (до характерного "кинетического" времени  $\sim \varepsilon^{-4} \omega_0^{-1}$ ), не демонстрируют эволюции спектра после вышеупомянутого переходного процесса, подтверждая вырожденность случая однонаправленных волн в смысле условий нелинейных взаимодействий [Zakharov, 1999].

Из результатов, приведенных на Рис. 4.2.5, 4.2.7, 4.2.9 следует, что волны в лабораторном лотке достигают стационарного состояния только ближе к его концу. Так как многие экспериментальные установки существенно короче 300-м ганноверского бассейна, то в них волновые ансамбли с начальным значением  $BFI$ , превосходящим единицу, просто не успеют прийти в квазиравновесное состояние.

### **4.3 Численное моделирование нерегулярных однонаправленных волн с учетом сильной нелинейности**

Исследование «волн-убийц» на основе натуральных данных до сих пор затруднительно. Пользуясь традиционными измерениями смещения водной поверхности только в одной пространственной точке, динамика аномальных волн не может быть исследована без привлечения дополнительных предположений, как уже обсуждалось в Разделе 2.5. Статистика измеренных в море волн-убийц определяется с очень плохой достоверностью из-

за малого числа их регистраций при значительном количестве недостоверных волнограмм. Так, в исследованиях [Christou & Ewans, 2011] на базе более 600 тыс. волновых записей было первоначально выделено около 22 тыс., содержащих аномальные волны. После контроля их достоверности осталось только 3.5 тыс. записей, так что доля прошедших контроль качества записей аномальных волн составило менее 20 % от доли прошедших этот контроль обычных волн. Кроме того, условия стационарности в открытом море неконтролируемы, поэтому возникает проблема статистической неоднородности даже для натуральных данных, полученных в одном месте.

В настоящее время существует значительное число работ, посвященных численному и лабораторному исследованию экстремальных поверхностных волн, см. обзор в Разделе 3.1. Лабораторные исследования всегда являются очень затратными с точки зрения потраченного времени и использования дорогих установок. Численное моделирование рассматривается как более дешевая и удобная альтернатива лабораторным экспериментам. При этом используются гидродинамические модели различной точности, которых в настоящий момент существует достаточно много – от приближенных до полных уравнений гидродинамики (см., в частности, [Дьяченко и др., 1996; Dyachenko et al, 1996; Clamond & Grue, 2001; Chalikov & Sheinin, 1998, 2005; Zakharov et al, 2002; Ruban, 2005; Чаликов, 2014]). Обычно рассматриваются детерминистские начальные условия с целью исследовать действие определенного физического механизма либо моделируется эволюция квазислучайных волновых полей. Во многих случаях получаемые данные моделирования случайных волновых реализаций используются только для статистического усреднения и определения статистики волн (так называемое стохастическое моделирование).

Рассчитываемые уравнения обычно предоставляют эволюцию профилей волн во времени (в частности, исходные уравнения гидродинамики разрешены относительно производных по времени и предназначены для решения начальной задачи), в то время как в приложении к реальным волнам обычно имеют дело с временными реализациями (натурные и лабораторные измерения). Из-за дисперсии волн на глубокой воде анализ временных и пространственных записей волн может существенно различаться (например, частотные спектры волн уже, чем спектры волновых чисел). Немногочисленные модели, рассчитывающие эволюцию временных записей в пространстве, используют слабонелинейное приближение (пространственная версия уравнений Захарова) либо в дополнение предполагают узость спектра (пространственные версии уравнений для модулированных волн).

Приводимые в настоящем исследовании направлены, в частности, на получение временных записей волн в результате моделирования сильнонелинейных уравнений гидродинамики (эволюционных по времени). Это объясняет наш подход, когда данные эволюции волн сохраняются с высоким разрешением не только по пространству, но и по времени. В результате могут быть сформированы как временные записи волновых полей, так и пространственные. Получается полная информация о пространственно-временной эволюции аномальных волн, возникающих в поле случайных волн.

Для расчета эволюции здесь используется псевдоспектральная численная схема высокого порядка (HOSM [West et al, 1987], см. Приложение Б) для потенциального течения, которая хорошо себя зарекомендовала при расчете довольно крутых волн (до крутизны порядка  $\varepsilon \equiv kH / 2 = 0.3$ , где  $k$  – волновое число,  $H$  – высота волны). В различных расчетах использовались параметры нелинейности схемы  $M = 3$  и  $6$ , что соответствует учету соответственно 4- и 7-волновых взаимодействий. Рассматривается распространение однонаправленных волн (вдоль оси  $Ox$ ) в условиях глубокой воды.

Программный код был ранее верифицирован путем сопоставления с другими моделями поверхностных волн (приближенными и кодом решения исходных уравнений гидродинамики в конформных переменных), а также на материале лабораторных измерений динамики интенсивных волновых групп, как описано в Главе 3.

### Задание начальных условий

Перед моделированием ставилась задача воссоздать «состояние моря», характеризуемое заданным спектром волнения. В дополнение к очень узким спектрам гауссовой формы, которые рассматривались в Разделе 4.2, особый интерес был уделен максимально реалистичным морским спектрам. Здесь был использован модельный спектр JONSWAP, являющийся параметризацией большого объема натуральных измерений в Северном море [Hasselmann et al, 1973; Massel, 1996; Holthuijsen, 2007; Лопатухин, 2012]. Частотный спектр JONSWAP имеет вид

$$S(\omega) = \alpha \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^{-5} \exp \left[ -\frac{5}{4} \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^{-4} \right] \gamma^{\exp \left[ \frac{1}{2\sigma^2} \left( \frac{\omega - \omega_p}{\omega_p} \right)^2 \right]}, \quad (4.3.1)$$

$$\sigma(\omega) = \begin{cases} 0.07, & \omega < \omega_p \\ 0.09 & \omega > \omega_p \end{cases}.$$

Спектр содержит 3 параметра:  $T_p$  – пиковая частота волнения, связанная с циклической частотой  $\omega_p = 2\pi/T_p$ ,  $H_s$  – значительная высот волн (определяющая в совокупности с другими параметрами величину  $\alpha$ ) и пиковатость  $\gamma$  (степень узости спектра). Было промоделировано несколько состояний, согласно параметрам, приведенным в Табл. 4.3.1. Здесь будут рассмотрены только два случая, соответствующие шифрам А и Е (выделены жирным в Табл. 4.3.1). Они являются наиболее представительными; случай А соответствует волнам умеренной интенсивности, и случай Е – довольно сильной нелинейности, когда наблюдались единичные случаи обрушения волн (взрывная расходимость численной схемы), которые были исключены введением численной вязкости на коротких масштабах. Оба этих случая соответствуют небольшим значениям пиковатости (3 и 3.3 соответственно), что наиболее типично для морских условий. В случае большой пиковатости (как в случае F, см. Табл. 4.3.1) волны становятся более экстремальными и число обрушений становится значительным.

В качестве начального условия задается волновое поле в момент времени  $t = 0$  на

Таблица 4.3.1. Характеристики спектра волн, задаваемые в стохастических численных экспериментах.

Шифр эксперимента	$T_p$ , с	$H_s$ , м	$k_p \eta_{rms}$	$\gamma$
<b>А</b>	<b>10</b>	<b>3.5</b>	<b>0.035</b>	<b>3</b>
В	10	7	0.070	3
С	10	9	0.090	3
Д	7	3.5	0.072	3
<b>Е</b>	<b>10.5</b>	<b>7</b>	<b>0.064</b>	<b>3.3</b>
F	10.5	8	0.073	6

периодическом домене размером около 10 км, так что это расстояние соответствует дистанции, которую проходит волна с периодом  $T_p$  за 20 мин. Таким образом, при регистрации в одной пространственной точке за 20 мин записи все проходящие через эту точку волны – *разные*. Разрешение получаемых данных равно 2048 на 2048 точек, что соответствует примерно 0.6 с на 5 м, а область данных имеет размер примерно 120 волновых периодов на 60 длин волн. Умеренное разрешение было выбрано для облегчения последующей обработки пространственно-временных полей в 20 реализациях для каждого выбора спектральных параметров.

Предположение о морских волнах как случайном Гауссовом процессе ведет к естественной идее о задании начальных условий в виде суперпозиции синусоидальных волн со случайными фазами, подобно как делалось в предыдущем разделе. Для исходных уравнений гидродинамики (Приложение Б) необходимо задать два поля: смещения поверхности  $\eta(x, t = 0)$  и потенциала скорости на поверхности  $\Phi(x, t = 0)$ . Из-за нелинейности эти функции связаны нетривиальным образом, так что в случае существенной нелинейности волн и неузкого спектра задание начальных условий с верно связанными между собой  $\eta(x, t = 0)$  и  $\Phi(x, t = 0)$  является трудной задачей, как уже обсуждалось в Разделе 2.5.

Часто при задании начальных условий используют связь между полями смещения и скорости, существующую в линейном пределе. Последствия такого грубого задания начальных условий можно видеть на Рис. 4.3.1а, где построена зависимость от времени

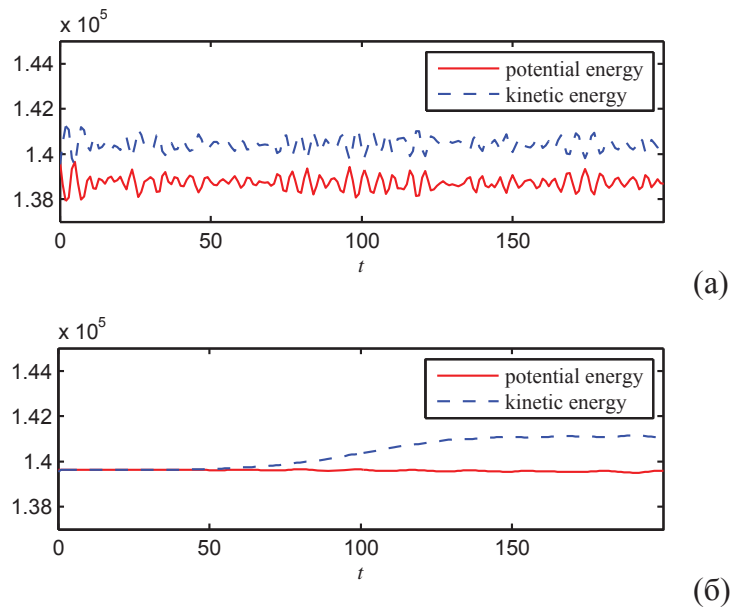


Рис. 4.3.1. Временные зависимости кинетической и потенциальной энергии волн при начальном условии с линейной связью между полями смещения поверхности и скорости (а), но медленном включении нелинейности (б). Расчет соответствует условиям А (см. Табл. 4.3.1).

величин потенциальной и кинетической энергии волн –  $W^k$  и  $W^p$ :

$$W^k = \frac{1}{2} \int \Phi \eta_t dx, \quad W^p = \frac{g}{2} \int \eta^2 dx. \quad (4.3.2)$$

В соответствии с линейным соотношением волны изначально задаются с равными долями потенциальной и кинетической энергии. Однако для нелинейных волн характерно превышение доли кинетической энергии. В результате задания начальных условий, не учитывающего этот эффект, возникают не только попутные, но и встречные паразитные волны, видные на  $(\omega, k)$ -диаграммах Фурье (здесь не приводятся, но показаны и обсуждаются

далее), а из Рис. 4.3.1а видны связанные с ними биения значений энергии, характерные для картины стоячих/встречных волн. Взаимодействие со встречными, более длинными волнами иногда может быть заметно даже на записях смещения поверхности.

Для избавления от этого эффекта нелинейные слагаемые в уравнениях граничных условий на поверхности медленно «включались», чтобы волны успели «приспособиться» к нелинейности, следуя [Dommermuth, 2000]. Характерный масштаб такого «приспосабливания» – период волны и кроме физически нежелаемых эффектов, описываемых ниже, столь быстрая перестройка волн ухудшает и свойства устойчивости численного счета. На Рис. 4.3.1б построена зависимость потенциальной и кинетической энергии в системе при медленном включении нелинейности (представленная запись соответствует примерно 20 волновым периодам). Видно плавное разделение долей потенциальной и кинетической энергии. При этом на  $(\omega, k)$ -диаграммах доля встречных волн сильно уменьшается, как показано на Рис. 4.3.2. На Рис. 4.3.2а пятна энергии на левой ветви

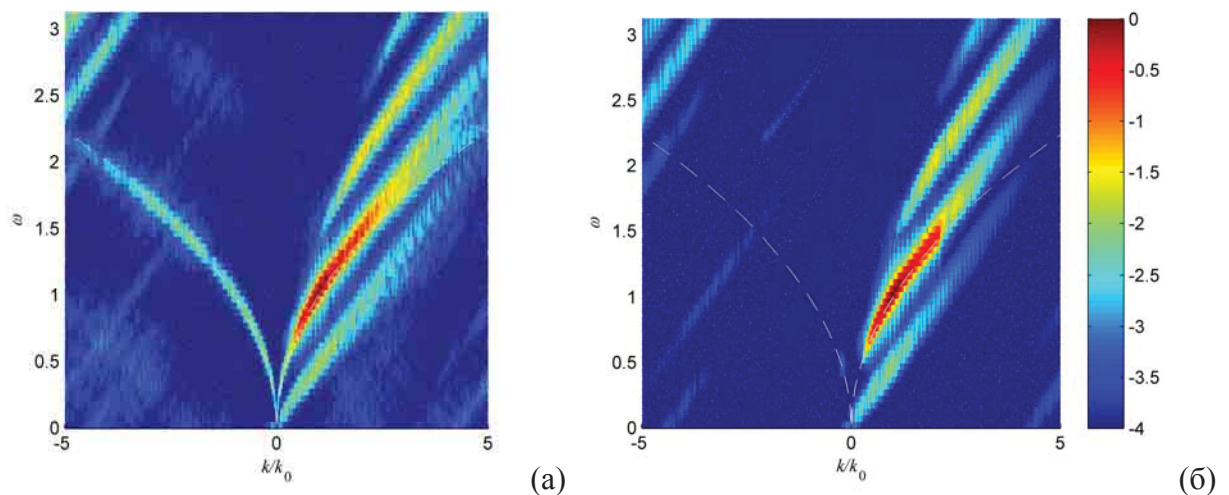


Рис. 4.3.2. Примеры спектральных  $(\omega, k)$  диаграмм для расчета уравнений Эйлера методом НОСМ с моментальным (а) и медленным (б) «включением» нелинейности. Цветом построена логарифмическая нормированная амплитуда Фурье (в диапазоне от максимума до  $10^{-4}$ ) в осях нормированного волнового числа и частоты. Белым пунктиром построена дисперсионная зависимость для длинных волн  $\omega^2 = |gk|$ .

соотношения  $\omega^2 = |gk|$  соответствуют встречным волнам. На Рис. 4.3.2а таких волн не наблюдается вообще (выбор диапазона значений на рисунке соответствует минимально различимой амплитуде Фурье-компоненты величиной  $10^{-4}$  от амплитуды максимальной гармоники; «паразитные» пятна на Рис. 4.3.2 являются следствием невысокого разрешения продемонстрированных пробных экспериментов).



Кроме установления верных конфигураций индивидуальных бегущих волн начальная стадия эволюции может содержать более медленный процесс, описанный в Разделе 4.2, который имеет характерный масштаб  $\varepsilon^{-2} T_p$  и много раз наблюдался в лабораторных и численных экспериментах (например, [Onorato et al, 2001; Dysthe et al, 2003; Janssen, 2003; Annenkov & Shrira, 2009b; Shemer & Sergeeva, 2009; Shemer et al, 2010, 2010\*]; Слюняев и Сергеева, 2011\*]). Он проявляется в переходной стадии, когда спектр уширяется и возрастает доля высоких волн. Затем спектр несколько релаксирует и система переходит в квазиравновесное состояние. Такой переходный процесс наиболее выражен в случаях узкого спектра (большая пиковатость  $\gamma$ , ведущая к большим значениям BFI [Serio et al, 2005; Waseda et al, 2009] и не наблюдается при достаточно широком спектре или малых высотах волн. Как следует из результатов, представленных в Разделе 4.2, квазиравновесное состояние достигается за единицы «нелинейных времен»  $\varepsilon^{-2} T_p$ .

### **Численное моделирование квазистационарной эволюции волн («состояний моря»)**

Численное моделирование проводилось для набора реализаций (случайный выбор начальных фаз волн), здесь описывается по 20 реализаций серии А (при параметре схемы НОСМ  $M = 6$ ) и серии Е (при  $M = 3$ ). Первые 200 с эволюции (примерно 20 периодов) отводились на медленное включение нелинейности и установление квазиравновесного состояния. После расчета случайной реализации в течение последующих 20 мин полученные данные использовались для обработки.

На Рис. 4.3.3, 4.3.4 построены спектры, характеризующие состояние моря (на основе всех реализаций), для случаев А и Е соответственно. Пунктирной линией на рисунках приведен профиль спектра JONSWAP, используемый для задания начальных условий. Видно, что этот профиль несколько искажен из-за нелинейных процессов (для индивидуальных реализаций спектр изрезан много больше), но соответствие между желаемым и наблюдаемым спектрами на Рис. 4.3.3 отличное. Судя по отсутствию существенной изменчивости пространственного спектра во времени, моделируемые волновые состояния близки к стационарным. Таким образом, задача моделирования морского состояния с заданным спектром JONSWAP в наших численных экспериментах достигнута.

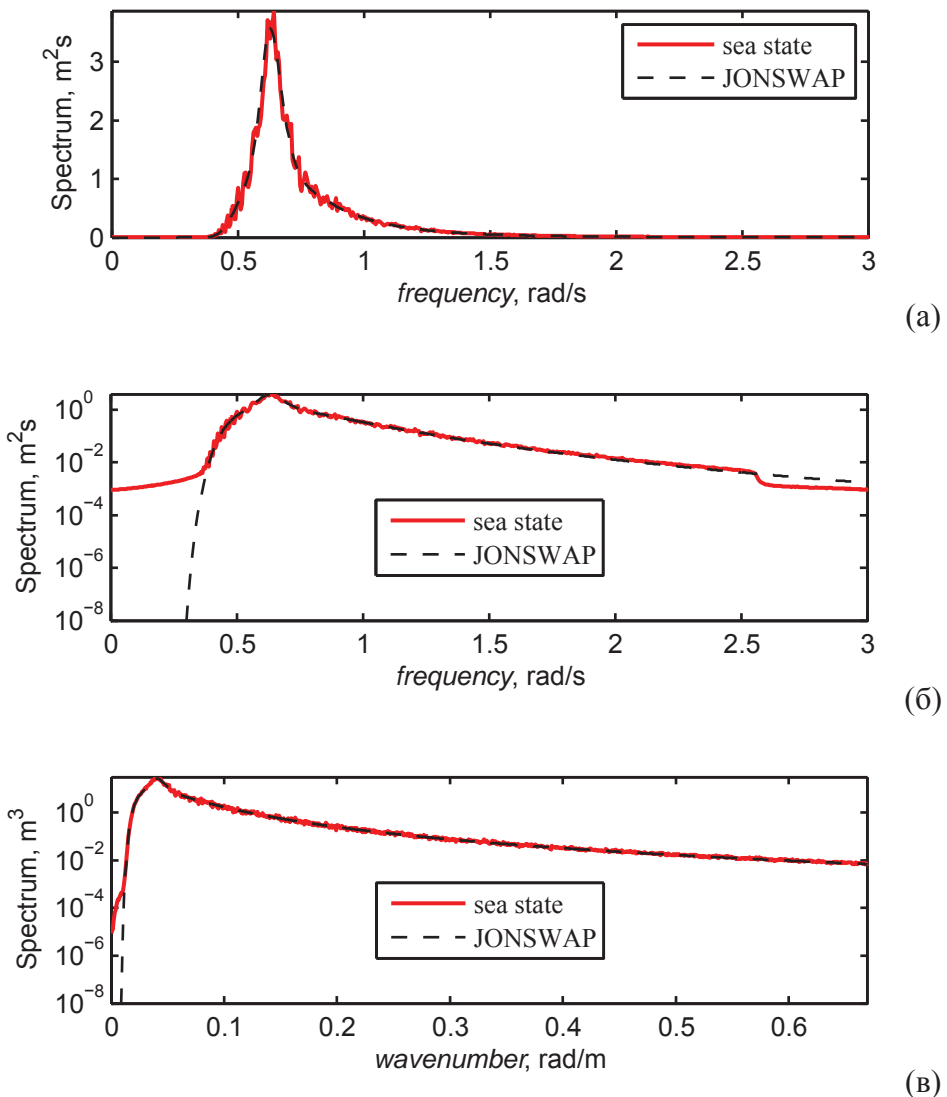


Рис. 4.3.3. Частотный спектр в линейных (а) и полулогарифмических (б) осях, а также спектр волновых чисел (в) для состояния А.

На Рис. 4.3.4а видно некоторое отклонение спектра в область низких частот, это явление хорошо известно и связано с нелинейностью волн. Кроме того, в области коротких волн можно отметить более быстрое спадание расчетного спектра в сравнении с моделируемым. Это связано с эффективным затуханием, введенным в численную схему для подавления процессов обрушения волн. Метод HOSM не способен рассчитывать обрушающиеся и просто очень крутые волны (приближающиеся к  $kH/2 = 0.4$ ), поэтому во избежание неустойчивости схемы требуется сток энергии в коротких масштабах пространственного спектра Фурье. Большая интенсивность волн в случае Е и медленный (степенной) закон спадания спектра JONSWAP создают условия для появления очень крутых/обрушающихся волн. В результате использования эффективного затухания в случаях большой высоты волн среднеквадратичное смещение поверхности воды  $\eta_{rms}$  в течение расчета за 20 мин может уменьшаться на величину порядка 10 %.

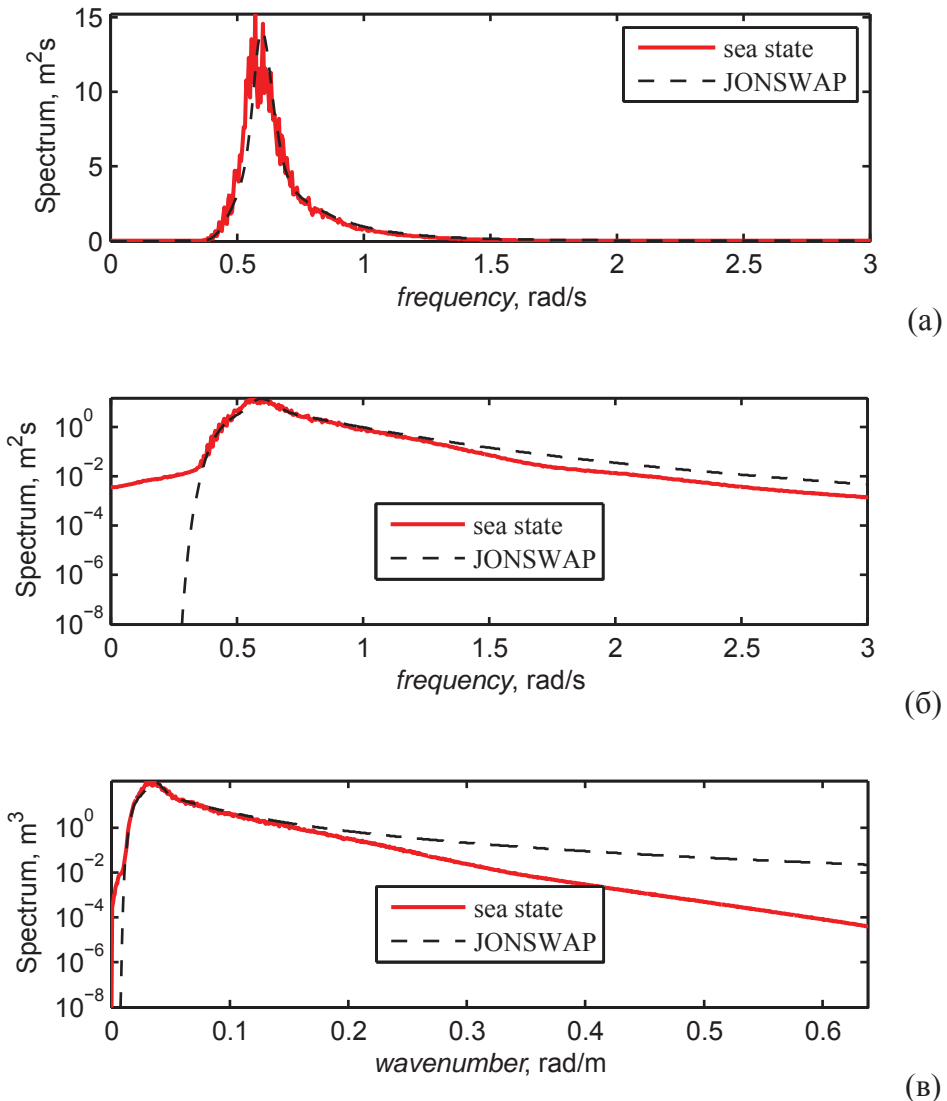


Рис. 4.3.4. Частотный спектр в линейных (а) и полулогарифмических (б) осях, а также спектр волновых чисел (в) для состояния Е.

### Анализ $(x, t)$ полей смещения поверхности

Сохранение данных с высоким разрешением по времени и координате позволяет выполнить анализ, затрудненный или невозможный при неполной информации (например, при наличии только временных записей), а также детально рассмотреть процесс формирования и эволюции «волн-убийц».

Так, диаграммы Фурье (пространственно-временной спектр в координатах  $(\omega, k)$ , демонстрирующий распределение энергии по масштабам в пространстве и во времени) построены на Рис. 4.3.5 для двух реализаций серий А и Е. Пара нижних пунктирных линий на них соответствуют дисперсионным зависимостям для линейных волн на глубокой воде, которые могут распространяться вдоль только одной координаты,  $\omega^2 = g|k|$ .

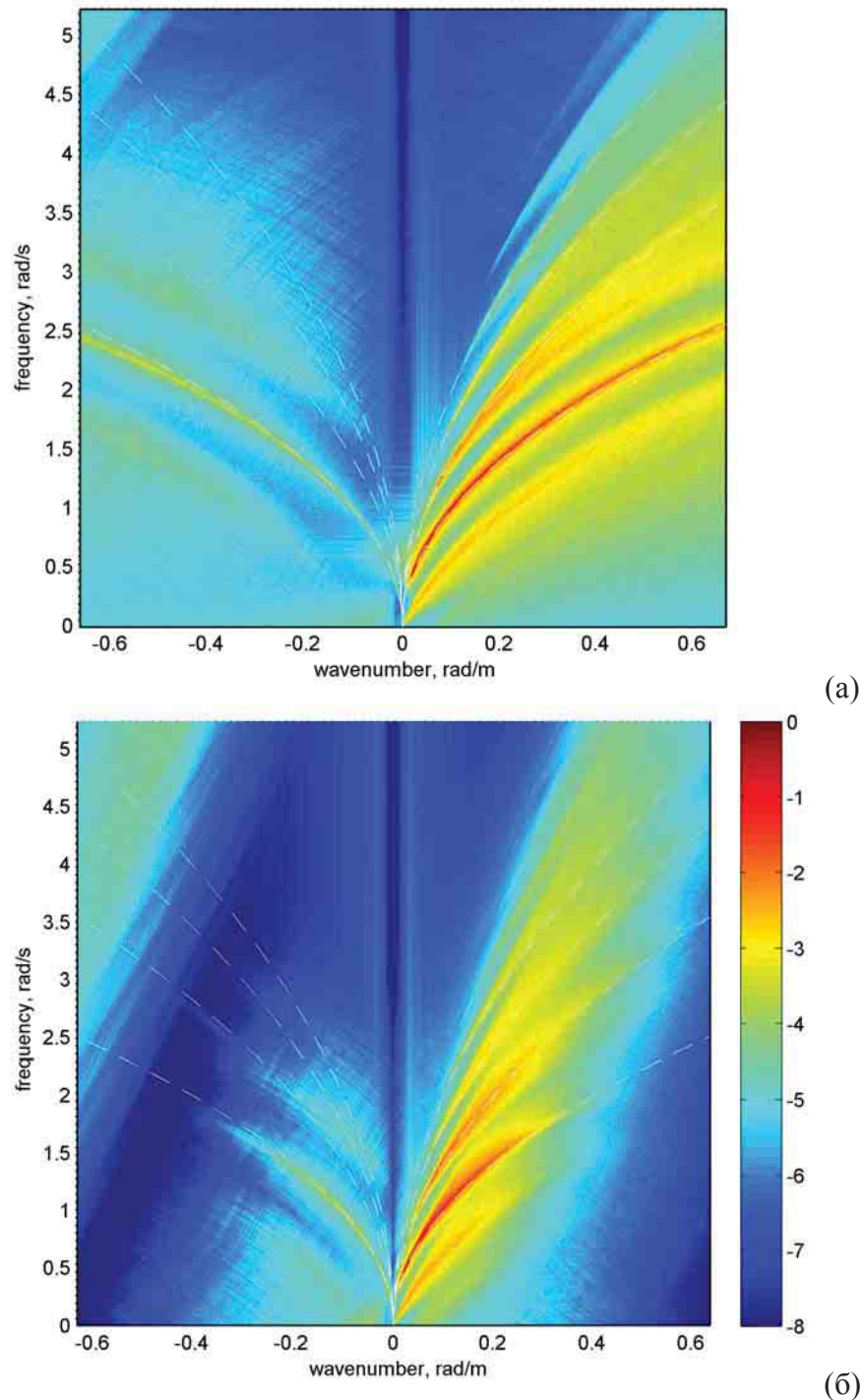


Рис. 4.3.5 Примеры спектральных Фурье-диаграмм в осях волнового числа и циклической частоты (пространственно-временной спектр) для условий А (а) и Е (б). Цветом построен логарифм нормированной спектральной энергии для смещения поверхности (максимум величин равен единице, а минимум соответствует  $10^{-8}$ , см. шкалу показателей десятичной степени справа).

Энергия свободных волн сосредоточена вдоль этих линий (доминирующая часть волн бежит в одном направлении, за которое ответственна правая часть диаграмм), ей соответствует максимум энергии волн. Связанные волновые компоненты располагаются вдоль линий  $(n\omega, nk)$ , где для  $\omega$  и  $k$  выполняется вышеуказанное дисперсионное

соотношение, а  $n$  – целое либо дробное число (на Рис. 4.3.5 штрихами показаны линии для  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ ). На диаграммах отлично видна компонента, соответствующая  $n = 1/2$  (длинноволновая компонента  $\bar{\eta}$ , наведенная нелинейностью, для которой в рамках модели Диста записано уравнение Лапласа с соответствующими граничными условиями), видны также компоненты для  $n = 5, 6$ .

Области, соответствующие различным компонентам, размыты из-за сильной нелинейности. Из сравнения Рис. 4.3.5а и 4.3.5б видно проявление введенного затухания (на больших волновых числах на Рис. 4.3.5б). На диаграммах видна также слабая компонента встречных волн, которая располагается практически вдоль кривой линейной дисперсионной зависимости (левая сторона диаграмм).

Такие достаточно качественные диаграммы для данных лабораторных и натуральных измерений стали появляться совсем недавно в связи с развитием техники. Они, в частности, позволяют напрямую проверить дисперсионные соотношения, анализировать волновые компоненты, составляющие волновое поле, определять роли нелинейности, см. [Krogstad & Trulsen, 2010; Ивонин и др., 2015; Салин и Салин, 2015; Taklo et al, 2015].

Использование данных двойного преобразования Фурье, примененного для построения диаграмм, позволяет выделять компоненты свободных и связанных волн в сложных случаях широкого спектра и сильной нелинейности. Для этого требуется применить маску, фильтрующую нужные спектральные компоненты (конечно, с учетом фазовой информации), и выполнить обратное преобразование Фурье для восстановления поля. Такой же подход можно использовать, в частности, для разделения компонентов встречных волн.

Наличие  $(x, t)$  волновых полей позволяет отследить в деталях динамику волн-убийц, например, определить их время жизни, изменение формы. Так как эффективно поверхность измеряется не в одной точке пространства, а сразу примерно на 10-километровом отрезке, то и вероятность обнаружить волну-убийцу за фиксированное время в получаемых данных существенно выше, чем при моделировании временной записи в одной точке. Так, практически каждая рассчитанная реализация содержит несколько аномальных волн, при том, что оценка, следующая из гауссовой статистики, предсказывает встречу волны-убийцы в единственной точке измерений примерно раз в 8 ч.

Для гауссового поля  $H_s \approx 4\eta_{rms}$ ; значительная высота, определенная по выборке трети волн с максимальной высотой, несколько отличается от значения для гауссового случайного процесса. Для простоты в процедуре выделения «волн-убийц» в этом разделе мы используем значительную высоту, определенную через  $\eta_{rms}$ . Поиск и анализ волн-убийц в полученных

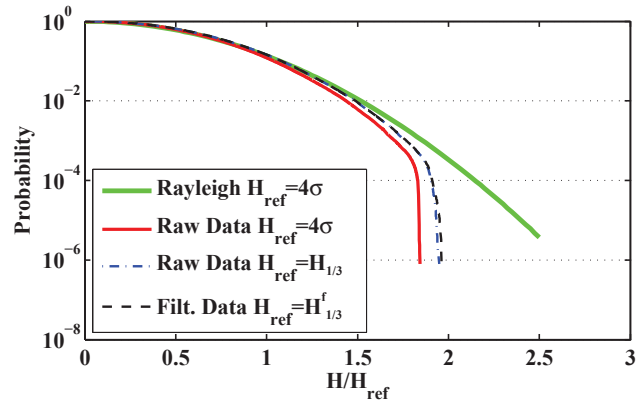
данных выполнены с помощью программ обработки для пространственных записей. Для этого применялся стандартный используемый нами критерий  $AI > 2$ ,

$$AI = H/H_s . \quad (4.3.3)$$

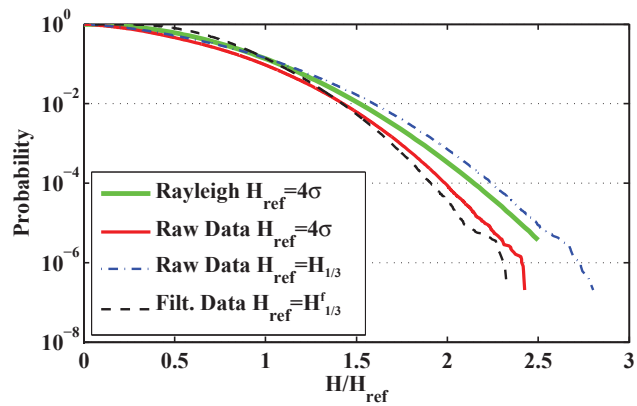
Всего по данным было выделено около 800 записей, содержащих аномальные волны, для случая А и около 4500 записей для случая более интенсивных волн Е.

Нужно подчеркнуть, что наш анализ отличается от исследования лабораторных данных тем, что рассматриваются не временные, а пространственные записи волн (в этом разделе рассматриваются высоты  $H_x$ , как они были определены в Разделе 3.2). Эти подходы не тождественны хотя бы из-за разной ширины спектров для временного и пространственного представлений, что, несомненно, влияет на высоты индивидуальных волн. В частности, число волн малой высоты, которые выделяются в записи посредством стандартной обработки по точкам пересечения уровня невозмущенной поверхности (zero crossing, см., например, [Holthuijsen, 2007]), в случае пространственной записи значительно больше. Эти волны распространяются поверх более длинных волн и могут влиять на статистику, увеличивая общее число волн в записи, а значит, и эффективно уменьшая значение  $H_{1/3}$ , изменяя среднюю длину волн, а также напрямую изменяя функцию распределения вероятности высот. Для исключения этого эффекта была применена процедура фильтрации, объединяющая слишком короткие волны с соседними «нормальными» волнами, см. подробности в [Sergeeva & Slunyaev, 2013\*], соответственно, были обработаны исходные (сырые, ‘raw’) данные и данные после фильтрации (‘filtered’).

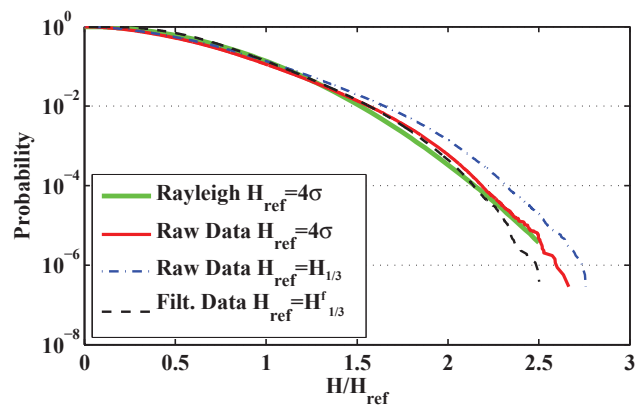
Всего массив данных для обработки составлял около 2.5 млн. волн для каждых условий из Табл. 4.3.1. Однако здесь собраны данные, собранные и в близкие моменты времени (т.о., не все записи в статистическом ансамбле независимы), что могло повлиять на результаты статистической обработки. Для прояснения этого вопроса был выполнен дополнительный расчет ситуации А, но с «выключенной» нелинейностью (далее будем маркировать это случай как AL), и по результатам была построена вероятность превышения высот, см. Рис. 4.3.6а. Видно, что в области не очень высоких волн (по сравнению со значительной высотой) построенные кривые хорошо совпадают с распределением Рэля, но с ростом высоты вероятность высот волн оказывается сильно заниженной. Построенная функция вероятности резко спадает, не достигнув критерия «волн-убийца», очевидно, из-за недостаточности размера ансамбля. В [Pelinovsky & Kokorina, 2002] число волн, необходимое для возникновения волн в гауссовом случайном поле с  $H > 8\eta_{rms}$ , было оценено как  $10^4$ . хотя, конечно, волн должно быть много больше, чтобы описать распределение вероятностей в этой области высот. Из Рис. 4.3.6а очевидно, что эффективное число волн,



(a)



(б)



(в)

Рис. 4.3.6. Распределения вероятности высот для случаев AL (а), А (б) и Е (в). Обработаны как сырые ('raw') данные, так и после фильтрации коротких волн ('filt'). Для нормировки высот использованы различные величины  $H_{ref}$ , определенные через среднеквадратичное смещение  $4\sigma \equiv \eta_{rms}$  и через средние трети наиболее высоких волн для исходных  $H_{1/3}$  и фильтрованных  $H_{1/3}^f$  данных ( $H_{1/3}^f > H_{1/3}$ ). Для сравнения приведено распределение Рэля.

создающее статистику в нашем исследовании, меньше общего числа волн 2.5 млн., но функция распределения вероятности высот хорошо совпадает в линейном пределе с теоретической (для узких спектров). На Рис. 4.3.6а практически не видно разницы для кривых, построенных по исходным и фильтрованным данным. Хвост распределения для

$H_{ref} = 4\eta_{rms}$  несколько ниже, чем распределения, нормированного на значительную высоту, определенную через треть наиболее высоких волн, поскольку в этом случае  $4\eta_{rms} > H_{1/3}$ .

На Рис. 4.3.6б, в представлены результаты для расчета нелинейных волн. Очевидно появление длинных хвостов функций распределения вероятностей, так что теперь, в отличие от линейного случая, «волны-убийцы» появляются для обоих условий, А и Е. Однако, расположение функций вероятности относительно распределения Рэля сильно зависит от выбора нормировки  $H_{ref}$ . Они превышают распределение Рэля, когда построены для исходных данных и нормированы на  $H_{1/3}$ , а в других случаях могут оказаться как выше, так и ниже распределения Рэля. В отличие от линейного расчета AL, в нелинейном случае примененная фильтрация оказала большое значение на статистику волн, существенно уменьшив число волн и увеличив значительную высоту, так что аномальных волн, удовлетворяющих критерию  $H > 2H_s^f$ , оказалось значительно меньше, чем удовлетворяющих  $H > 2H_{1/3}$  или  $H > 8\eta_{rms}$ . Еще раз подчеркнем, что эффект «паразитных» коротких волн должен быть ослаблен в случае временных последовательностей смещения поверхности из-за более узкого частотного спектра для волн на глубокой воде.

Статистическая зависимость записей, взятых в близкие моменты времени  $t$  и  $t + \Delta t$ , была оценена явно с помощью следующей функции, оценивающей корреляцию:

$$R(t, \Delta t) = \max_{\Delta x} \frac{\int \eta(x, t)\eta(x + \Delta x, t + \Delta t)dx}{\sqrt{\int \eta^2(x, t)dx} \sqrt{\int \eta^2(x + \Delta x, t + \Delta t)dx}}, \quad (4.3.4)$$

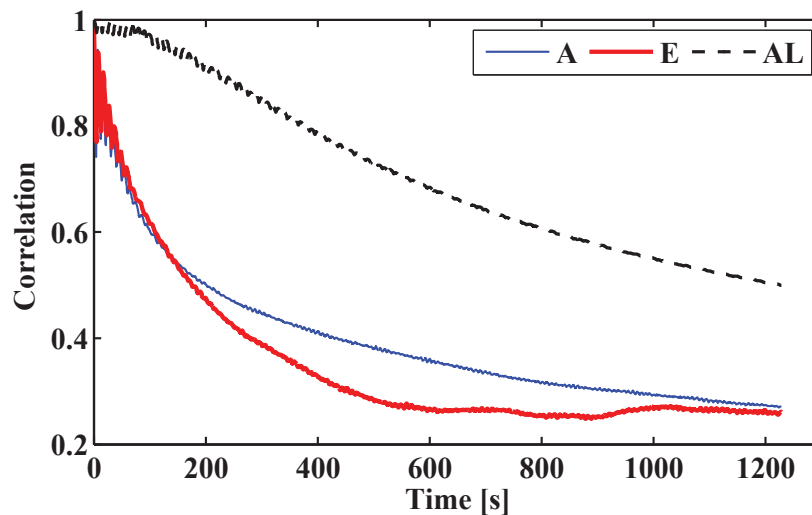


Рис. 4.3.7. Корреляционная функция  $R(0, \Delta t)$  для случаев А, Е и AL.



где интегрирование выполняется по всей области моделирования. Поскольку время  $t$  в наших расчетах никак не выделено, для простоты функция  $R$  рассмотрена для одного выбора времени  $t = 0$ , она построена на Рис. 4.3.7 для случаев А, Е и AL. Как следует из Рис. 4.3.7, в нелинейном случае корреляции близких по времени выборок смещений поверхности спадают существенно быстрее, чем в линейном случае. Этот вывод оказался для нас неожиданным, но он позволяет рассчитывать, что эффективное число независимых реализаций волн в наших экспериментах (из 2.5 млн.) существенно превышает таковое в линейном пределе AL.

### **Портрет «волн-убийц»**

Пример волновой поверхности и зарегистрированных волн-убийц (выделены синими кружками) показан на Рис. 4.3.8. Как видно из рисунка, во многих случаях экстремальные события оказываются довольно продолжительными. При этом выполнение условия  $AI > 2$  может прерываться на непродолжительное время из-за изменения волн. Естественно не разбивать такие события на множество коротких, а рассматривать их как одну продолжающуюся «волну-убийцу». Результат такой обработки представлен на Рис. 4.3.8 красными прямоугольниками, означающими объединение моментальных регистраций аномальных волн в одно событие (см. подробнее в нашей работе [Sergeeva & Slunyaev, 2013\*]). Из полученных результатов (Рис. 4.3.9) следует, что волны-убийцы могут появляться как на очень короткое время, так и в продолжение многих волновых периодов (до 60, что соответствует времени 10 мин). Результаты численной реконструкции событий «волн-убийц», описанной в Разделе 2.5, говорят о продолжительности жизни волн-убийц до 1.5 мин (без учета прерывности событий). Также из Рис. 4.3.9 можно сделать вывод, что в основном более интенсивные волны живут дольше (без учета эффектов обрушения). Из примера поверхности на Рис. 4.3.8 можно сделать вывод, что группы в поле нерегулярных волн живут довольно долго, что и объясняет большое время жизни "волн-убийц". Можно предполагать, что эти волновые группы поддерживаются самофокусирующей неустойчивостью волн на глубокой воде, что также отмечалось в [Viotti et al, 2013]. Нужно здесь подчеркнуть, что такой эффект может быть частично обусловлен учетом только однонаправленных волн, тем самым исключается эффект дефокусировки волновой энергии в поперечном по отношению к направлению движения волн направлении.

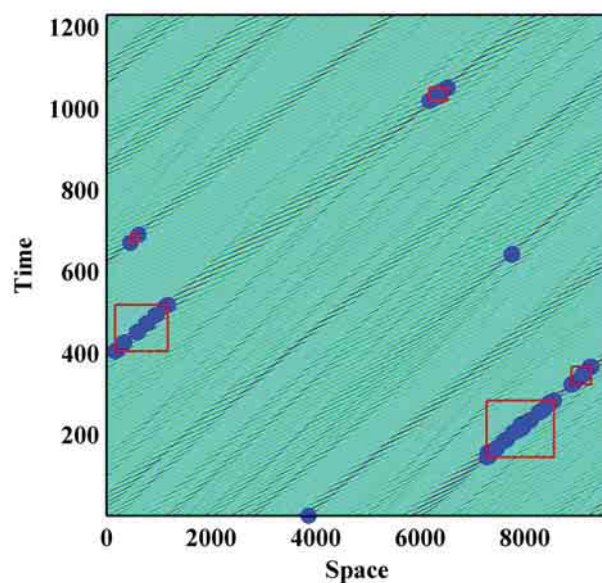


Рис. 4.3.8. Пример волновой поверхности: цвет отражает величину смещения поверхности, координата в м по горизонтали и время в с по вертикали. Синими кружками выделены волны, удовлетворяющие условию  $AI > 2$ , красные рамки соответствуют продолжающимся событиям «волн-убийц».

Примеры профилей «волн-убийц», обнаруженных программой обработки данных, показаны на Рис. 4.3.10. Хотя большинство из них имеет вид высокого гребня (Рис. 4.3.10а) или перепада (Рис. 4.3.10), в записях присутствуют и экстремальные волны с очень глубокой впадиной («дырки в море», Рис. 4.3.10в). Подробности процедуры выделения волн даны в

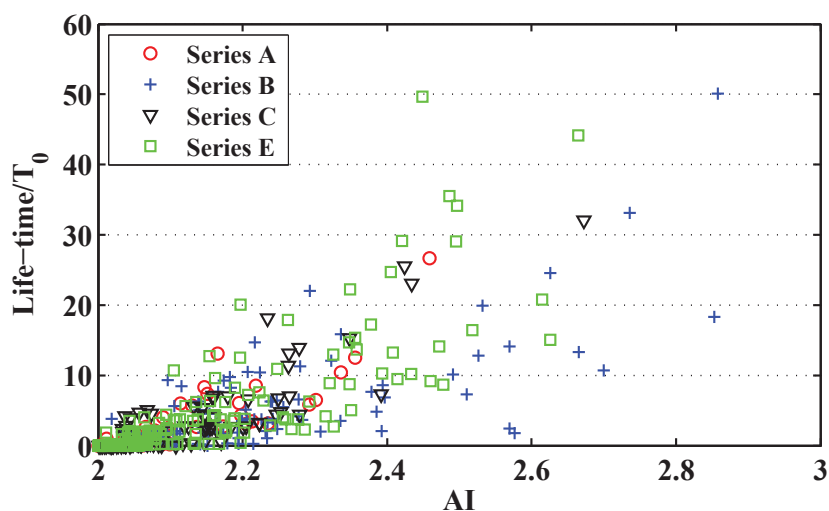


Рис. 4.3.9. Время жизни "волн-убийц" в периодах волн (включая прерывающиеся события) в зависимости от максимального индекса превышения  $AI > 2$  для разных ситуаций из Табл. 4.3.1.

[Sergeeva & Slunyaev, 2013\*].

Большая вариативность формы зарегистрированных в численном моделировании аномальных волн иллюстрируется Рис. 4.3.11 и 4.3.12. На Рис. 4.3.11 построены соотношения асимметрий волн (высота гребня к глубине ложбины по вертикали и отношение длины гребня к длине ложбины по горизонтали) по данным всех регистраций для случаев А и Е. Возможны две ситуации: экстремальному значению высоты волны соответствует гребень позади и ложбина впереди (кружки на Рис. 4.3.11), либо ложбина находится позади от гребня волны (крестики на Рис. 4.3.11). Очевидно гораздо большее количество выделенных аномальных волн в случае Е, относящемся к более интенсивным волнам, а также наличие асимметрии, свойственной волнам Стокса: гребни выше, но менее протяженны.

Пропорции между числом аномально высоких волн, по своей геометрии отнесенных к одному из 4 типов, даны на Рис. 4.3.12. Разделение геометрии основано на том, какой склон волны (передний или задний) представляет максимальную высоту, и какая часть профиля

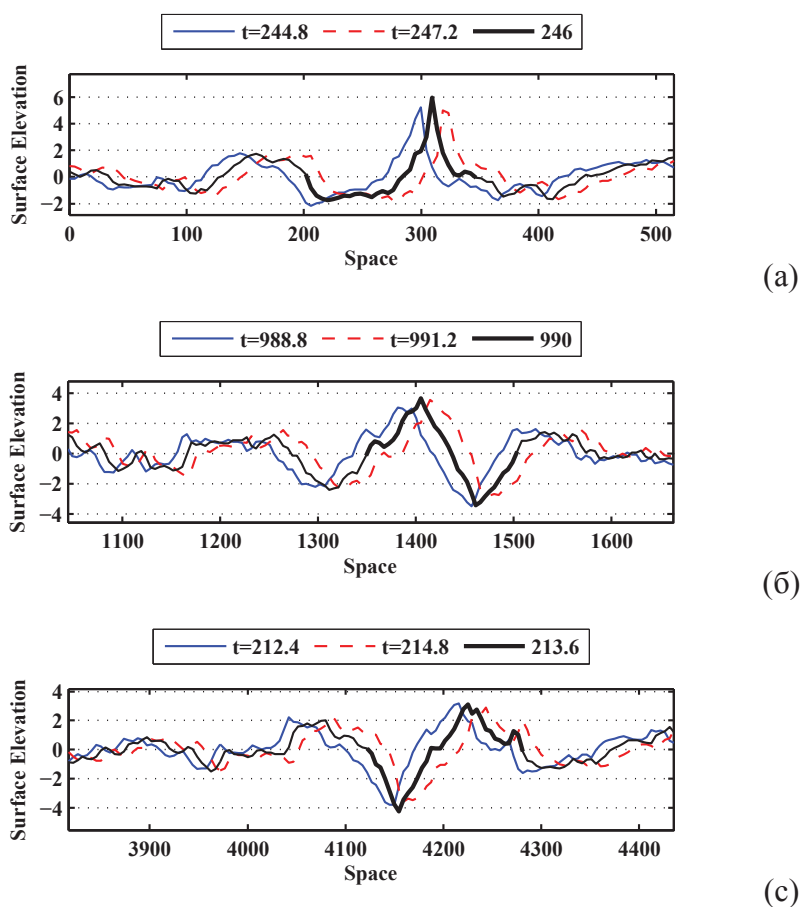


Рис. 4.3.10. Примеры профилей волн-убийц (жирным) и смещения поверхности в соседние моменты времени: высокий гребень (а), крутой перепад (б), «дырка в море» (в). Волны распространяются слева направо

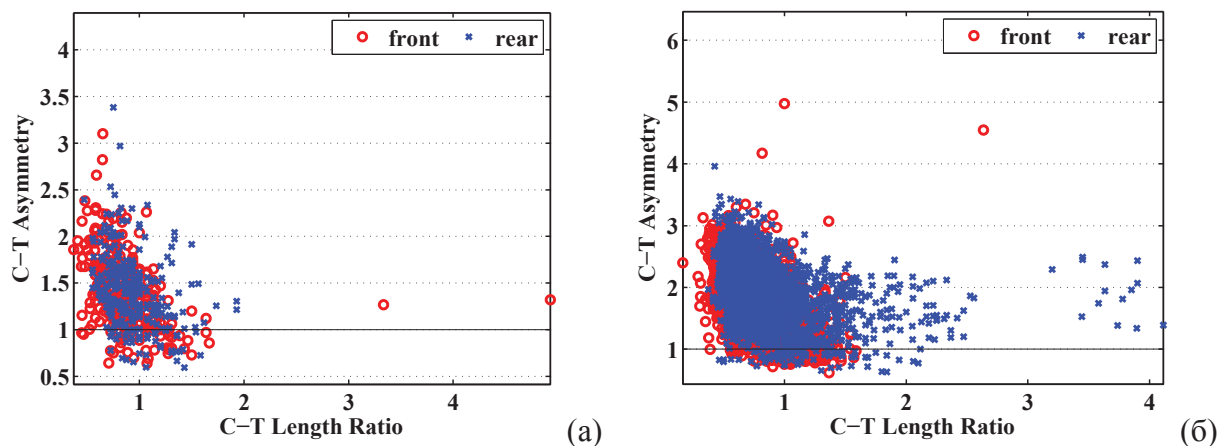


Рис. 4.3.11. Вертикальная асимметрия аномальных волн  $AI > 2$  (высота гребня отнесенная к глубине ложбины) и горизонтальная асимметрия (протяженность гребня, отнесенная к протяженности ложбины) для случаев А(а) и Е (б). Кружками отмечены волны с максимальным передним фронтом, крестами – максимальным задним фронтом.

имеет большую амплитуду, гребень или ложбина. Для обоих случаев, А и Е, число «волн-убийц» с высоким гребнем существенно превышает число «дырок в море» (85-95%). Для волновых систем с умеренной нелинейностью (А) максимальные высоты расположены примерно с одной вероятностью на переднем или заднем склоне волны, в то время как для случая больших волн (Е) доля волн с максимальным задним склоном заметно превышает долю волн с максимальным передним (61% против 34%). Последние иногда называют «волнами Лавренова» [Талипова и Пелиновский, 2009] из-за качественного согласия с конфигурацией аномальных волн на встречных течениях (длинная пологая ложбина, за которой следует крутой высокий гребень), отмеченной в исследованиях И.В. Лавренова [Lavrenov, 1998] (а еще ранее – в работе [Mallory, 1974], послужившей «толчком» к исследованию экстремальных волн на течениях в интересах безопасного мореходства). Таким образом, по данным наших численных экспериментов, в большинстве случаев встречи с «волной-убийцей» в штормовых условиях корабль сначала встречает высокий гребень волны, а потом проваливается в очень глубокую ложбину. Важно отметить, что обнаруженная нами в численных расчетах асимметрия [Sergeeva & Slunyaev, 2013] полностью согласуется с результатами натурных измерений у берегов Бразилии [Pinho et al, 2004], где 276 зарегистрированных аномально высоких волн составили пропорцию 197:108 ( $\approx 1.82$ , а в случае Е – 1.79). Еще позднее такая асимметрия была обнаружена по результатам стохастического моделирования трехмерных волн [Xiao et al, 2013]. (Нам также известна более ранняя работа по стохастическому моделированию трехмерных волн [Ducrozet et al, 2007], но ее выводы кажутся противоречащими другим исследованиям, потому она не обсуждается в диссертации.)

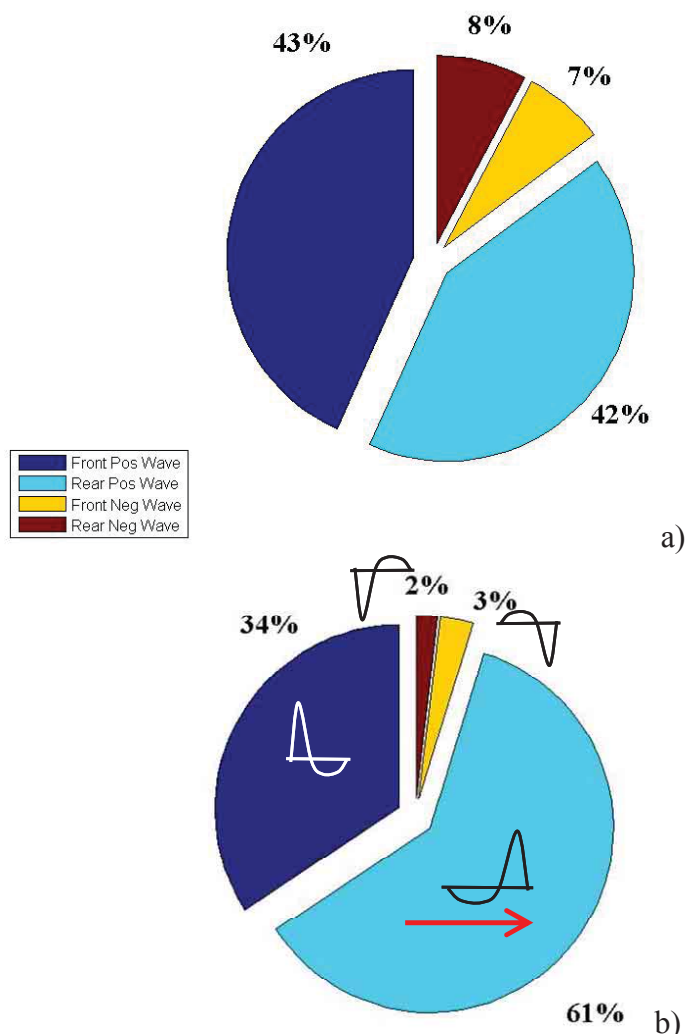


Рис. 4.3.12. Пропорции anomalно высоких волн разной геометрии для случаев А (а) и Е (б). Front Pos Wave – экстремальный передний склон с высоким гребнем, Rear Pos Wave – экстремальный задний склон с высоким гребнем, Front Neg Wave – экстремальный передний склон с глубокой ложбиной, Rear Neg Wave – экстремальный задний склон с глубокой ложбиной.

Отметим, что горизонтальная асимметрия волн не наблюдается в рамках моделирования уравнений огибающей: НУШ и Диста. На Рис. 4.3.13 представлены диаграммы, аналогичные Рис.4.3.12, но для моделей НУШ без учета связанных волн (Рис. 4.3.12а,б), с учетом поправок трех порядков (2.5.4), (2.5.5) (Рис. 4.3.12в,г) и для модели Диста с учетом связанных волн трех порядков (Рис. 4.3.13д,е). Для расчета в рамках НУШ начальные условия удовлетворяли не JONSWAP, а симметричному гауссовому спектру с той же центральной частотой  $T_p$  и тем же значением среднеквадратичного отклонения. В первом случае (Рис. 4.3.12а,б) следует ожидать отсутствия асимметрии вообще, но имеется 2-3% доминирование волн отрицательной полярности (наиболее вероятно, эта погрешность возникла из-за систематической ошибки процедуры выделения индивидуальных волн). Учет связанных волн (Рис. 4.3.12в-д) делает волны вертикально асимметричными в соответствии с формой волны Стокса, но горизонтальная асимметрия не появляется ни в случае А, ни в

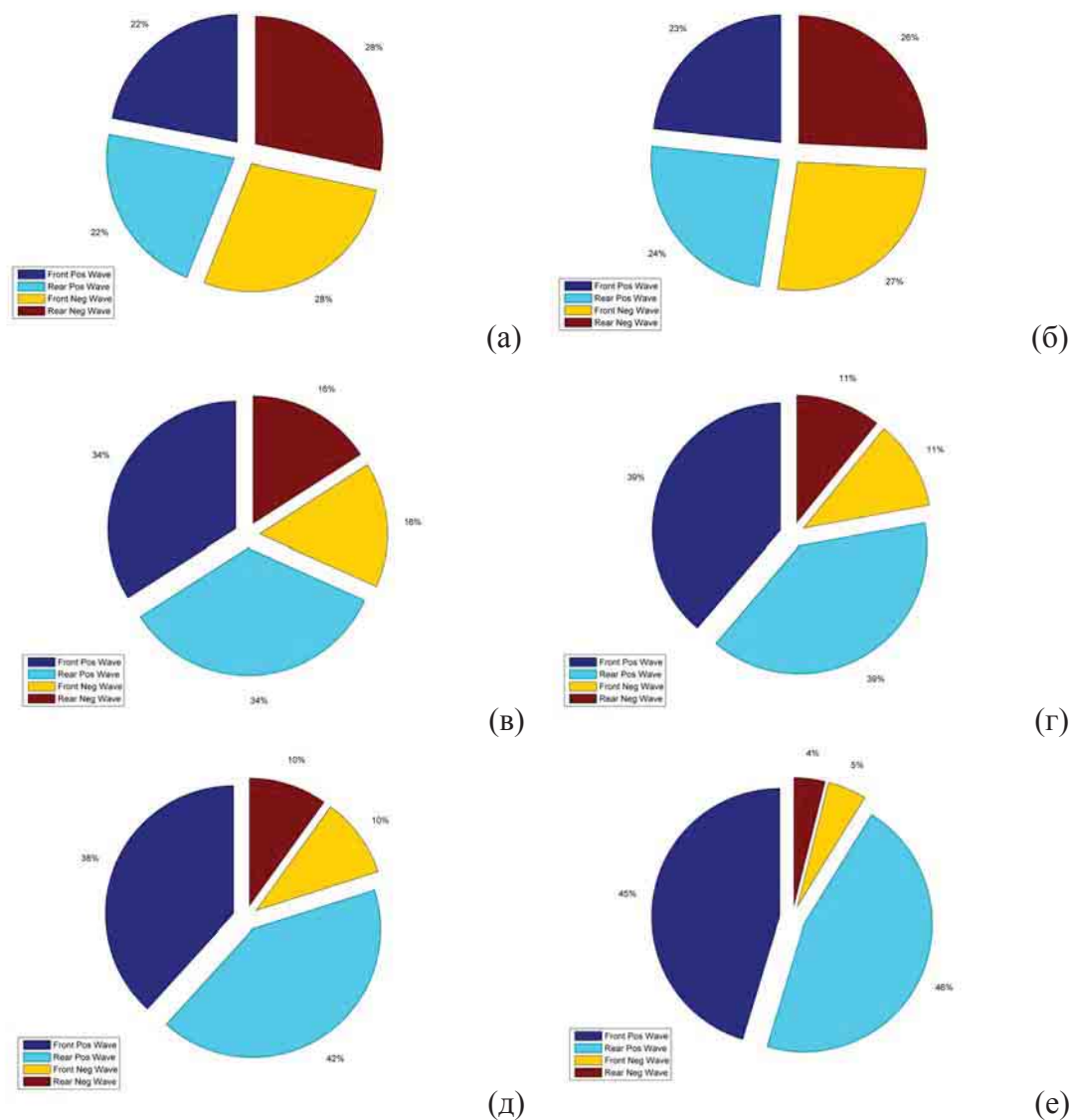


Рис. 4.3.13. Пропорции anomalно высоких волн разной геометрии для случаев А (левая колонка) и Е (правая колонка) при численном моделировании нерегулярных волн в рамках НУШ без учета связанных волн (а, б) и с учетом связанных волн трех порядков (в, г), а также в рамках обобщенной модели НУШ (Диста) с учетом связанных волн трех порядков (д, е). Разделение форм волн аналогично представленному на Рис. 4.3.12.

случае Е. Отметим заметное улучшение результатов моделирования уравнений Диста по сравнению с НУШ, так что распределения на Рис. 4.3.13д,е наиболее близки к Рис. 4.3.12. Одновременно необходимо отметить, что в случае расчета в рамках модели Диста условий Е в спектре волн появлялся нефизичный пик в области низких частот, что говорит о грубом выходе за пределы применимости модели.

Другое свидетельство, что модель Диста приближается по результатам к моделированию исходных уравнений содержится в Табл. 4.3.2, где приведено общее число волн, распознанных как «волны-убийцы» по критерию превышения высоты значительных волн как минимум вдвое (из примерно 2.5 млн. волн), для разных моделей. Последней

Таблица 4.3.2. Общее число событий "волн-убийц" по данным обработки результатов стохастического численного моделирования разных моделей.

Серия экспериментов Модель	А	Е
НУШ без учета связанных волн	9539	12462
НУШ с учетом связанных волн	9730	16396
модель Диста	1100	5407
уравнения Эйлера	810	4434
распределение Рэлея	1649	1570

строкой в Табл. 4.3.2 приведены соответствующие числа, которые следуют из распределения Рэлея. Модель НУШ существенно завышает вероятность «волн-убийц», а модель Диста дает существенно более аккуратную оценку.

Таким образом, нами обнаружен эффект асимметрии интенсивных волн, который наблюдается как в численных экспериментах однонаправленных волн и волн с ненулевым угловым спектром в рамках уравнений Эйлера, так и подтверждается в натуральных условиях (в отличие от численных исследований, – по данным временных записей в точке).

### Кинематические характеристики аномально высоких волн

Численное моделирование нерегулярных волн позволяет выяснить кинематические характеристики экстремальных волн. Эти исследования носят важный практический характер, поскольку должны быть использованы при проектировании судов и морских сооружений. Инструментальные измерения такого рода чрезвычайно сложны. Предшествующие численные результаты получались в рамках моделей с большим временем расчета, что исключало возможность статистического подхода, рассмотрения ансамблей экстремальных волн. В настоящее время можно ожидать бурный всплеск работ по этому направлению исследований из-за большого интереса и появления быстрых и точных кодов уравнений гидродинамики. Здесь мы затрагиваем вопрос о соотношении между экстремальностью волн с точки зрения высоты и их экстремальностью с точки зрения кинематических характеристик. В частности, нами рассмотрены эйлеровы скорости на поверхности воды вдоль движения волн  $V_x^S$  и в вертикальном направлении  $V_z^S$

$$V_z^S = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=\eta} = \frac{\Phi_x - \eta_t \eta_x}{1 + \eta_x^2}, \quad (4.3.5)$$

$$V_x^S = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{z=\eta} = \Phi_x - \eta_x V_z^S = \frac{\eta_t + \Phi_x \eta_x}{1 + \eta_x^2}. \quad (4.3.6)$$

Как обсуждалось выше, расчет каждой реализации приводит к данным на пространственно-временной сетке, состоящей из  $2048 \times 2048$  узлов и обеспечивающей довольно хорошее разрешение. Значения скоростей (4.3.5), (4.3.6) в узлах этой сетки построены на Рис. 4.3.14 серыми точками для 5-ти реализаций, соответствующих двум разным волновым условиям, А и Е. Также проанализированы максимальные горизонтальные и вертикальные высоты в множество выделенных "волн-убийц" (как показано на Рис. 4.3.10 жирными линиями) по всем 20-ти реализациям для каждого морского состояния. Эти данные отображены на Рис. 4.3.14 черными и синими точками соответственно. Для сравнения построены контуры для скоростей волн Стокса, определенных по асимптотическим формулам третьего порядка

$$V_x = \sqrt{k_0 g} A \left( 1 - \frac{1}{8} k_0^2 A^2 \right) \exp(k_0 \eta) \cos \theta, \quad (4.3.7)$$

$$V_z = \sqrt{k_0 g} A \left( 1 - \frac{1}{8} k_0^2 A^2 \right) \exp(k_0 \eta) \sin \theta, \quad (4.3.8)$$

$$\eta = A \cos \theta + \frac{k_0}{2} A^2 \cos 2\theta + \frac{3}{8} k_0^2 A^3 \cos 3\theta. \quad (4.3.9)$$

Здесь  $A$  – амплитуда,  $0 \leq \theta < 2\pi$  – фаза волны, и волновое число несущей  $k_0$  определено через линейное дисперсионное соотношение для волн на глубокой воде  $\omega_0^2 = gk_0$  через частоту  $\omega_0$ ,

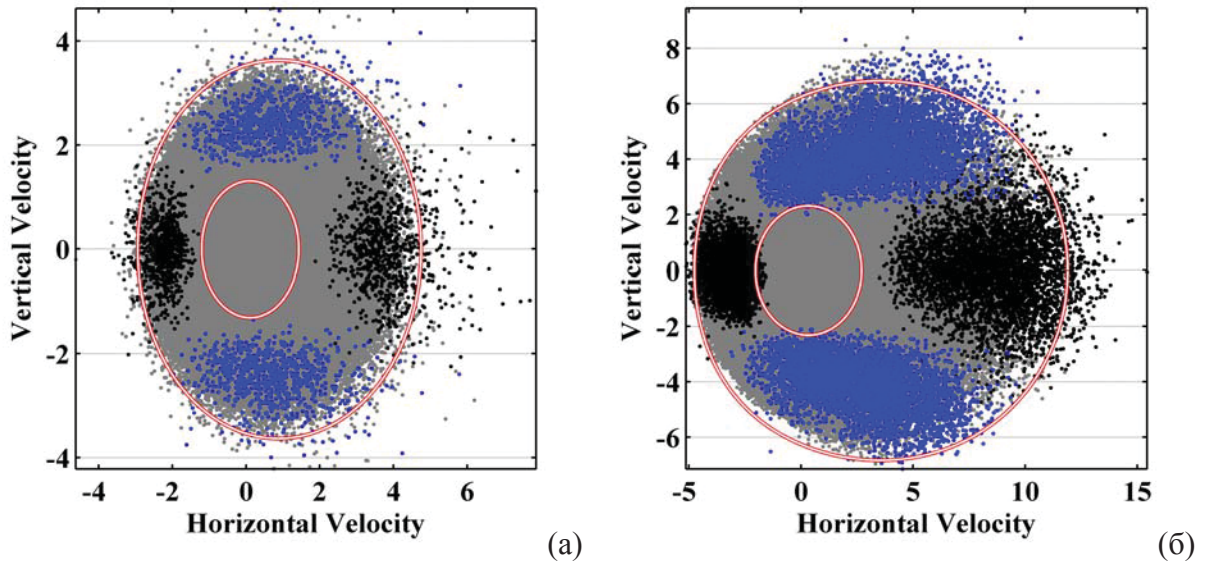


Рис. 4.3.14. Поверхностные скорости для случаев А (а) и Е (б). Серые точки отмечают значения  $V_x^S$  и  $V_z^S$  по данным в области  $(x, t)$  для 5 реализаций. Черные и синие точки – соответственно максимальные горизонтальные и вертикальные значения скоростей в выделенных аномально высоких волнах  $AI > 2$  (по всем 20 реализациям). Контуры размечают скорости волн Стокса по формулам 3-го порядка для высоты  $H_s$  (малый контур) и  $H_{max}$  (большой контур).



определенную в спектре JONSWAP в Табл. 4.3.1. Соответствующие контуры ( $V_x$ ,  $V_z$ ) на Рис. 4.3.14 построены для двух значений амплитуды  $A$ , соответствующей значительной высоте  $H_s$ , а также максимальной высоте волн, обнаруженной в рассчитанных полях  $H_{max}$ . При этом величина  $A$  в (4.3.7)-(4.3.9) связана с высотой  $H$  посредством соотношения  $A = H / 2 - 3/64 k_0^2 H^3$ , следующего из (4.3.9).

Большой контур ограничивает максимально достижимые Стоксовой волной с высотой  $H_{max}$  скорости (в рамках приближения 3-го порядка по нелинейности). На Рис. 4.3.14 большая часть значений находится внутри этого контура, но есть точки и вне его (принадлежащие как аномальным волнам, так и обычным). Внутренний контур соответствует волнам, с существенно меньшим индексом усиления, чем требуется для «волн-убийц»,  $AI < 1$ , тем не менее, на Рис. 4.3.14б внутри этого контура видны точки, соответствующие максимальным скоростям на поверхности аномальных волн. Также из Рис. 4.3.14 следует, что не всегда «волна-убийца», определенная по критерию на высоту, демонстрирует экстремальные скорости на поверхности. И наоборот, волны с очень большими скоростями могут обладать умеренными высотами. Аномальные волны с  $AI > 2$  на диаграммах скоростей занимают определенные области. Хорошо выражены асимметрии горизонтальных и вертикальных скоростей, аномальные волны обладают схожими асимметриями. Горизонтальная и вертикальная асимметрии усиливаются в случае более интенсивных волн (Рис. 4.3.14б).

#### **4.4 «Волны-убийцы» как когерентные состояния в стохастических полях поверхностных волн**

Как уже обсуждалось выше, повышенная вероятность высоких волн на морской поверхности, создающая эффект «волн-убийц», связывается с возникновением условий для нелинейной самофокусировки волн. В идеализированной ситуации малой крутизны и узкого спектра эффективной математической моделью является нелинейное уравнение Шредингера, решаемое точно в рамках метода обратной задачи рассеяния (МОЗР). На языке спектра Фурье, нелинейность в рамках НУШ способна поддерживать когерентные состояния, обеспечивающие существование устойчивых локализованных структур – солитонов огибающей (а также бризеров и т.п.), которые описываются дискретным спектром ассоциированной задачи рассеяния. Такие «идеальные» когерентные структуры в рамках НУШ, а также улучшенных моделей огибающей и в рамках исходных уравнений обсуждались в Разделе 2.3 и Главе 3.

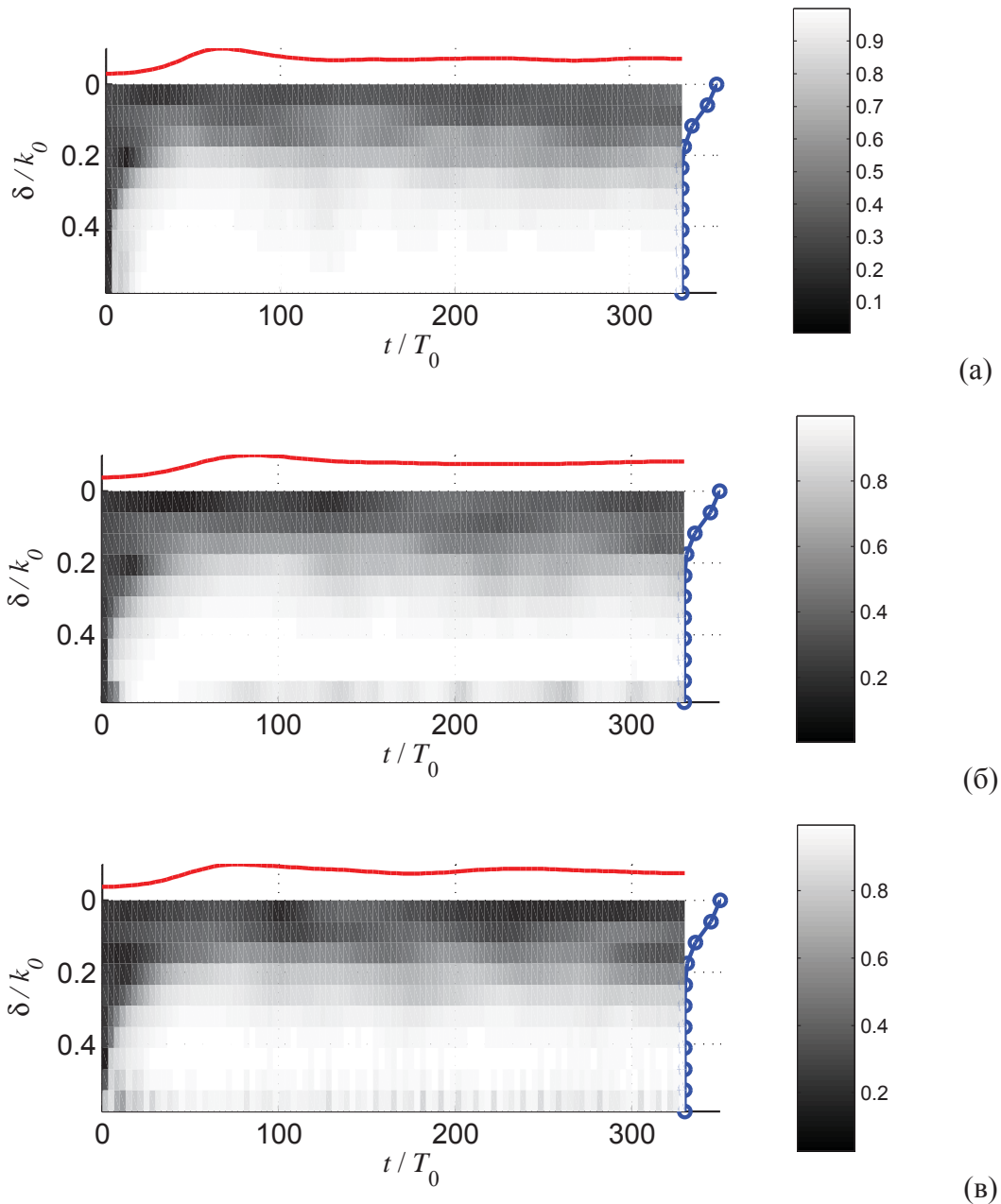


Рис. 4.4.1. Градациями серого (см. шкалы справа) построены значения корреляторов  $R$  в переменных  $\delta/k_0$  и  $t/T_0$ . Красными линиями сверху даны зависимости спектральной ширины от времени, синими справа – профили начального спектра (кружки указывают разрешение дискретного представления спектра). Начальные условия для стохастических численных экспериментов соответствуют  $\eta_{rms} = 0.042$ ,  $\nu_k = 0.076$ ,  $BFI(t=0) = 1.56$ , графики приведены для моделирования НУШ (а), уравнения Диста (б) и исходных уравнений Эйлера (в).

### Корреляции квартетов волн

Их значительно труднее «разглядеть» в полях нерегулярных волн, представленных в настоящей главе, сопоставление профилей волн «на глаз» несет большую долю спекулятивности. Например, на Рис. 2.4.9 можно заметить отличие вариативности зависимостей  $BFI$  на больших временах для значений, больших и меньших примерно 0.8, что

может говорить об отличии волн в равновесных состояниях, для которых изначально  $BFI$  задавался существенно меньше единицы, и для которых начальный индекс  $BFI \gg 1$ . Логично предположить, что такое различие связано с присутствием когерентных волновых групп, чей вклад больше для изначально больших значений  $BFI$ . Когерентные волновые группы эффективно уменьшают объем статистического ансамбля (если для линейных волн должно быть большим число индивидуальных волн, то для ансамбля из когерентных групп большим должно быть число групп), а потому статистические величины определяются в этом случае с меньшей точностью.

Когерентные волновые группы могут быть обнаружены в полях нерегулярных волн с применением МОЗР, как описано в Разделе 2.4, в предположении близости динамики реальных волн к теории НУШ. Это предположение сомнительно в случае крутых волн и широкого спектра. В этом разделе мы обсуждаем результаты непосредственного обнаружения корреляций между гармониками Фурье в полях волн, а также общность ситуаций, когда нормализация волн, содержащих когерентные группы, приводит к высокой вероятности экстремальных волн (как описано в Разделе 4.2 для стохастического моделирования волн с изначально гауссовой статистикой).

Как следует из спектров Фурье для решений НУШ в виде солитона огибающей (см. в [Slunyaev et al, 2013a<sup>\*</sup>]) или бризеров (см. (2.3.16) для бризера Ахмедиева и в [Slunyaev, 2010<sup>\*</sup>] для бризеров Кузнецова и Перегрин), эти решения обеспечиваются полной синфазностью спектральных областей (в сопровождающей системе отсчета), описывающих эти группы. Этот факт и отличает когерентные группы от линейных групп фазовонезависимых волн, удерживая множество гармоник Фурье в нужной фазе.

Кубическая нелинейность является доминирующей для волн на поверхности глубокой воды. По-видимому, взаимодействующие четверки волн могут иметь собственную независимую динамику (см., например, [Stiassnie & Shemer, 2005; Kartashova, 2010]), ведущую к нарушению принципа независимости фаз волн, однако детектировать ее в стохастическом поле волн явно не просто. Поведение спектральных хвостов бризерных решений НУШ обсуждается с целью предсказания появления волны-убийцы в нелинейной оптике [Akhmediev et al, 2011a], но в приложении к морским волнам этот подход осложнен наличием связанных нелинейных волновых компонент и медленным характером спадания хвоста спектра ветровых волн.

Неудивительно, что фазы отдельных гармоник Фурье распределены случайным образом и какой-либо самоорганизации отдельных гармоник не прослеживается (см. пример в нашей работе [Slunyaev, 2010<sup>\*</sup>]). Для изолированных квартетов взаимодействующих волн

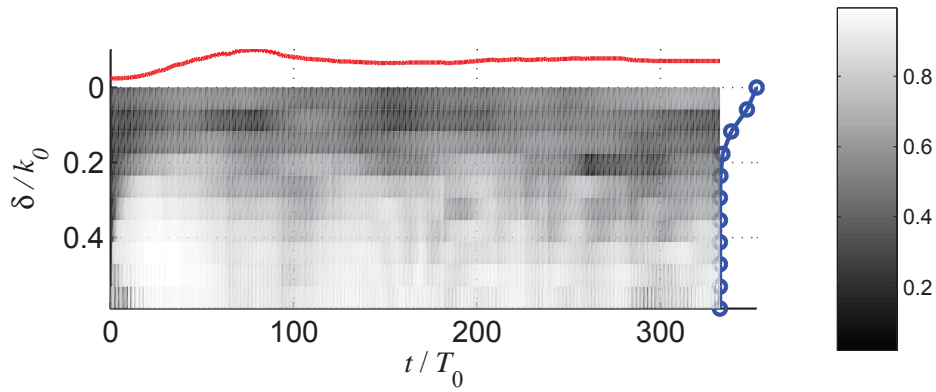


Рис. 4.4.2. Аналогично Рис. 4.4.1, но для случая большей крутизны волн  $\eta_{rms} = 0.056$ ,  $\nu_k = 0.076$ ,  $BFI = 2.08$ . Расчет в рамках полных уравнений.

часто вводят т.н. динамическую фазу. Для взаимодействия несущей с волновым числом  $k_0$  с двумя сателлитами  $k_1 = k_0 - \delta$  и  $k_2 = k_0 + \delta$  динамическая фаза может быть записана в виде

$$\Theta_{0,0,1,2} = \theta_1 + \theta_2 - 2\theta_0, \quad (4.4.1)$$

где  $\theta_0$ ,  $\theta_1$  и  $\theta_2$  есть фазы несущей и сателлитов соответственно. Динамическая фаза –

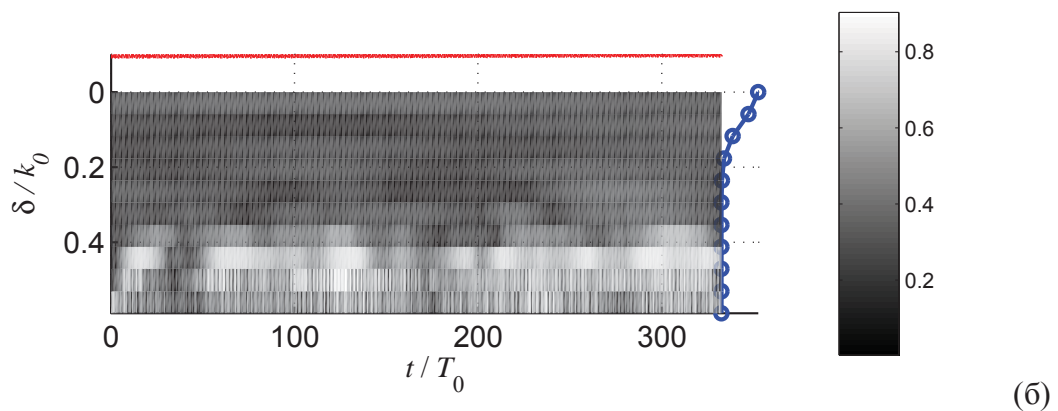
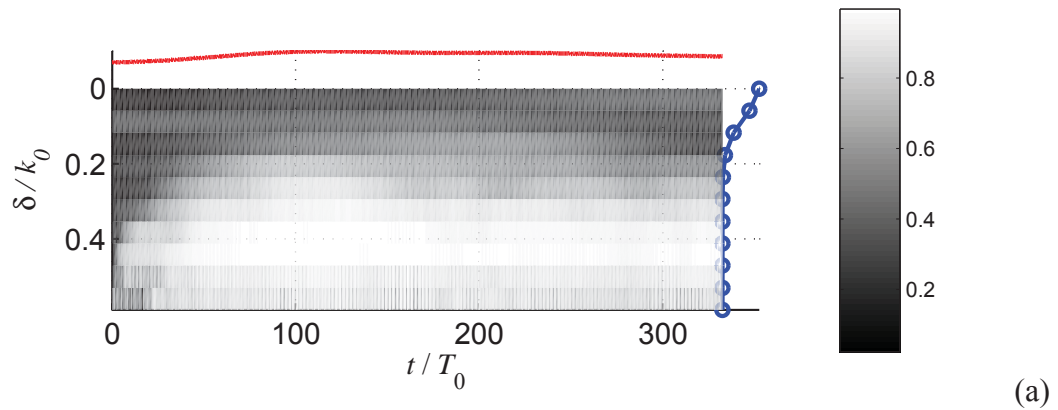


Рис. 4.4.3. Аналогично Рис. 4.4.1, но для случаев меньшей крутизны волн:  $\eta_{rms} = 0.028$ ,  $\nu_k = 0.076$ ,  $BFI = 1.04$  (а) и  $\eta_{rms} = 0.014$ ,  $\nu_k = 0.076$ ,  $BFI = 0.52$  (а). Расчет в рамках полных уравнений.

естественный параметр, который возникает в случае резонансного или квазирезонансного взаимодействия волн; она определяет динамику квартета качественным образом. В отличие от парциальных быстрых фаз волн-участников взаимодействия, динамическая фаза обладает более медленной динамикой. Введем динамическую фазу для другого квартета, когда несущая волна взаимодействует с сателлитами на волновых числах  $k_3 = k_0 - \delta'$  и  $k_4 = k_0 + \delta'$ :

$$\Theta_{0,0,3,4} = \theta_3 + \theta_4 - 2\theta_0, \quad (4.4.2)$$

Если динамические фазы двух квартетов взаимодействующих волн оказываются совпадающими длительное время,

$$\Theta_{0,0,1,2} - \Theta_{0,0,3,4} = 0, \quad (4.4.3)$$

то такие квартеты находятся в одинаковом динамическом состоянии, т.е., когерентны.

Для непосредственной регистрации когерентности четверок волн в "хвостах" бризерных групп нами в [Slunyaev, 2010\*] была предложена корреляционная функция следующего вида:

$$R(\delta, t) = \frac{R_1}{R_2}, \quad (4.4.4)$$

$$R_1 = \left| \sum_{n=1}^N S_n(k_0 + \delta) S_n(k_0 - \delta) S_n^*(k_0 + \delta') S_n^*(k_0 - \delta') \right|,$$

$$R_2 = \sum_{n=1}^N |S_n(k_0 + \delta) S_n(k_0 - \delta) S_n^*(k_0 + \delta') S_n^*(k_0 - \delta')|$$

$$\delta = \frac{2\pi}{L} m, \quad \delta' = \frac{2\pi}{L} (m+1), \quad m \geq 0,$$

которая по сути является автокорреляцией, введенной эмпирически на основе представлений о динамических фазах квартетов и устройстве спектров Фурье бризерных решений. Здесь  $S_n$  – компоненты спектра Фурье, целое число  $m$  и соответствующие значения  $\delta$  и  $\delta'$  задают отстройку от спектрального пика, расположенного при  $k_0$ , а статистическое усреднение проводилось по  $N$  реализациям (для численных экспериментов  $N = 100$ ). Функция  $R$  исследует близость динамических фаз квартетов, состоящих из несущей волны и симметричных соседних сателлитов (отстройка сателлитов в квартетах регулируется целым числом, добавленным к  $m$  в определении  $\delta'$ ), в статистическом по ансамблю смысле.

Пример поведения коррелятора  $R$  в процессе эволюции ансамбля нерегулярных волн показан на Рис. 4.4.1 для расчетов в рамках моделей НУШ, Диста и исходных уравнений. Здесь начальные условия благоприятны для развития модуляционной неустойчивости,  $BFI = 1.56$ , и динамика ширины усредненного спектра (красная линия) соответствуют описанной в Разделе 4.2: сперва происходит уширение спектра и затем частичное восстановление. Видно,

как изначально некоррелированные волновые компоненты (темная область при малых  $t$  для всех  $\delta$ ) быстро становятся зависимыми, причем происходит это существенно раньше, чем возрастает ширина спектра (и, соответственно, эксцесс и вероятность высоких волн). Такая картина наблюдается во всех случаях Рис. 4.4.1а-в, некоторые различия на диаграммах функций  $R$  едва заметны.

Случай большей нелинейности, промоделированный в рамках исходных уравнений, показан на Рис. 4.4.2. Получившаяся картина межфазовых корреляций несколько менее четкая, чем на Рис. 4.4.1, что может объясняться, например, ролью нелинейных

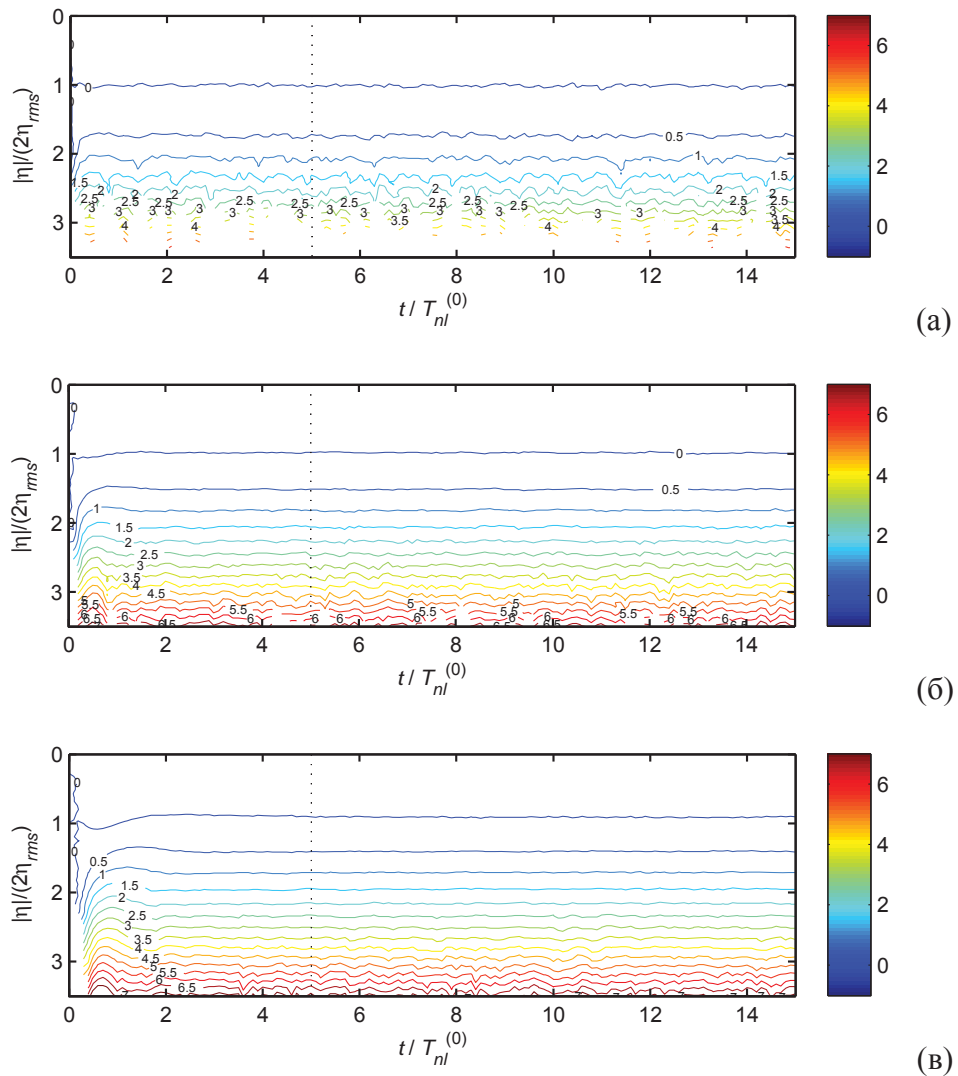


Рис. 4.4.4. Линии уровня показывают величину  $\log_{10}(P/P_{Rayleigh})$ , где  $P$  – функция распределения вероятности превышения высот, построенная по результатам численных экспериментов, а  $P_{Rayleigh}$  – распределение Рэля. Моделирование в рамках НУШ для начальных условий, характеризующихся гауссовым спектром с  $BFI = 0.56, 1.1$  и  $2.1$  для панелей (а), (б) и (в) соответственно.  $T_{nl}^{(0)}$  – нелинейный масштаб времени (4.2.3).

взаимодействий других порядков, ослаблением упругих свойств нелинейных волновых групп и т.д. Ситуации меньшей крутизны, включая  $BFI < 1$ , показаны на Рис. 4.4.3. Видно, что меньшие значения  $BFI$  приводят к исчезновению когерентности.

Подобный анализ был выполнен и для нескольких примеров измерений в лабораторном лотке [Slunyaev, 2011\*]. В этом случае наличие корреляций при  $BFI > 1$  также прослеживается, хотя и куда менее уверенно. Возможно, что существенную роль в ослаблении проявления когерентности играет более низкое качество измерений, чем это достижимо в вычислительных экспериментах.

### Режимы установления корреляции – наиболее опасны с точки зрения «волн-убийц»

Обнаруженная с помощью (4.4.4) согласованная динамика квартетов свободных волн нами интерпретируется как образование нелинейных волновых групп, подобных солитонам или бризерам НУШ. Наблюдаемая в стохастическом моделировании переходная стадия, обсуждавшаяся в Разделе 4.2, может рассматриваться как процесс выделения нелинейных групп из случайным образом заданных начальных условий со значительным солитонным числом (характеризуемым  $BFI$ ). Эта стадия характеризуется наиболее экстремальным волнением, поскольку она сопровождается большими значениями эксцесса и высокой

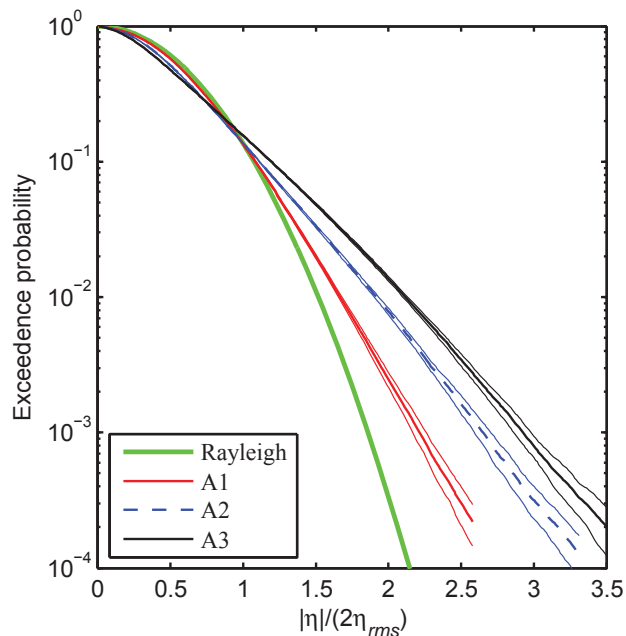


Рис. 4.4.5. Результаты численного моделирования нерегулярных волн в рамках НУШ. A1, A2, A3 – функции распределения вероятности амплитуд для квазиравновесных состояний, иллюстрированных на Рис. 4.4.4а, б, в соответственно ( $BFI = 0.56, 1.1$  и  $2.1$ ). Тонкими линиями обозначены доверительные интервалы. Зеленым построено распределение Рэля.

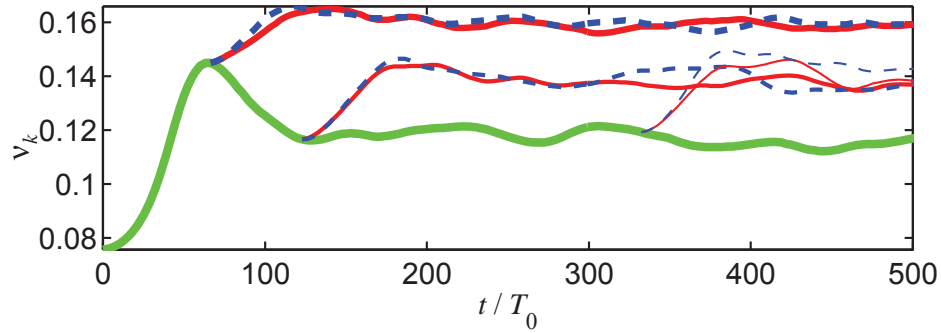


Рис. 4.4.6. Эволюция ширины спектра в рамках исходных уравнений для начальных параметров  $\eta_{rms} = 0.042$ ,  $\nu_k = 0.076$ ,  $BFI(t=0) = 1.56$  (зеленым). Поведение ширины спектра после перемешивания фаз дано красной и синей пунктирной линиями.

вероятностью «волн-убийц». Поведение распределения вероятности амплитуд волн от времени для случаев начальных условий, соответствующих  $BFI(t=0) \approx 0.56$ ,  $BFI(t=0) \approx 1.1$  и  $BFI(t=0) \approx 2.1$ , показано на Рис. 4.4.4 (см. подробности в [Slunyaev et al, 2015\*]). Расчет выполнен в рамках НУШ и результат сопоставлен с линейной теорией. Явно виден переходный процесс установления волн (для  $t \lesssim T_{nl}$ ), когда вероятность высоких волн существенно превышает соответствующие величины для Рэлеевского распределения. Вероятность высоких волн превышает закон Рэля и для больших времен (графики распределений вероятности для случаев, иллюстрированных на Рис. 4.4.4, построены на Рис. 4.4.5), но в меньшей степени, чем в переходной области. Из Рис. 4.4.5 явно виден более экстремальный характер волн в случае увеличения начального значения  $BFI$ .

Как обсуждалось нами в [Slunyaev, 2015\*], высокая вероятность образования высоких волн возможна при различного рода переходных режимах, в частности, при:

- установлении равновесного состояния в начальной задаче [Janssen, 2003; Socquet-

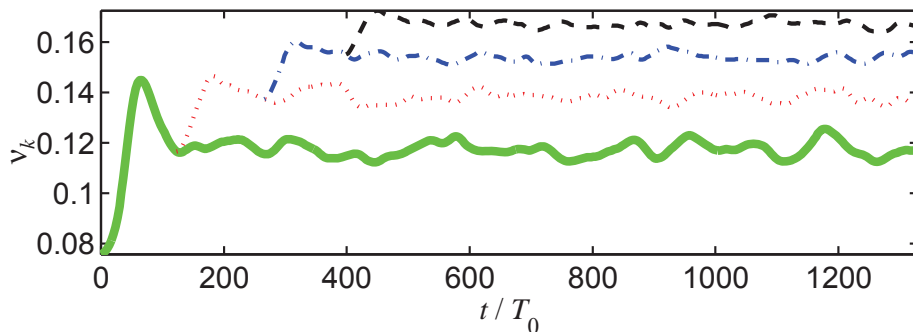


Рис. 4.4.7. Эволюция ширины спектра в рамках исходных уравнений для начальных параметров  $\eta_{rms} = 0.042$ ,  $\nu_k = 0.076$ ,  $BFI(t=0) = 1.56$  (зеленым). Последовательное перемешивание фаз с усреднением спектра дано дополнительными линиями.



- Juglard et al, 2005; Onorato et al, 2009; Annenkov & Shrira, 2009a,b; Shemer et al, 2010\*];
- быстро изменяющегося ветра [Annenkov & Shrira, 2009a,b];
  - резком изменении свойств волноводной среды (неоднородные течения, смены глубины) [Janssen & Herbers, 2009; Onorato et al, 2011; Sergeeva et al, 2011; Рубан, 2012; Trulsen & Zeng, 2012].

Нами была выполнена серия численных экспериментов по моделированию нерегулярных волн в рамках полных уравнений Эйлера в конформных переменных [Zakharov et al, 2002], когда фазы волн принудительно перемешивались. На Рис. 4.4.6 зависимость ширины спектра от времени (зеленая линия) совпадает с данными, представленными на Рис. 2.4.6а (тоже зеленым, но на большем интервале времени). Отходящие синие и красные линии соответствуют дополнительным численным экспериментам, когда в выбранные моменты времени фазы Фурье в каждой из реализаций перемешивались случайным образом (красная линия), либо дополнительно проводилось усреднение профиля спектра по всем реализациям, и уже для него добавлялись случайные фазы, что в итоге создавало новый ансамбль волновых реализаций (синий пунктир). В итоге после таких процедур усредненный спектр по форме совпадал с таковым до перемешивания, а фазы оказывались равномерно распределенными (корреляции терялись).

Из Рис. 4.4.6 видно, что после перемешивания фаз снова возникал переходный режим через уширение спектра и последующее частичное сужение. Этот процесс проходил схожим образом, если перемешивание производилось после установления квазиравновесного состояния (зеленая линия на Рис. 4.4.6 вышла на примерно постоянное значение после уширения), но может приводить к еще большему уширению спектра, если начался до установления равновесного состояния (самая левая пара красной и синей линий). Способ перемешивания почти не имеет значения, он чуть более эффективен в смысле уширения спектра, если происходит по второму сценарию – с усреднением профиля спектра.

Последовательное перемешивание фаз ведет ко все большему уширению спектра, как это показано на Рис. 4.4.7 (для перемешивания с осреднением спектра). Видно также, что этот эффект ослабевает (вследствие уменьшения стартового  $BFI$ , а значит, и ослабления эффектов самомодуляции).

Таким образом, на основе собственных численных экспериментов (частично проверенных в лабораторных условиях) и других опубликованных работ, приведенных выше, можно сделать общий вывод, что если система волн, характеризующаяся величиной  $BFI > \sim 1$ , оказывается выведена из равновесного состояния (например, посредством быстрого воздействия, нарушающего фазовые корреляции волновых квартетов), то процесс

установления нового равновесного состояния будет сопровождаться стадией «обострения» (длительностью  $1-2T_{nl}$ ), когда резко вырастает эксцесс и вероятность высоких волн. Задержка возникновения наиболее экстремального состояния  $1-2T_{nl}$  для умеренно интенсивных волн составляет порядка  $10^1$  периодов волн, что для морских условий соответствует временам от единиц до десятка минут.

### Адиабатическое усиление когерентных волновых пакетов

Очевидно, что экстремальные волновые условия могут создаваться сильными ветрами (например, штормовые волны или волны, возникающие в результате прохода ураганов или тайфунов). Возможные эффекты взаимодействия между волнами и ветром изучены пока в недостаточной степени. Здесь можно выделить классические механизмы Майлса [Miles, 1957, 1960], Филипса [Phillips, 1957], Джэфри [Jeffreys, 1925]. В ИПФ РАН также были предложены теоретические модели генерации волн ветром [Реутов & Троицкая, 1995; Троицкая, 1997]. Влияние ветра на динамику интенсивных волн, в частности, линейную и нелинейную фокусировки, обсуждалось во многих публикациях, в том числе в контексте проблемы «волн-убийц» [Touboul et al, 2006; Leblanc, 2007; Touboul, 2007; Kharif et al, 2008, 2010; Touboul & Kharif, 2010; Yan & Ma, 2010; Adcock & Taylor, 2011; Brunetti et al, 2014;

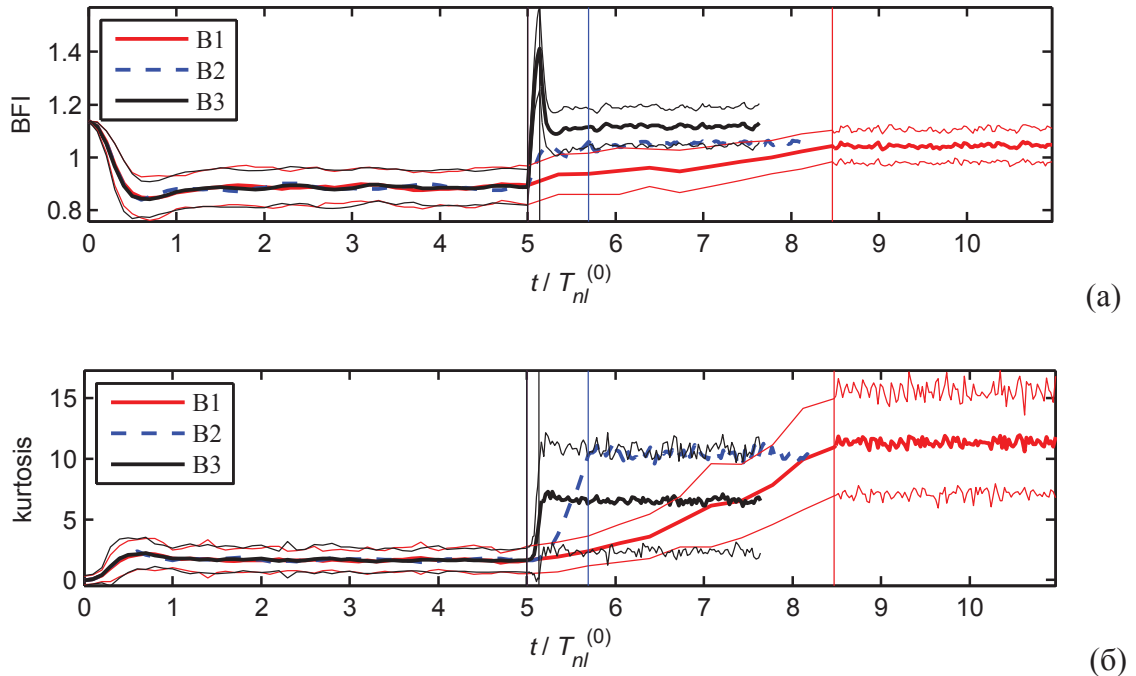


Рис. 4.4.8. Эволюция моментального значения  $BFI$  (а) и эксцесса  $\lambda_4 - 3$  (б) для разных длительностей накачки В1-3. Тонкие линии соответствующих цветов показывают доверительные интервалы для случаев В1 и В3. Вертикальные линии соответствующих цветов отмечают моменты включения и выключения накачки. Нелинейный масштаб времени  $T_{nl}$  (4.2.3) определен по начальному условию.

Chabchoub et al, 2013a]. Также обсуждались и обратные эффекты – ослабления волн в результате, например, диссипации, способные затормозить самомодуляцию волн или вообще ее стабилизировать [Segur et al, 2005; Voronovich et al, 2008; Kharif et al, 2010; Touboul & Kharif, 2010]. Другие способы передачи энергии волнам, в частности, переменные течения [Onorato et al, 2011; Onorato & Proment, 2012], также могут приводить к совпадающим по форме эволюционным уравнениям [Fabrikant, 1980] (см. более подробно в обзоре в нашей работе [Slunyaev et al, 2015\*]).

Присутствие в полях случайных волн нелинейных когерентных (солитоноподобных) групп изменяет поведение ансамблей при притоке энергии извне. В качестве простейшей модели нами рассмотрено нелинейное уравнение Шредингера с дополнительным линейным слагаемым

$$i \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\omega_0}{8k_0^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\omega_0 k_0^2}{2} |A|^2 A - i\Gamma A = 0, \quad (4.4.5)$$

которое описывает приток энергии в случае  $\Gamma > 0$  или ее отток в противоположном случае.

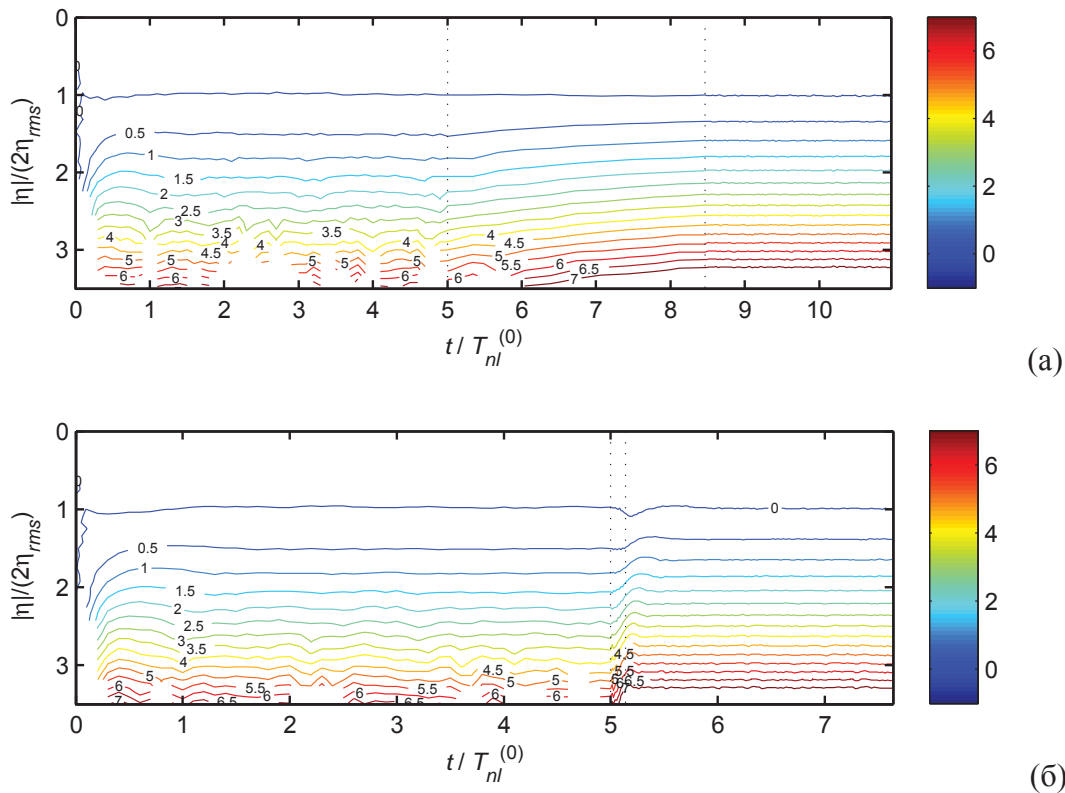


Рис. 4.4.9. Линии уровня показывают величину  $\log_{10}(P/P_{Rayleigh})$ , где  $P$  – функция распределения вероятности превышения высот, построенная по результатам численных экспериментов (на Рис. 4.4.8) для случаев В1 (а) и В3 (б), а  $P_{Rayleigh}$  – распределение Рэля. Вертикальные линии отмечают моменты включения и выключения накачки. Нелинейный масштаб времени  $T_{nl}$  (4.2.3) определен по начальному условию.

Для  $\Gamma = 0$  уравнение (4.4.5) есть НУШ для волн на бесконечно глубокой воде. Это слагаемое может описывать как действие ветра для механизма Майлса ([Leblanc, 2007]), так и другие эффекты.

Нами выполнены стохастические численные эксперименты, подобные описанным выше, только сейчас волновые ансамбли подвергались воздействию внешней накачки. Начальные условия выбирались благоприятными для развития модуляционной неустойчивости ( $k_0 \eta_{rms} = 0.08$ ,  $\nu_k = 0.2$ ,  $BFI(t=0) \approx 1.1$ ). Мощность накачки (величина коэффициента  $\Gamma$ ) варьировалась, но полная энергия, передаваемая системе, была постоянной (за счет ограничения времени накачки, когда  $\Gamma \neq 0$ ), так что после выключения накачки средняя крутизна волн увеличивалась вдвое до  $k_0 \eta_{rms} = 0.16$ . Накачка включалась спустя некоторое время после начала моделирования (4.4.5) (в момент  $t = 5T_{nl}$ , он отмечен левой вертикальной линией на Рис. 4.4.8-4.4.10), что позволяло волнам достичь квазиравновесного состояния. После выключения накачки (правые вертикальные линии разных цветов на Рис. 4.4.8-4.4.10) моделирование продолжалось для  $\Gamma = 0$  в течение 10 характерных нелинейных времен (определенных для нового уровня нелинейности), что обеспечивало выход на новое равновесное состояние.

Из Рис. 4.4.8 видно, что приток энергии ведет к изменению значений  $BFI$  и эксцесса.  $BFI(t)$  испытывает короткий всплеск в случае быстрой мощной накачки (случай В3). Вопреки соотношению (4.1.3), полученному для равновесных близких к гауссовым ансамблей (в экспериментах, представленных на Рис. 4.4.8-4.4.10 связанные волны не учтены), сравнение Рис. 4.4.8а и 4.4.8б приводит к заключению, что большему значению  $BFI$  соответствует меньший эксцесс. Согласно (4.1.3), для  $BFI = 1$  отклонение эксцесса от случая гауссовой

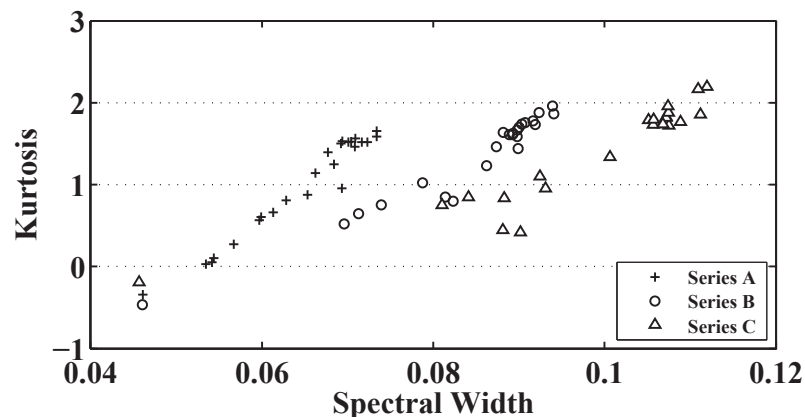


Рис. 4.4.10. Зависимость эксцесса  $\lambda_4 - 3$  от ширины частотного спектра по результатам трех серий лабораторных экспериментов для волн разной интенсивности.

статистики оценивается как  $\approx 1.8$ , что примерно соответствует Рис. 4.4.8 до включения накачки, но позднее оценка (4.1.3) не работает.

Другой пример невыполнения соотношения (4.1.3) в случае лабораторных измерений динамики сильно нелинейных волновых групп приведен на Рис. 4.4.10 (см. подробности в нашей работе [Слюняев и Сергеева, 2011\*]). Здесь отложены моментальные значения эксцесса и ширины усредненного частотного спектра по мере регистрации волн на разных дистанциях от волнопродуктора (символы одного типа соответствуют экспериментам с одной величиной  $\eta_{rms}$ . Постановка экспериментов схожа с рассмотренной в Разделе 4.2). Для фиксированной крутизны волн (т.е. для выбранной серии экспериментов на Рис. 4.4.10) параметр  $BFI$ , по своему определению (4.1.2), обратно пропорционален ширине спектра, и потому из Рис. 4.4.10 выходит, что больший эксцесс смещений поверхности регистрируется при меньших значениях  $BFI$ . По всей видимости, причиной показанных нарушений соотношения для  $BFI$  и эксцесса (4.1.3) первую очередь является нестационарность процессов. Хотя как следует из больших значений эксцесса (Рис. 4.4.8б) и сильного отклонения распределения вероятности от Рэлеевского (Рис. 4.4.9), даже в состоянии равновесия поведение ансамблей волн далеко от гауссового случайного процесса (см. также примеры профилей волн в [Slunyaev et al, 2015\*]).

Другой эффект, который хотелось бы подчеркнуть, заключается в чувствительности вычисления  $BFI$ . Этот параметр включает только один характерный масштаб профиля спектра, и если спектр имеет более сложную форму (например, JONSWAP), то в зависимости от способа определения ширины спектра результат может сильно отличаться. Для Рис. 4.4.8а ширина спектра

$$v_k = \frac{1}{k_0} \sqrt{\frac{\int (k - k_0)^2 S(k) dk}{\int S(k) dk}} \quad (4.4.6)$$

была посчитана только в интервале волновых чисел  $(0, 2k_0)$ . На Рис. 4.4.11 построены те же зависимости, что и на Рис. 4.4.8а, только ширина спектра определена по всем волновым числам. В этом случае значения  $BFI$  для всех ситуаций уменьшились, несмотря на усиление нелинейности волн в 2 раза, и связанной с этим увеличением эксцесса (Рис. 4.4.8б), определение которого не использует спектральные данные.

Из эволюции функций распределения вероятности амплитуд на Рис. 4.4.9 видно, что вероятность амплитуд, превышающих значительную амплитуду  $2\eta_{rms}$ , растет сразу после начала моделирования. До включения накачки вероятность амплитуды, превосходящей величину  $2\eta_{rms}$  вдвое (т.е., «волн-убийц», определенных по амплитудному критерию),

оценивается примерно в  $10^{1.5}$  раз больше Рэлеевской. Вероятность высоких волн еще более повышается после включения накачки и превышает распределение Рэля уже в  $10^2$  раз (Рис. 4.4.9а, случай В1). Интересно отметить область кратковременного повышения вероятности высоких волн сразу после выключения накачки в случае ее большей мощности (Рис. 4.4.9б, случай В3). Это экстремальное состояние отразилось на всплеске моментального  $BFI$  (Рис. 4.4.8а), но не заметно на записи эксцесса (Рис. 4.4.8б).

Медленная накачка (случай В1) оказалась более выгодной с точки зрения получения экстремальных условий. Это следует из большего значения эксцесса (Рис. 4.4.8б) и более высоких хвостов распределения вероятности для нового равновесного состояния (см. в [Slunyaev et al, 2015\*]). Как следует из нашего исследования в [Slunyaev et al, 2015\*], такой эффект объясняется адиабатически медленным «выращиванием» солитонов, содержащихся в полях нерегулярных волн (там же предложены приближенные аналитические формулы для описания накачки солитонов), идеологически родственной работам [Горшков и др., 1976; Kaup & Newell, 1978, Фабрикант, 1984]. В этом режиме они сохраняют свою структуру и вырастают в амплитуде значительно быстрее, чем линейные волны. Линейные волны растут по амплитуде  $A_{lin}$  пропорционально квадратному корню из энергии, в то время как солитоны огибающей  $A_{sol}$  при адиабатически медленной накачке – пропорционально первой степени энергии или квадрату средней крутизны,

$$A_{lin} \sim \sqrt{E(t)} \sim \eta_{rms}(t), \quad A_{sol} \sim E(t) \sim \eta_{rms}^2(t). \quad (4.4.7)$$

Оценки изменения амплитуд солитонов огибающей в случае очень быстрой накачки или в промежуточной ситуации (на небольших временах) приведены в нашей работе [Slunyaev et al, 2015\*]. В этой статье наглядно показано, как аномально быстрый рост солитонов приводит к более экстремальным волновым условиям.

Такой эффект отмечался в вычислительных экспериментах волн на воде в рамках

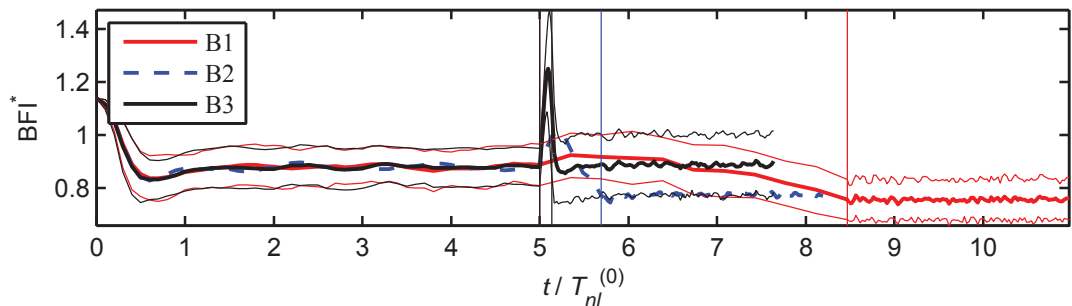


Рис. 4.4.11. То же, что и на Рис. 4.4.8а, только ширина спектра, входящая в значение  $BFI$ , определена по всей области волновых чисел  $k > 0$ .

неинтегрируемого НУШ для двумерной поверхности [Adcock & Taylor, 2011], а еще раньше он был применен для селективного усиления полезного сигнала в солитонных оптоволоконных системах [Mollenauer & Smith, 1988] (из (4.4.7) следует, что при медленной накачке солитонная часть растёт быстрее), что подтверждает его реализуемость и вне идеальных условий интегрируемого НУШ. Очевидно, что в неинтегрируемых системах характерное время жизни солитонной группы должно быть много больше, чем масштаб изменения энергии. Другой известный эффект нелинейной динамики в слабонеинтегрируемых системах заключается в отборе энергии наиболее интенсивным солитоном, что может приводить к появлению очень интенсивных волн [Калоджеро и Дегасперис, 1985; Akhmediev et al, 2011b].

Таким образом, в реальных морских условиях можно ожидать существования как минимум двух эффектов: усиления когерентных нелинейных волновых структур при медленной передаче энергии и кратковременного увеличения доли высоких волн при резком исчезновении накачки (например, резко стихший сильный ветер и т.п.).

Частными примерами, когда действует механизм адиабатической накачки когерентных волн, может оказаться случай выхода кноидальных волн на более мелкую воду [Sergeeva et al, 2011; Trulsen et al, 2012; Gramstad et al, 2013; 2012; Viotti & Dias, 2014; Trulsen et al, 2015], а также распространение нелинейных групп волн Стокса на переменной, но достаточно большой глубине ( $kh \gg 2$ ), тогда в первом приближении эволюционное уравнение представляет собой модифицированное НУШ (4.4.5), в котором все коэффициенты зависят от локальной глубины (см. в [Djordjevic & Redekopp, 1978], а также в [Zeng & Trulsen, 2012; Sergeeva et al, 2014\*]). В случае кноидальных волн (доминирующая роль трехволновых нелинейных процессов) более короткое характерное время нелинейности должно вести в более мягкому условию на адиабатичность накачки. Подчеркнем, что связь этих эффектов с нелинейными долгоживущими структурами еще не доказана, мы предполагаем эту возможность, основываясь на приведенных результатах.

Итак, экстремальное поведение волн (сильное отклонение от гауссовой статистики) нами связывается с возникновением когерентных волновых групп в полях случайных волн на глубокой воде. Это нелинейный эффект самомодуляции волн в результате 4-волновых взаимодействий. В пределе слабой нелинейности и узкого спектра моделью первого приближения является нелинейное уравнение Шредингера, предоставляющее теоретическое обоснование индексу модуляционной неустойчивости BFI. Поведение когерентных нелинейных волновых групп в условиях слабой и сильной нелинейности в более «рафинированных» условиях были нами рассмотрены в Главах 2 и 3 диссертации. Параметр

$BFI$  является простейшим для экспресс-оценки самомодуляционных свойств волн. Численные и лабораторные эксперименты однозначно свидетельствуют о его полезности и связи со статистическими характеристиками волн (хотя и далеко не всегда такой простой, как предлагается теорией [Mori & Janssen, 2006] (4.1.3)).

Одновременно можно сформулировать как минимум следующие трудности при практическом применении  $BFI$  для объяснения или предсказания экстремальных состояний однонаправленных волн (отдельного рассмотрения требует более общий случай ненулевого углового спектра, который в настоящей диссертации мы практически не затронули):

- негрубость определения  $BFI$ , что отмечалось во многих работах (см. обзор в нашей монографии [Kharif et al, 2009\*]); неоднозначность вычисления  $BFI$  подчеркивалась и в этом разделе диссертации;
- малый разброс значений  $BFI$ , реализуемых в море (эти значения обычно порядка единицы или меньше), что требует хорошей точности определения  $BFI$ , которую трудно обеспечить, как сформулировано в предыдущем пункте;
- эффект памяти, который отмечался в этой главе: наиболее экстремальные условия наблюдаются не в момент наибольшего значения  $BFI$ , а позднее – от единиц до десятков минут.

## 4.5 Заключение

По содержанию Главы 4 формулируются следующие основные результаты.

1 Исследована динамика ансамблей интенсивных волновых групп с заданным начальным спектром в рамках эволюционных уравнений различной точности, включая полные уравнения гидродинамики, а также с использованием лабораторных результатов. Описание в рамках приближенных моделей огибающей, включая нелинейное уравнение Шредингера, дает качественно верное статистическое описание даже в случае волн большой амплитуды. Общая картина явления хорошо параметризуется в терминах индекса модуляционной неустойчивости,  $BFI$ , и характерного масштаба кубической нелинейности,  $T_{nl}$ . В случае  $BFI > 1$  усредненный спектр волн претерпевает существенные изменения, сначала расширяясь, а затем частично сужаясь. Волны достигают нового состояния статистического равновесия за  $1-2T_{nl}$ , при этом моментальное значение  $BFI$  становится примерно равным единице. Когда начальное значение  $BFI < 1$ , усредненный спектр не изменяется существенно, и моментальное значение  $BFI$  не эволюционирует.

2 Показано, что максимальная вероятность высоких волн и наибольшие значения 4-го статистического момента (экссесса) смещения поверхности достигаются во время переходной стадии установления нового состояния равновесия. Такой же эффект возникает и



при других способах нарушения статистического равновесия: искусственного перемешивания фаз гармоник Фурье, быстрого выключения мощной накачки волн извне.

3 Эффект установления нового состояния статистического равновесия через стадию обострения связывается с образованием корреляций между фазовыми компонентами и возникновением когерентных солитоноподобных групп волн (типа бризеров НУШ). Установление корреляций в энергонесущей области спектра показано явно с помощью предложенной функции корреляции. Долгоживущие волновые группы хорошо прослеживаются визуально по данным стохастического моделирования исходных уравнений гидродинамики.

4 Предсказана возможность аномального усиления нелинейных групп волн в результате сравнительно медленного эффекта воздействия ветра. Даны формульные оценки изменения амплитуд солитонных групп под действием медленного и быстрого воздействия. Ожидается, что подобный эффект может также реализовываться при выходе нерегулярных кноидальных волн на более мелкую глубину.

5 Выявлены качественные нарушения связи между эксцессом смещения поверхности и индексом модуляционной неустойчивости  $BFI$ , полученной теоретически в [Mori & Janssen, 2006] в приближениях близкого к гауссовому стационарного процесса. Нарушения связываются, в первую очередь, со статистической неравновесностью динамики.

6 Предложен подход к моделированию интенсивных поверхностных морских волн с модельным спектром в предположении однонаправленного распространения. С помощью этого подхода рассчитана и проанализирована эволюция сильно нелинейных нерегулярных волн на пространственно-временных областях 10 км x 20 мин (что соответствует примерно 60 длин волн на 120 волновых периодов). Сделан вывод о сравнительно большом времени жизни аномально высоких волн (до 10 минут). Впервые обнаружена асимметрия фронтов экстремальных волн в случае большой нелинейности волн в среднем. Показано неоднозначное соответствие в статистическом смысле между волнами большой высоты и волнами с большими скоростями жидкости на поверхности.

# Глава 5 АНОМАЛЬНО ВЫСОКИЕ ВОЛНЫ НА ВСТРЕЧНОМ СТРУЙНОМ ТЕЧЕНИИ

## 5.1 Введение

Поверхностные волны на течении представляют очень интересное физическое явление и без отношения к проблеме аномальных волн. Неоднородные течения являются, с одной стороны, изменяют условия распространения волн, а с другой – содержат в себе энергию, которая может быть несопоставимо большой по сравнению с энергией волновых возмущений поверхности. В случае неустойчивостей волн в потоках высвобождаемая энергия может приводить к сложным эффектам и требует сложного математического аппарата для описания; литература по проблеме волн на течениях очень обширна и здесь мы приведем только некоторые ссылки на обзоры и книги [Peregrine 1976; Thomas 1981; Jonsson 1990; Степанянц и Фабрикант, 1996; Thomas & Klopman 1997; Lavrenov 2003]. Естественные условия распространения ветровых волн в океане обычно соответствуют разделению масштабов волн и неоднородностей течений, так что чрезвычайно популярным является приближение геометрической оптики, когда волны представлены лучами, а вдоль них используются различные версии подхода ВКБ (например, в [Peregrine, 1976; Басович и Таланов, 1977; Peregrine & Thomas, 1979; Jonsson, 1990]).

В приложении к «волнам-убийцам» случай волн на встречных течениях был исследован одним из первых в связи с очевидными кандидатами на роль механизмов, фокусирующих волновую энергию: захват и блокировка волн усиливающимся встречным течением; фокусировка волновых лучей, распространяющихся в условиях неоднородных во времени и пространстве течений [Peregrine 1976; Smith, 1976; Басович и Таланов, 1977; Лавренов, 1998; Lavrenov, 1998, 2003; White & Fornberg, 1998; Lavrenov & Porubov, 2006]. Эти механизмы, в первую очередь, линейные; нелинейной постановке задачи посвящены недавние публикации [Thomas 1990; Jansen et al, 2006; Heller et al, 2008; Janssen & Herbers, 2009; Moreira & Peregrine, 2012], другие работы будут обсуждаться дальше.

Одновременно случай волн на встречном течении является показательным примером с точки зрения проблемы «волн-убийц»: описанные выше эффекты общепризнанны как действенные механизмы создания экстремальных волновых условий. Район юго-восточного побережья Африки вдоль течения мыса Игольного хорошо известен благодаря документированным инцидентам с неожиданно высокими волнами [Mallory, 1974; Давидан и Лопатухин, 1982], см. в Разделе 1.2 (включая судебное разбирательство, связанное с гибелью

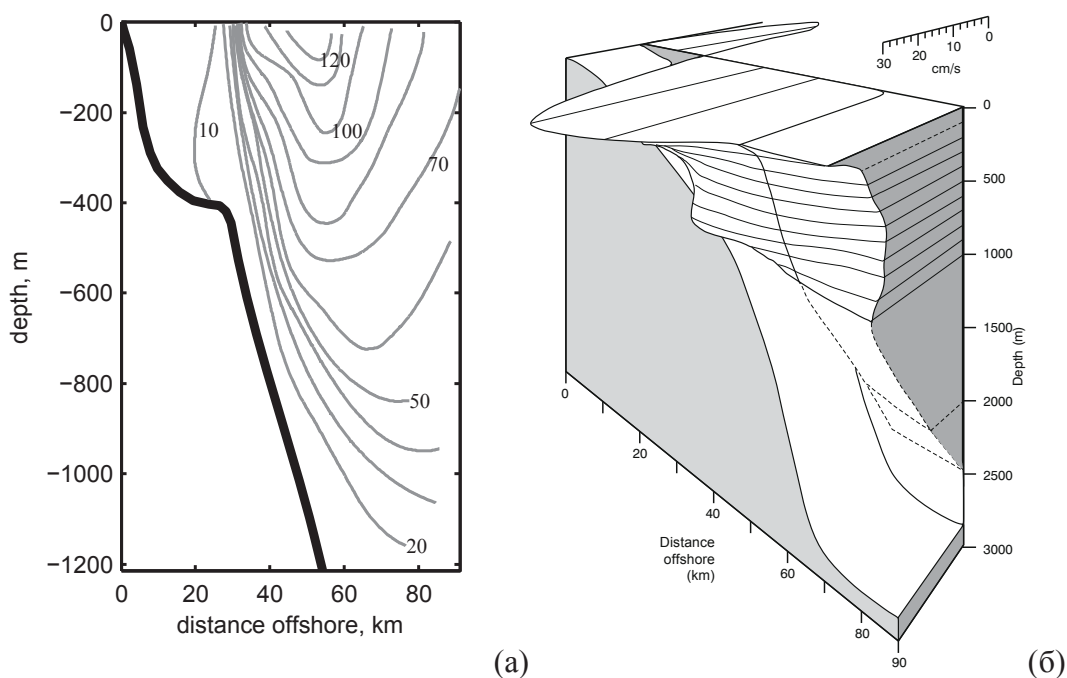


Рис. 5.1.1. Вертикальный разрез течения мыса Игольного поперек его направления на  $30^\circ$  ЮШ по данным [Toole & Raymer, 1985] (а). Черной жирной линией показан свал глубин у берега, серые линии с числами дают изолинии типичных скоростей в см/с. Структура течения недалеко от Дурбана по работе [Lutjeharms, 2006], демонстрирующая присутствие также противотечения.

матроса на танкере «Таганрогский залив» [Лавренов, 1998]). Фокусировка волн в этих природных условиях неоднократно моделировалась, так что в итоге были определены признаки опасных условий и сформулированы инструкции для их избегания. В общем, последние говорят, что если погодные условия создают волновую систему, двигающуюся навстречу течению мыса Игольного (на северо-восток), то кораблям следует держаться вне стержня течения.

В этой главе предлагается другой механизм создания условий для аномально высоких волн, заключающийся в нелинейной самомодуляции волн на поверхности глубокой воды в присутствии течений. Как упоминалось ранее, наиболее благоприятной для реализации самофокусировки волн ситуацией, являются волны с узким угловым спектром. Когда волны распространяются под углом, их взаимодействие ослабевает (волны просто покидают область взаимодействия), что приводит к уменьшению и исчезновению эффекта нелинейной самомодуляции. Захваченные волны не покидают область взаимодействия и потому способны демонстрировать сильные нелинейные эффекты даже в случае широкого углового спектра. Струйные течения (когда масштаб неоднородности поперек течения существенно меньше масштаба изменения вдоль течения) создают условия для захвата и каналирования на большие расстояния волн, способных эффективно взаимодействовать между собой. Для примера на Рис. 5.1.1 даны типичные разрезы течения мыса Игольного. На Рис. 5.1.2



Рис. 5.1.2. Фотография Д. Перегрин (D.H. Peregrine) волн на течении.

приведена фотография, показанная Д. Перегрином на одном из докладов. Возможно, на ней запечатлена интенсивная захваченная волна. Похожие картинки поверхности получены нами в численных расчетах в Разделе 5.5.

В рамках лучевого подхода естественно различать три вида волн, распространяющихся на струйных течениях:

- проходящие волны, их лучи пересекают струйное течение, они не ограничены на поверхности моря,
- отраженные волны, подходящие к течению из бесконечности, но развернутые вследствие рефракции на неоднородном течении
- и захваченные волны, которые распространяются внутри области течения вдоль его стержня.

Исходно в рамках этого подхода волновое поле описывается в виде суперпозиции волновых пакетов с заданной частотой и волновыми векторами, изменяющимися вследствие рефракции; эволюция амплитуды волн предписывается сохранением волнового действия. Также были получены обобщения этого подхода на случай слабо нелинейных волн с узким спектром. Вблизи точек поворота стандартный подход ВКБ не применим, и могут применяться более аккуратные асимптотические подходы [McKee, 1974; Smith, 1975; Peregrine, 1976].

В предположении малой вариации волнового числа несущей были выведены и исследованы различные версии нелинейного уравнения Шредингера для волн на течениях

[Smith, 1976; Turpin et al, 1983; Gerber, 1987; Stocker & Peregrine, 1999; Hjelmervik & Trulsen, 2009; Рубан, 2012]. В работе [Smith, 1976] было получено двумерное (2+1D) НУШ и исследовано волновое поле вблизи каустик, образованных отражением на неоднородном течении, в остальных работах отражения не было учтено. В [Turpin et al, 1983] рассматривалось одномерное распространение волн в условиях медленно меняющегося дна и течения. В [Gerber, 1987] волны распространялись под углом к неоднородному течению в условиях глубокой воды и описывались двумерным НУШ с переменными коэффициентами. Следующий порядок уравнения, представляющий т.н. уравнение Диста, был получен в [Stocker & Peregrine, 1999]. Для волн, распространяющихся навстречу переменному течению, в работе [Hjelmervik & Trulsen, 2009] выполнен вывод НУШ с переменными коэффициентами, справедливый для слабой завихренности, и выполнено стохастическое моделирование волн на течении. В работе [Onorato et al, 2011] было отмечено, что волны, двигаясь навстречу усиливающемуся течению, укрупняются, а ширина спектра в первом приближении не изменяется, что может создавать условия дестабилизации волн в отношении нелинейной самомодуляции. Прямое численное моделирование в рамках «подправленного» одномерного НУШ [Рубан, 2012] и модели для двумерных волн [Janssen & Herbers, 2009] подтвердило эти ожидания. В [Janssen & Herbers, 2009] за областью интенсификации течения наблюдались захваченные волны.

Необходимо отметить ограничения подхода ВКБ для описания захваченных мод, сформулированные в нашей работе [Shrira & Slunyaev, 2013\*]. Во-первых, расположение точек поворота для захваченной моды может быть слишком близким для низких мод, а потому они не могут рассматриваться по отдельности. Другими словами, малая длина волн в сравнении с поперечным масштабом струйного течения не обеспечивает применимости метода ВКБ для волн, распространяющихся под малым углом к направлению течения. Другая принципиальная проблема заключается в том, что для описания нелинейных взаимодействий широких спектров волн в условиях неоднородной среды естественно пространство волновых векторов, а не координатное. Даже если лучевая картина окажется достаточно хорошо описанной в линейном пределе, изменение резонансных условий вдоль распространения луча делает создание строгой нелинейной модели затруднительным. Обычный подход, когда масштаб вариации среды предполагается меньше, чем характерный масштаб нелинейности (например, [Komen et al, 1996; Lavrenov, 2003]), приводит к следующим оценкам. Для кубической нелинейности волн на глубокой воле, эффекты которой нами рассматривались в Главах 2-4, этот масштаб оценивается как  $\varepsilon^{-2}$  длин волн (где  $\varepsilon$  – характерная крутизна), а для «кинетического» масштаба уравнений Хассельмана это  $\varepsilon^{-4}$

длин волн. Полагая  $\varepsilon \sim 0.1$ , а длины волн ветровых и зыби соответственно равными  $L_{wind} \sim 100$  м и  $L_{swell} \sim 500$  м, масштаб «когерентных» взаимодействий для ветровых волн и зыби оценивается как  $10^1$  км и  $10^2$  км соответственно, а кинетический масштаб равен  $10^3 - 10^4$  км. Таким образом, масштаб неоднородности течения должен быть очень большим, и пример течения мыса Игольного (Рис. 5.1.1) этому требованию, по всей видимости, не удовлетворяет.

В нашем подходе в первом приближении струйное течение предполагается продольно однородным, а тогда решение линеаризованных уравнений гидродинамики может быть представлено в виде суперпозиции волн, распространяющихся вдоль течения, обладающих своей модовой структурой – функцией глубины и поперечной горизонтальной координаты. Модовое описание волн на течениях, не опирающееся на метод ВКБ, было впервые предложено, видимо, в работах [Smith, 1970; Peregrine & Smith, 1975] для решения задач с частными профилями течения. Как отмечалось выше, уже в линейном приближении модовый подход имеет преимущество, поскольку может описывать случай распространения волн под малыми углами к течению. Модовый подход еще более выгоден в нелинейном случае, поскольку позволяет развить последовательную слабо нелинейную теорию без наложения сильных ограничений на масштаб течения, которые обсуждены выше. По всей вероятности, модовый подход для волн на течениях [Peregrine & Smith, 1975; Peregrine, 1976] не был развит, в первую очередь, из-за необходимости решать двумерную краевую задачу на структуру моды. В частном случае мелкой воды она решалась в диссертации [Басович, 1981].

Рассматриваемая здесь проблема имеет общность с другими случаями понижения размерности волнового процесса из-за сильной неоднородности вдоль одного из направлений, формирующей волновод (открытый или закрытый): топографически захваченные волны внутренние длинные волны в стратифицированном океане. В этих ситуациях также могут реализовываться условия для развития нелинейной самомодуляции волн [Дубинина и др., 2005, 2006; Pelinovsky et al, 2010; Талипова и др., 2011].

В Разделе 5.2. нами предлагается способ сведения двумерной краевой проблемы к одномерной, приближенно разделяя вертикальную и горизонтальную структуру моды, что радикально упрощает задачу и при определенных реалистичных предположениях на течение сводит ее к классической задаче Штурма-Лиувилля, имеющей набор известных решений. В рамках диссертации мы ограничиваемся (для простоты) случаем бесконечно глубокой воды. Слабонелинейная теория развивается в Разделах 5.3-5.4: для трех- и четырех-волновых взаимодействий. Наличие течения изменяет дисперсионные свойства волн, так что между модами захваченных волн на глубокой воде оказываются разрешенными более быстрые 3-

волновые взаимодействия (Раздел 5.3). Модификация нелинейной теории для 4-волновых взаимодействий представлена в Разделе 5.4. В частности, в нем получено нелинейное уравнение Шредингера для захваченных течением мод, что позволяет записать серию представительных аналитических решений. Результаты слабонелинейной теории проверены в рамках компьютерного моделирования полных уравнений гидродинамики в потенциальном приближении в Разделе 5.5.

По содержанию Главы опубликованы две статьи в журналах: по линейной теории захваченных волн на течениях [Shrira & Slunyaev, 2013\*] и по слабо нелинейным аналитическим решениям и полным по нелинейности численным экспериментам [Shrira & Slunyaev, 2014\*].

## 5.2 Линейная теория в рамках модового подхода

### Исходные уравнения

Система исходных уравнений гидродинамики состоит из уравнения Эйлера и условия неразрывности в толще жидкости

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{U} + \vec{v}, \nabla)(\vec{U} + \vec{v}) + \nabla P = \vec{g}, \quad (5.2.1)$$

$$\nabla(\vec{U} + \vec{v}) = 0 \quad (5.2.2)$$

и не использует предположение о потенциальности движения. Здесь вектор скоростей  $\vec{v} = (u, v, w)$ , давление  $P(x, y, z, t)$  нормировано на плотность однородной воды, течение описывается функцией поперечной координаты  $\vec{U} = (U(y), 0, 0)$ , ось  $Oz$  ориентирована вверх. Таким образом, течение параллельно оси  $Ox$ , оно не изменяется во времени и не зависит от глубины.

Легко видеть, что выбранный вид течения приводит к "выпаданию" его из уравнения непрерывности (5.2.2), которое становится классическим

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (5.2.3)$$

Граничные условия на взволнованной поверхности состоят из условия постоянства давления, значение которого можно выбрать равным нулю,

$$P(x, y, z, t) = 0 \quad \text{при} \quad z = \eta(x, y, z, t), \quad (5.2.4)$$

кинематическое условие записывается в виде

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\vec{U} + \vec{v}, \nabla)\eta = w \quad \text{при} \quad z = \eta(x, y, z, t). \quad (5.2.5)$$

На дне должно выполняться условие непротекания. В пределе бесконечно глубокой воды оно дает соотношение

$$w = 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty. \quad (5.2.6)$$

Учитывая определенный вид течения  $\vec{U}$ , проекции компонент уравнений (5.2.1) и (5.2.5) упрощаются, так что в результате имеем следующий набор уравнений, задающих волновые движения:

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] + v \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad z \leq \eta, \quad (5.2.7)$$

$$\left[ \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \left[ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad z \leq \eta, \quad (5.2.8)$$

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \left[ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{\partial P}{\partial z} + g = 0 \quad \text{при} \quad z \leq \eta, \quad (5.2.9)$$

$$\left[ \frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] + \left[ u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] - w = 0 \quad \text{при} \quad z = \eta, \quad (5.2.10)$$

а также условие (5.2.4) на поверхности и (5.2.6) на глубине.

## Модовое представление

Мы развиваем модовый подход в общем виде, предполагая однородность задачи по отношению к продольной координате  $x$  и времени  $t$ , что позволяет искать решение в виде суперпозиции гармоник Фурье (продольно) с соответствующей поперечной модовой структурой. Соответственно, каждая гармоника характеризуется частотой  $\omega$  и продольным волновым числом  $k$ , которое будет предполагаться положительным числом,  $k > 0$ ,

$$\eta(x, y, t) = \varepsilon A(y) \exp(i\omega t - ikx), \quad (5.2.11)$$

$$u(x, y, z, t) = \varepsilon \hat{u}(y, z) \exp(i\omega t - ikx), \quad (5.2.12)$$

$$v(x, y, z, t) = \varepsilon \hat{v}(y, z) \exp(i\omega t - ikx), \quad (5.2.13)$$

$$w(x, y, z, t) = \varepsilon \hat{w}(y, z) \exp(i\omega t - ikx), \quad (5.2.14)$$

$$P(x, y, z, t) = \varepsilon \hat{P}(y, z) \exp(i\omega t - ikx) - gz. \quad (5.2.15)$$

В этом разделе мы рассматриваем только линейную проблему, потому после подстановки (5.2.11)-(5.2.15) следует удерживать только слагаемые, линейные по параметру  $\varepsilon$ , который здесь используется как маркер, характеризующий малость величин, связанную с малой амплитудой волн. Выбранный вид течения удовлетворяет уравнениям Эйлера (порядок  $\varepsilon^0$ ), когда учтены вихревые компоненты. Можно следовать двум подходам (вычисления проводились в среде символьной математики Maple):



1) в проекциях уравнения Эйлера (5.2.7)-(5.2.9) выразить компоненты скорости через давление  $\hat{P}$  и получить краевую задачу на давление;

2) использовать комбинации производных от проекций уравнения Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial z} Euler_x - \frac{\partial}{\partial x} Euler_z \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial z} Euler_y - \frac{\partial}{\partial y} Euler_z,$$

где  $Euler_x$ ,  $Euler_x$  и  $Euler_x$  обозначают уравнения (5.2.7)-(5.2.9) соответственно. Тогда краевая задача записывается в терминах вертикальной скорости  $\hat{w}$ .

При анализе линейной проблемы в нашей работе [Shrira & Slunyaev, 2013\*] использовался второй подход, но позднее для решения нелинейной задачи мы следовали первому подходу [Shrira & Slunyaev, 2014\*].

Выражая краевую задачу в терминах вертикальной скорости, удобнее перейти к новой функции  $\Phi(y, z)$ ,

$$\hat{w}(y, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (5.2.16)$$

тогда имеем систему уравнений

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \left( \frac{\Omega''}{\Omega} - 2 \frac{\Omega'^2}{\Omega^2} - k^2 \right) \Phi = O(\varepsilon) \quad \text{при} \quad z \leq 0, \quad (5.2.17)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\Omega^2}{g} \Phi + O(\varepsilon) \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (5.2.18)$$

$$\Phi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty, \quad (5.2.19)$$

и волновые компоненты выражаются через соотношения

$$\hat{u} = -ik\Phi - \frac{i}{k} \frac{\Omega'^2}{\Omega^2} \Phi - \frac{i}{k} \frac{\Omega'}{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + O(\varepsilon), \quad (5.2.20)$$

$$\hat{v} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\Omega'}{\Omega} \Phi + O(\varepsilon), \quad (5.2.21)$$

$$\hat{A} = -i \frac{\Omega}{g} \Phi|_{z=0} + O(\varepsilon), \quad (5.2.22)$$

$$\hat{P} = -i\Omega\Phi + O(\varepsilon). \quad (5.2.23)$$

Здесь нами введен аналог частоты волн на течении с учетом Доплеровского сдвига

$$\Omega(y) = \omega - kU(y). \quad (5.2.24)$$

Весь анализ, проводимый в рамках настоящей главы, будет предполагать отсутствие условий для критических слоев, так что величина  $\Omega(y)$  никогда не обращается в ноль. Ситуация резонансного взаимодействия волн с потоком была рассмотрена в [Басович, 1981].

В такой же форме двумерная проблема была записана в [Басович, 1981] и использована в нашей работе [Shrira & Slunyaev, 2013\*] (только записанная для вертикальной компоненты скорости  $\hat{w}$ ). Далее в уравнениях мы опускаем упоминание о неучтенных нелинейных слагаемых  $O(\varepsilon)$ .

Полученная система уравнений (5.2.17)-(5.2.19) должна быть дополнена условиями на поведение собственных функций вдали от течения,  $y \rightarrow \pm\infty$ , тогда она представляет собой двумерную краевую задачу на нахождение собственных частот  $\omega$  при заданном продольном волновом числе  $k$ , либо наоборот, на нахождение собственных волновых чисел  $k$  для заданной частоты  $\omega$ . Продольное волновое число и частота входят в уравнения через величину  $\Omega$  (5.2.24) нетривиальным образом, поэтому сформулированная краевая задача весьма не проста для решения. Конструктивным способом ее решения является трактовка уравнений в толще воды (5.2.17) как возмущений уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - k^2 \Phi = - \left( \frac{\Omega''}{\Omega} - 2 \frac{\Omega'^2}{\Omega^2} \right) \Phi \quad \text{при } z \leq 0, \quad (5.2.25)$$

(правая часть мала для широкого или слабого течения), что позволяет их эффективно решать численно, как было сделано в нашей работе [Shrira & Slunyaev, 2013\*] (для формулировки в терминах вертикальной скорости). Этот подход не учитывает наличие захваченных волн явно. Разделение переменных для отдельного описания вертикальной и горизонтальной зависимости мод (которое справедливо, когда течение отсутствует) также неудобно для решения сформулированной краевой задачи, когда  $\Omega$  зависит от  $y$ : для удовлетворения граничному условию (5.2.18) решение нужно составлять из бесконечного числа базисных функций.

Мы предполагаем приближенное разделение переменных, считая, что течение не очень сильно изменяет волны, так что локально они сохраняют структуру классических поверхностных волн, и решение удобно записать в виде

$$\Phi(y, z) = F(y, z)Z(y, z), \quad Z(y, z) = \exp\left(z \frac{\Omega^2}{g}\right), \quad (5.2.26)$$

который пока не накладывает никаких ограничений на решение, но нами предполагается, что функция  $Z$  описывает, главным образом, поведение волн вглубь, а  $F$  – по горизонтали. В отсутствие течения  $Z = \exp(z\omega^2/g)$ ,  $F = \exp(ik_y y)$ ,  $\omega^4 = g^2(k^2 + k_y^2)$ .

Для выполнения условия на поверхности (5.2.18) требуем выполнения

$$\frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0. \quad (5.2.27)$$

Условие неразрывности (5.2.17) дает

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \left( \frac{\Omega^4}{g^2} - k^2 \right) F + \left( \frac{\Omega''}{\Omega} - 2 \frac{\Omega'^2}{\Omega^2} \right) F + \\
& + z \left[ \frac{4}{g} \Omega \Omega' \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{2}{g} \Omega'^2 F + \frac{2}{g} \Omega \Omega'' F \right] + z^2 \frac{4}{g^2} \Omega^2 \Omega'^2 F + . \quad (5.2.28) \\
& + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{2}{g} \Omega^2 \frac{\partial F}{\partial z} = 0
\end{aligned}$$

Для оценок величин интенсивности течения и его ширины введем следующие безразмерные параметры  $\gamma$  и  $\mu$  соответственно, которые в зависимости от условий могут быть малы или порядка единицы:

$$\gamma \sim \frac{\max |U|}{C_{ph}}, \quad \mu \sim (kL_U)^{-1}. \quad (5.2.29)$$

Здесь  $C_{ph}$  – фазовая скорость волн,  $L_U$  – характерный масштаб течения. Из (5.2.24) следует оценка  $d^n \Omega / dy^n = O(\gamma \mu^n)$ .

Оценивая скорость спадания волны вглубь как  $\Omega^2/g = O(1)$ , слагаемые во второй строке и в правой скобке первой строки (5.2.28) малы. Ниже дана оценка всех слагаемых в (5.2.28):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \left( \frac{\Omega^4}{g^2} - k^2 \right) F + (\gamma \mu^2 - \gamma^2 \mu^2) F + \\
& + z \left[ \gamma \mu \frac{\partial F}{\partial y} + \gamma^2 \mu^2 F + \gamma \mu^2 F \right] + z^2 \gamma^2 \mu^2 F + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{2}{g} \Omega^2 \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \quad (5.2.30)
\end{aligned}$$

Малость слагаемых в последней строке (5.2.28) была предположена при выборе записи решения (5.2.26). Разделим условие (5.2.30) на два, группируя отдельно малые и немалые слагаемые, и требуя, в первую очередь, выполнения условия на немалые слагаемые

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \left( \frac{\Omega^4}{g^2} - k^2 \right) F = O(\gamma \mu), \quad (5.2.31)$$

На горизонте  $z = 0$  точность (5.2.31) еще выше, –  $O(\gamma \mu^2)$ . Разумно, что использование условия (5.2.31) требует слабого течения (тогда оно локально лишь слегка подправляет решение для свободной волны), либо широкого течения (тогда волновое решение медленно изменяется по мере движения поперек течения). В [Shrira & Slunyaev, 2013\*] показано, что использованная подстановка (5.2.26) позволяет решать проблему (5.2.25) как минимум до второго порядка асимптотических разложений по малому параметру  $\mu$  включительно.

Приведем здесь формулировки краевых задач в терминах давления  $\hat{P}(y, z)$ , которые будут использованы нами далее в Разделах 5.3 и 5.4. Двумерная краевая задача записывается в виде

$$\frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial y^2} - k^2 \hat{P} - \frac{2}{\Omega} \frac{d\Omega}{dy} \frac{\partial \hat{P}}{\partial y} = 0 \quad \text{при } z \leq 0, \quad (5.2.32)$$

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial z} = \frac{\Omega^2}{g} \hat{P} \quad \text{при } z = 0, \quad (5.2.33)$$

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial z} \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty. \quad (5.2.34)$$

Прочие волновые функции определяются через соотношения

$$\hat{u} = \frac{k}{\Omega} \hat{P} + \frac{i}{\Omega} \frac{dU}{dy} \hat{v}, \quad (5.2.35)$$

$$\hat{v} = \frac{i}{\Omega} \frac{\partial \hat{P}}{\partial y}, \quad (5.2.36)$$

$$\hat{w} = \frac{i}{\Omega} \frac{\partial \hat{P}}{\partial z}, \quad (5.2.37)$$

$$\hat{A} = \frac{1}{g} P|_{z=0}. \quad (5.2.38)$$

Для получения приближенной одномерной задачи введем новую функцию  $\Pi(y, z)$

$$\hat{P}(y, z) = \Pi(y, z)Z(y, z), \quad Z(y, z) = \exp\left(z \frac{\Omega^2}{g}\right), \quad (5.2.39)$$

где функция  $\Omega(y)$  определена в (5.2.24). Условие на поверхности (5.2.33) требует выполнения

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (5.2.40)$$

С учетом формы  $\hat{P}$  уравнение (5.2.32) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + \left( \frac{\Omega^4}{g^2} - k^2 \right) \Pi - 2 \frac{\Omega'}{\Omega} \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \\ & + z \left[ \frac{4}{g} \Omega \Omega' \frac{\partial \Pi}{\partial y} - \frac{2}{g} \Omega'^2 \Pi + \frac{2}{g} \Omega \Omega'' \Pi \right] + z^2 \frac{4}{g^2} \Omega^2 \Omega'^2 \Pi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + \frac{2}{g} \Omega^2 \frac{\partial \Pi}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (5.2.41)$$

которое по своей структуре совпадает с (5.2.30) и ведет к той же одномерной краевой задаче (5.2.31).

### Одномерные краевые задачи

Поскольку в (5.2.31) зависимость от вертикальной координаты выпала, это соотношение мы будем в дальнейшем использовать для определения одномерной краевой задачи для горизонтальной моды  $Y(y)$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \left( \frac{\Omega^4}{g^2} - k^2 \right) Y = 0, \quad (5.2.42)$$

дополняя его нужными граничными условиями. Захваченные волны определяются условиями

$$Y \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0, \quad Y \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} 0, \quad (5.2.43)$$

более полные неубывающие условия

$$\begin{aligned} Y(y) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} C_1 \exp(-iqy) + C_2 \exp(iqy), \\ Y(y) \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} C_3 \exp(-iqy) + C_4 \exp(iqy) \end{aligned} \quad (5.2.44)$$

определяют не локализованные на течении решения, которые мы не будем рассматривать в рамках настоящего исследования. Частота волна  $\omega$  для заданного продольного волнового числа  $k$  входит в величину  $\Omega(y)$ , которая делает проблему на собственные значения (5.2.42) нелинейной. Легко можно показать (см. [Shrira & Slunyaev, 2013\*]), что одной собственной частоте  $\omega$  соответствует единственное решение  $Y(y)$ . По всей видимости, собственные решения (5.2.42)-(5.2.44) не полностью ортогональны. Вертикальная зависимость решения описывается в первом приближении как  $Z = \exp(z\Omega^2/g)$ , см. (5.2.26) и (5.2.39).

В случае слабого и одновременно широкого течения ( $\gamma \ll 1$ ,  $\mu \ll 1$ ) проблема может быть упрощена еще больше, положив  $\omega = \omega^{(0)} + \gamma\omega^{(1)}$  и разлагая  $\Omega^4$  в (5.2.42) по малому  $\gamma$ . Она сводится к классической задаче Штурма-Лиувилля

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + 4k^2 \left( \frac{\omega - \omega_g}{\omega_g} - \frac{kU}{\omega_g} \right) Y = o(\gamma), \quad \omega_g = \sqrt{gk}. \quad (5.2.45)$$

Здесь  $\omega^{(0)} = \omega_g \equiv (gk)^{1/2}$  – частота волн с волновым числом  $k$  на невозмущенной воде. Такого вида уравнение было получено локально в [Peregrine & Smith, 1975] для захваченных волн с малым номером.

По своей форме (5.2.45) – стационарное уравнение Шредингера с потенциалом, определенным профилем струйного течения. Аналог энергии в квантовомеханической интерпретации уравнения (5.2.45) здесь пропорционален величине  $(\omega_g - \omega)/\omega_g$ . Продольное волновое число здесь входит как параметр, собственное значение определяет частоту моды, а соответствующая собственная функция – профиль моды. Среди замечательных свойств (5.2.45) – полнота базиса собственных функций [Ландау и Лифшиц, 1989; Drazin & Johnson, 1996]. Захваченные моды (локализованные функции  $Y(y)$ ) соответствуют дискретному спектру, а проходящие – сплошному. Для полноты базиса должны учитываться обе части спектра.

Моды захваченных волн соответствуют дискретным значениям спектра проблемы (5.2.45) и соответствуют  $\omega < \omega_g$ . Всегда найдется хотя бы одна захваченная мода, если выполняется  $kU(y) < 0$  [Simon, 1976], то есть, течение направлено навстречу распространению волны (т.к. было условлено, что  $k > 0$ , то отрицательной является величина  $U$ ). В ситуации знакопеременного течения (например, как на Рис. 5.1.1б) в случае "мелкой потенциальной ямы"

$$\frac{\max|U|}{\sqrt{g/k}} (kL_U)^2 \ll 1 \quad (5.2.46)$$

(иначе:  $\gamma \ll \mu^2$ ) необходимым и достаточным условием на существование захваченной моды является [Simon, 1976]

$$\int_{-\infty}^{\infty} kU dy \leq 0. \quad (5.2.47)$$

Существует ряд точных аналитических решений (5.2.43) и (5.2.45) для разных профилей  $U(y)$  [Ландау и Лифшиц, 1989]: П-образного, параболического, формы  $\text{sech}^2$ , несимметричного (треугольный, профиль Морзе), которые составляют представительный набор решений, см. в нашей работе [Shrira & Slunyaev, 2013\*] и ссылки на оригинальную литературу. В частности, для профиля вида

$$U = U_0 / \cosh^2 y/L \quad (5.2.48)$$

частоты захваченных мод определяются формулой

$$\frac{\omega_g - \omega_n}{\omega_g} = \frac{1}{16k^2 L^2} \left[ \sqrt{1 - 16 \frac{k^3 U_0 L^2}{\omega_g}} - (2n + 1) \right]^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \omega_n < \omega_g, \quad (5.2.49)$$

а структура мод  $Y_n(y)$  представляется в терминах присоединенных функций Лежандра (см. в [Shrira & Slunyaev, 2013\* ; Ландау и Лифшиц, 1989]).

В квазиклассическом пределе правило квантования Бора-Зоммерфельда дает оценку на число захваченных течением мод  $N_{tr}$ :

$$N_{tr} = \frac{2k}{\pi \sqrt{\omega_g}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{-kU} dy + \frac{1}{2} \approx \frac{4}{\lambda_x} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{-\frac{U}{C_{ph}}} dy + \frac{1}{2}, \quad \text{где } \lambda_x = \frac{2\pi}{k}, \quad C_{ph} \approx \frac{\omega_g}{k}, \quad (5.2.50)$$

которая работает при большом числе захваченных мод, но для многих ситуаций дает хорошую оценку даже в случае малого числа  $N_{tr}$ .

В рамках приближения стационарного уравнения Шредингера (5.2.45) можно сделать оценки на параметры решения в терминах введенных в (5.2.29) величин  $\gamma$  и  $\mu$  (см. в [Shrira & Slunyaev, 2013\*]). Так, число захваченных мод оценивается как

$$N_{tr} \sim \sqrt{\gamma}/\mu, \quad (5.2.51)$$

которое будет предполагаться большим.

Вводя характерный масштаб изменения моды  $\chi$ ,  $Y(y)' \sim \chi k Y$ , для нее можно записать оценку (для  $n$ -ой моды)

$$\chi \sim \sqrt{\gamma \frac{n}{N_{tr}}}, \quad \chi \sim \ll \sqrt{\gamma}. \quad (5.2.52)$$

Общий поперечный размер  $n$ -ой моды оценивается как

$$nk^{-1} \chi^{-2} \sim \frac{1}{k} \sqrt{\frac{n N_{tr}}{\gamma}} \approx \frac{1}{k} \sqrt{\frac{n}{N_{tr}}} \sqrt{\frac{N_{tr}^2}{\gamma}} \approx \frac{1}{k \mu} \sqrt{\frac{n}{N_{tr}}}. \quad (5.2.53)$$

Таким образом, в случае большого числа захваченных мод  $n$ -я мода занимает  $\sqrt{n/N_{tr}}$  долю ширины течения, моды с низкими номерами локализованы у струи течения. При малом числе мод на слабом, но не широком течении ( $\gamma \ll 1$ ,  $\mu \sim 1$ ) мода может быть много шире, чем размер течения, см. (5.2.52).

### Дисперсионные соотношения

Имея набор аналитических решений для стационарного уравнения Шредингера (5.2.45), легко построить дисперсионные соотношения для волн, захваченных струйным встречным течением разного профиля (Рис. 5.2.1). Кроме решений для захваченных волн на трех видах профиля течения с максимальной скоростью 2 м/с (красными линиями) на рисунках также построены линии для волн на спокойной воде  $\omega_g(k)$  (зеленый пунктир) и для волн,двигающихся строго навстречу плоскопараллельному течению такой же скорости  $\omega_g - k \max|U|$  (черный штрих-пунктир). Рис. 5.2.1г демонстрирует случай еще большей скорости течения. Видно, что частоты захваченных мод заключены в интервале между  $\omega_g(k)$  и  $\omega_g - k \max|U|$ . При укорочении длины волн вдоль  $x$  число мод растет. Новые ветви дисперсионного соотношения начинаются с линии свободных волн  $\omega_g(k)$ . Качественно все рисунки дисперсионных соотношений выглядят схожими. Видна разная плотность расположения ветвей дисперсионных соотношений, что связано с формой профиля течения. Параболическое течение (с постоянной кривизной профиля) дает эквидистантный спектр (Рис. 5.2.1в). Решения для П-образного и параболического течений в области длинных волн физически не применимы (в первом случае использована формула решения, не работающая в этой области, во втором – течение на периферии не ограничено по интенсивности), что объясняет исчезновение решения в этой области.

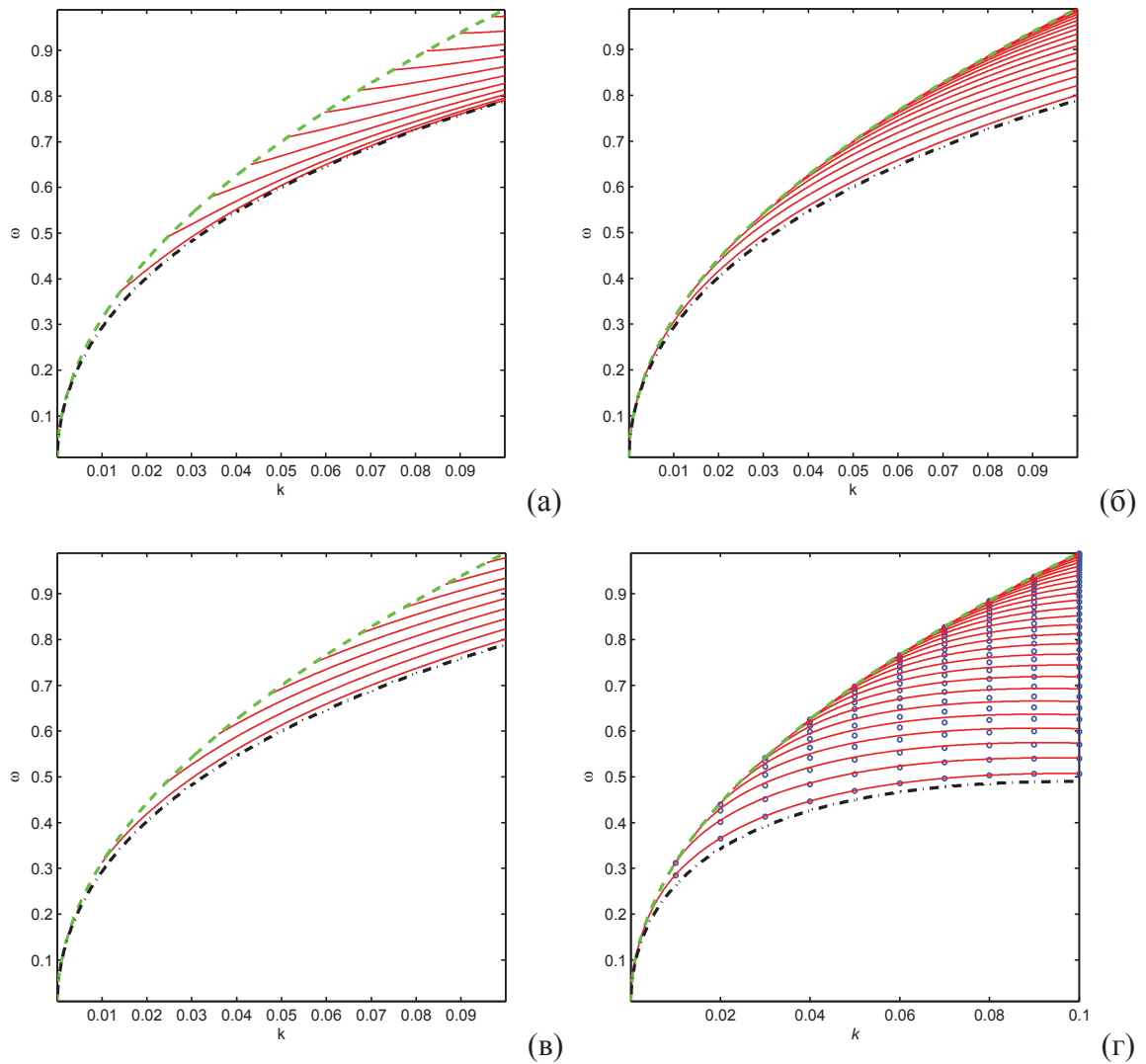


Рис. 5.2.1. Дисперсионные зависимости  $\omega(k)$  (в рад/с и рад/м) для захваченных волн на течениях: П-образного профиля (в пределе решения для «глубокой потенциальной ямы») (а), профиля  $sech^2$  (5.2.48) (б) и параболического профиля (в). Для случаев (а)-(в) максимум скорости течения 2 м/с, его ширина оценивается в 200 м. Красным построены аналитические решения задачи Штурма-Лиувилля (5.2.45), зеленым пунктиром – кривые для волн на поверхности покоящейся воды  $\omega_g(k)$ , черным штрих-пунктиром – зависимости  $\omega_g - k \max|U|$ . На панели (г) построены аналогичные зависимости для течения  $sech^2$ , но большей скорости (5 м/с) плюс дополнительно (синими кружками) – численное решение нелинейной краевой задачи (5.2.42).

Результаты, представленные на Рис. 5.2.1г, свидетельствуют об очень хорошей точности определения частот захваченных волн в рамках приближения для слабого течения. Сопоставление аналитического решения для задачи Штурма-Лиувилля (красные линии) с численным решением нелинейной краевой задачи (5.2.42) (синие кружки) дает отличный результат даже в тех случаях, когда течение замедлило волны почти вдвое.



## Сопоставление решений для захваченных мод в рамках различных краевых задач

Итак, выше сформулированы следующие системы уравнений, составляющие краевые задачи на нахождение мод захваченных волн на течении:

- полная двумерная проблема (5.2.17)-(5.2.19) или (5.2.32)-(5.2.34) (плюс соответствующие граничные условия);
- приближенная одномерная нелинейная проблема (5.2.42)- (5.2.43);
- приближенная одномерная классическая проблема Штурма-Лиувилля (5.2.45), (5.2.43).

Поскольку при получении одномерных формулировок были сделаны предположения, явно не подтвержденные, и оценки точности полученных решений не очевидны, здесь мы сопоставим результаты решений краевых задач для модельных случаев. Исходную двумерную проблему (5.2.17)-(5.2.19) мы решаем как возмущение уравнения Гельмгольца (левая часть (5.2.25)) с соответствующими граничными условиями на дне и поверхности. Возвращаясь к формулировке в терминах вертикальной скорости  $\hat{w}$  (см. (5.2.27)), решение ищется в виде ряда по малому параметру  $\rho = O(\gamma \mu^2) \ll 1$ :

$$\hat{w} = \hat{w}^{(0)} + \rho \hat{w}^{(1)} + \dots, \quad \omega = \omega^{(0)} + \rho \omega^{(1)} + \dots, \quad (5.2.54)$$

и проблема в первом порядке представима уравнениями

$$\frac{\partial^2 \hat{w}^{(0)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}^{(0)}}{\partial y^2} - k^2 \hat{w}^{(0)} = 0 \quad \text{при} \quad z \leq 0, \quad (5.2.55)$$

$$\Omega^{(0)2} \hat{w}^{(0)} = g \frac{\partial \hat{w}^{(0)}}{\partial z} \quad \text{при} \quad z = 0, \quad \Omega^{(0)} = \omega^{(0)} - kU, \quad (5.2.56)$$

Таблица 5.2.1. Относительные отличия решения приближенных одномерных краевых задач по отношению к решению двумерной проблемы.

$k$ , рад/м	мода $n + 1$	Максимальное отличие, %		Среднеквадратичное отличие относительно $\hat{w}_\rho$ , %		Отличие частоты, %	
		$ \hat{w}_\rho - \hat{w}_\gamma $	$ \hat{w}_\rho - \hat{w}_\mu $	$\hat{w}_\rho - \hat{w}_\gamma$	$\hat{w}_\rho - \hat{w}_\mu$	$\omega_\rho - \omega_\gamma$	$\omega_\rho - \omega_\mu$
0.06	1	5.0	5.1	5.9	5.3	0.09	0.2
0.06	5	27	13	22	8.9	-1.9	0.06
0.06	15	147	23	150	15	-1.2	-0.008
0.1	1	3.4	4.5	3.3	3.3	0.06	0.1
0.1	5	19	9.2	16	6.7	-1.5	0.07
0.1	15	134	21	121	13	-5.1	0.01

$$\hat{w}^{(0)} \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty. \quad (5.2.57)$$

Функция  $\hat{w}(y, z)$  раскладывается в ряд Фурье по горизонтальной координате и, совместно с

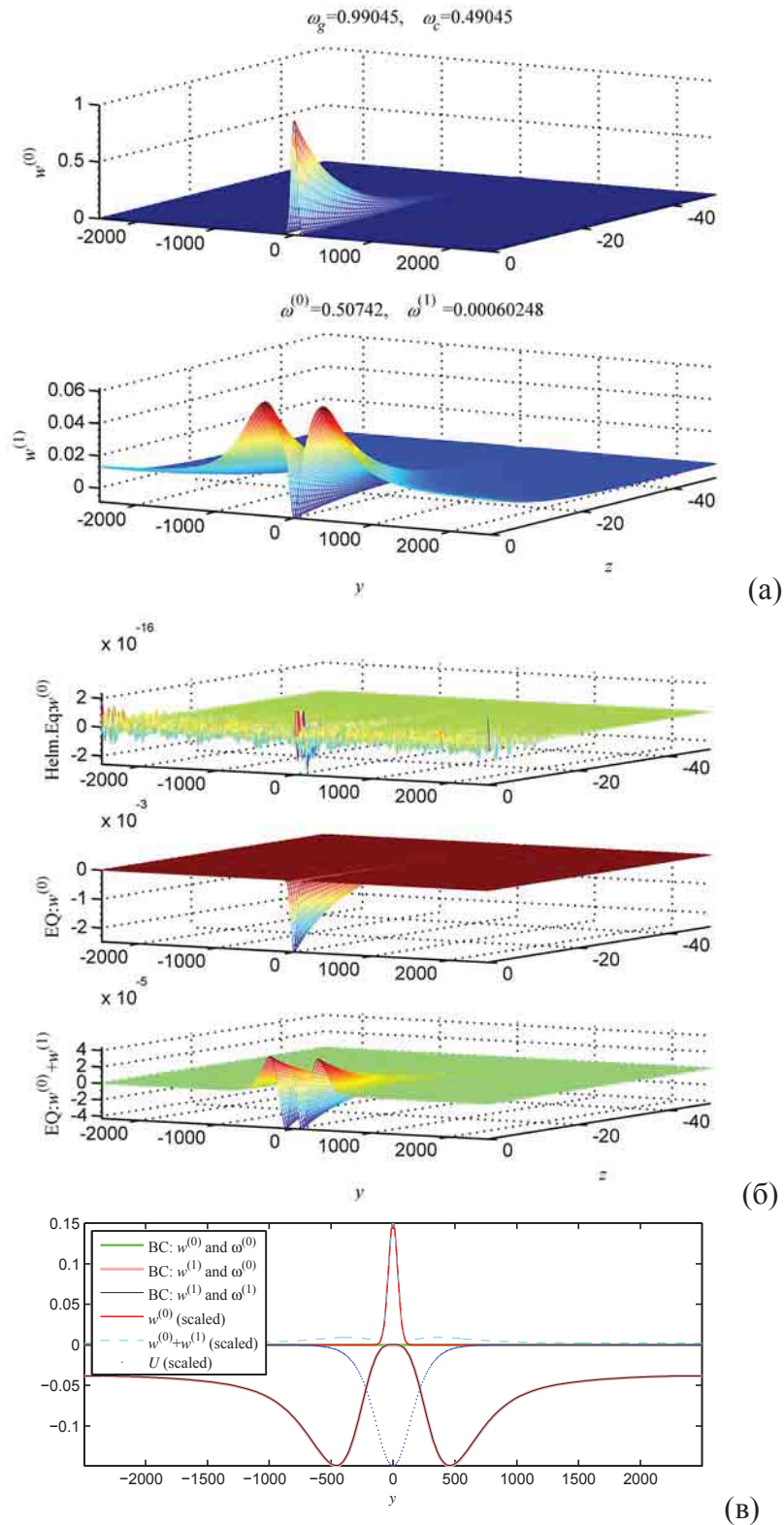


Рис. 5.2.2. Численное решение двумерной граничной задачи для  $k = 0.1$  рад/м, фундаментальная мода  $n = 0$ : структура моды (а), невязка уравнений в толще воды (б) и невязка граничного условия на поверхности (в).

граничными условиями, формулируется система линейных уравнений на коэффициенты мод Фурье. Условие ее совместности (обнуление дискриминанта системы уравнений) определяет собственные значения  $\omega$  (см. детали в [Shrira & Slunyaev, 2013\*]). Полученные решения  $\hat{w}^{(0)}(y, z)$  и  $\omega^{(0)}$  удовлетворяют системе (5.2.55)-(5.2.57) с машинной точностью.

Уточнение решения производится с учетом следующего порядка решения, для чего решается неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение, получающееся из

$$\frac{\partial^2 \hat{w}^{(1)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}^{(1)}}{\partial y^2} - k^2 \hat{w}^{(1)} = -\left(\frac{\Omega''}{\Omega} - 2\frac{\Omega'^2}{\Omega^2}\right) \hat{w}^{(0)} \quad (5.2.58)$$

после применения преобразования Фурье по  $y$ . В (5.2.58) зависимость от  $z$  рассматривается как параметрическая. Так как поправка к решению нарушает выполнение граничного условия, то в схему вводится поправка к собственной частоте  $\omega^{(1)}$ ,

$$\Omega^{(0)2} \hat{w}^{(1)} + 2\Omega^{(0)} \omega^{(1)} \hat{w}^{(0)} = g \frac{\partial \hat{w}^{(1)}}{\partial z} \quad \text{при } z = 0, \quad (5.2.59)$$

которая находится в интегральном смысле после свертки равенства (5.2.59) с уже найденной функцией  $\hat{w}^{(0)}(y, 0)$ :

$$\omega^{(1)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left( g \frac{\partial \hat{w}^{(1)}}{\partial z} - \Omega^{(0)2} \hat{w}^{(1)} \right) \frac{\hat{w}^{(0)}}{2\Omega^{(0)}} dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \hat{w}^{(0)2} dy} \Bigg|_{z=0} \quad (5.2.60)$$

Нами рассмотрен случай течения (5.2.48) для параметров  $U_0 = -5$  м/с,  $L = 200$  м и двух длин волн, характеризуемых  $k = 0.06$  рад/м и  $k = 0.1$  рад/м, что дает оценки параметров  $\gamma = 0.4$   $\mu = 0.08$  и  $\gamma = 0.5$   $\mu = 0.05$  соответственно. Этот пример представляется довольно экстремальным: для длин волн  $\sim 2\pi/k \approx 63$  м течение довольно узкое, а также очень сильное, если оценивать фазовую скорость как для волн на поверхности спокойной воды  $\sim (g/k)^{1/2} \approx 10$  м/с.

Примеры численного решения двумерной краевой задачи приведены на Рис. 5.2.2-5.2.4 для трех разных мод  $n = 0, 4, 14$  для случая более коротких волн  $k = 0.1$  рад/м. Всего для этих условий обнаружено 35 локализованных мод. На панелях (а) построены решения для уравнений Гельмгольца  $\hat{w}^{(0)}$  и первые поправки к решению  $\hat{w}^{(1)}$ , а также приведены значения частот (в рад/с):  $\omega_g = (kg)^{1/2}$ ,  $\omega_c = \omega_g + kU_0$ ,  $\omega^{(0)}$  и  $\omega^{(1)}$ . Мода нормирована на максимум амплитуды. Видно, что поправка к первому приближению моды имеет сложную структуру, локализована вблизи струи течения и прижата к поверхности.

На панелях (б) приведены невязки уравнений  $EQ$  в толще воды, верхняя поверхность - для решения уравнения Гельмгольца

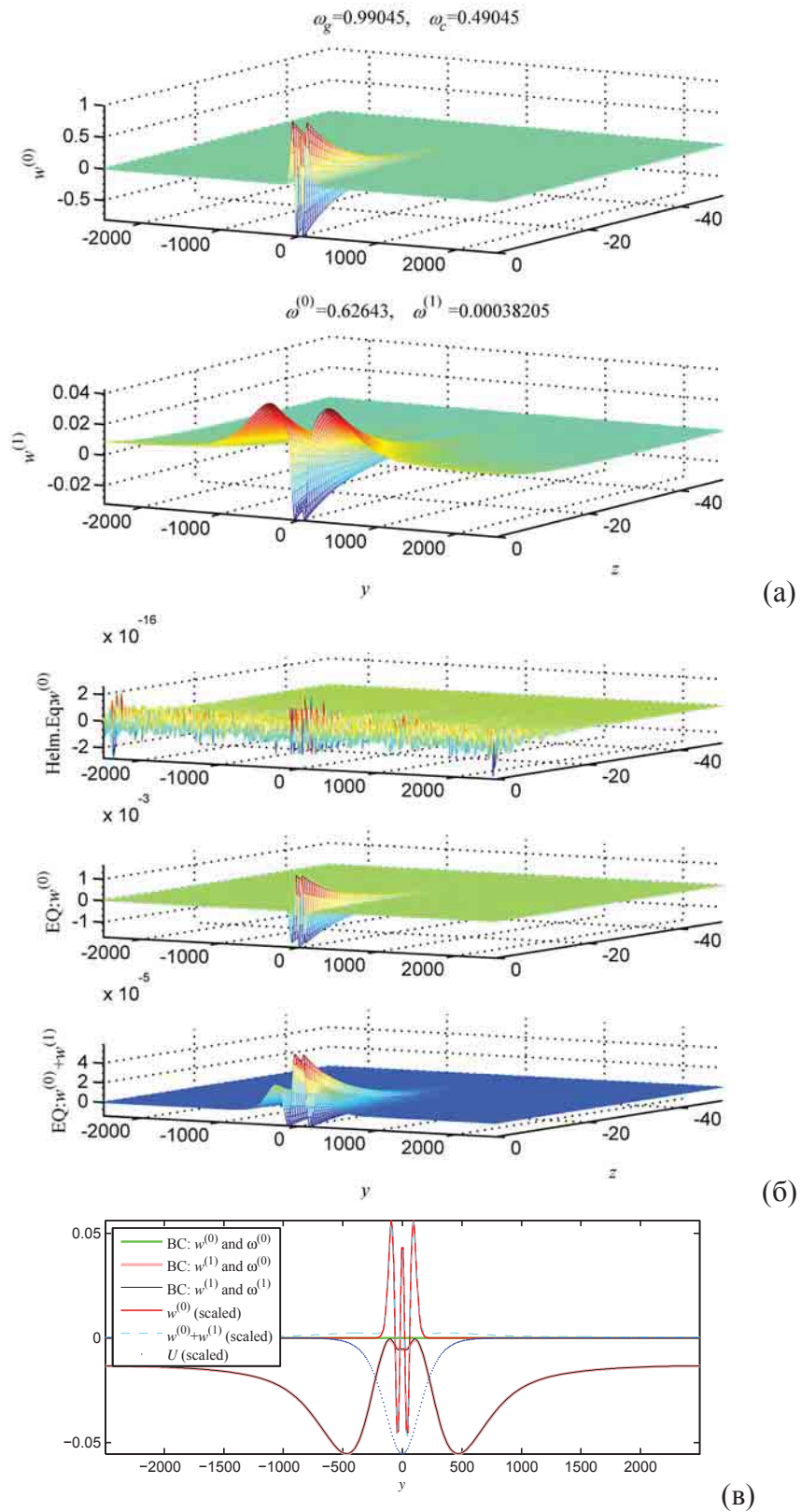


Рис. 5.2.3. Численное решение двумерной граничной задачи для  $k = 0.1$  рад/м, мода  $n = 4$ : структура моды (а), невязка уравнений в толще воды (б) и невязка граничного условия на поверхности (в).

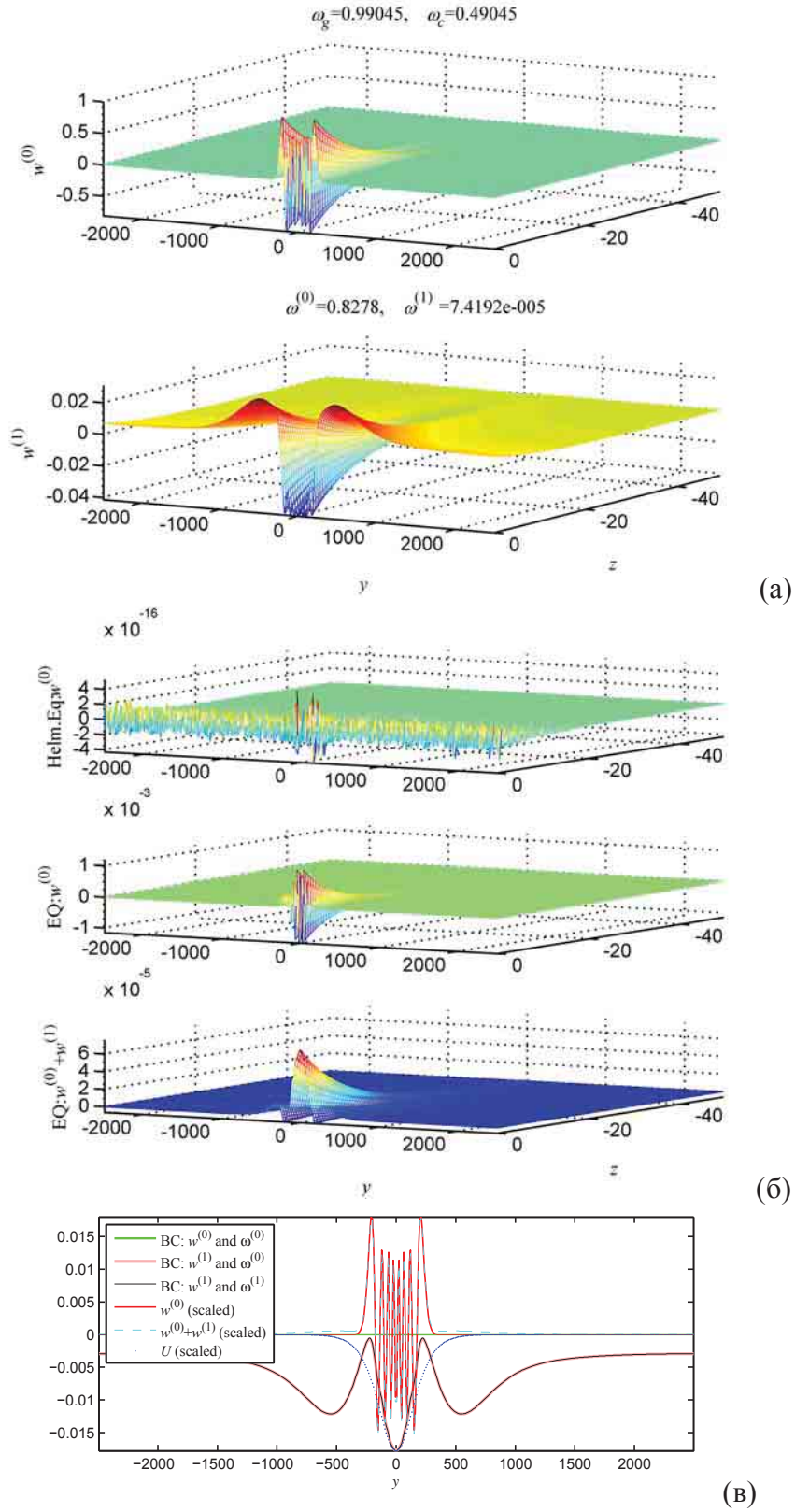


Рис. 5.2.4. Численное решение двумерной граничной задачи для  $k = 0.1$  рад/м, мода  $n = 14$ : структура моды (а), невязка уравнений в толще воды (б) и невязка граничного условия на поверхности (в).

$$k^2 EQ\hat{w}^{(0)} = \frac{\partial^2 \hat{w}^{(0)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}^{(0)}}{\partial y^2} - k^2 \hat{w}^{(0)} \quad (5.2.61)$$

и две поверхности ниже – для полного уравнения

$$k^2 EQ\hat{w} = \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} + \left( \frac{\Omega''}{\Omega} - 2 \frac{\Omega'^2}{\Omega^2} - k^2 \right) \hat{w} \quad (5.2.62)$$

для  $\hat{w}^{(0)}$  и  $\omega^{(0)}$ ; и для  $\hat{w}^{(0)} + \hat{w}^{(1)}$  и  $\omega^{(0)} + \omega^{(1)}$ . Как уже отмечалось, проблема (5.2.55)-(5.2.57) решается с отличной точностью, и первая невязка очень мала. Невязка исходных уравнений в толще воды составляет порядка  $10^{-3}$  для первого приближения и  $10^{-5}$  для улучшенного решения (по максимуму значения). Невязки локализованы вблизи максимума течения у поверхности.

Рисунки на панелях (в) демонстрирует степень выполнения граничного условия на поверхности  $BC$

$$BC\hat{w} = \hat{w} - \frac{g}{\Omega^2} \frac{\partial \hat{w}}{\partial z}. \quad (5.2.63)$$

Для решения  $\hat{w}^{(0)}$  и  $\omega^{(0)}$  оно выполняется идеально; для  $\hat{w}^{(1)}$  и  $\omega^{(1)}$  расхождение достигает порядка  $10^{-3}$  и совсем немного улучшается после учета поправки по частоте  $\hat{w}^{(1)}$  и  $\omega^{(1)}$ . Большая часть невязки поверхностного граничного условия локализована на периферии моды в соответствии с интегральным характером определения поправки  $\omega^{(1)}$ .

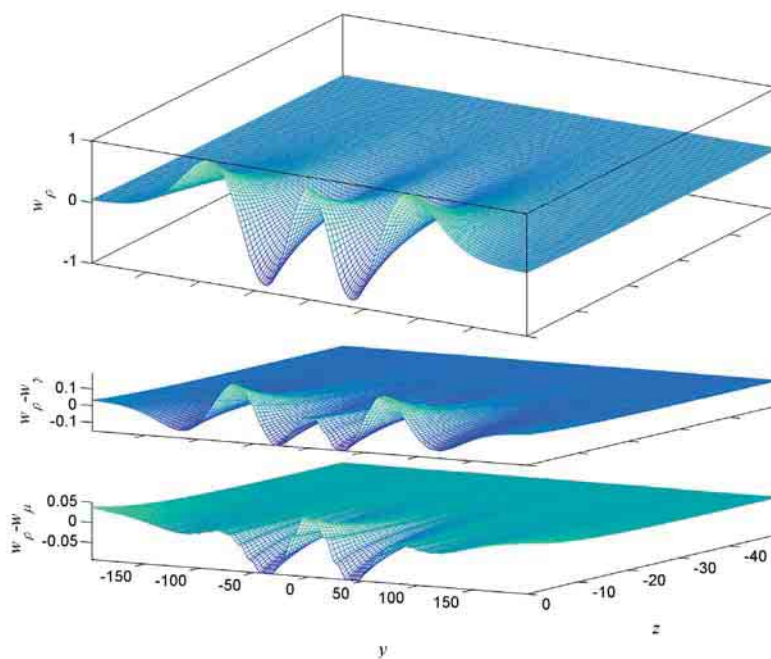
Для более высокого номера моды их горизонтальная структура становится более сложной, но характерные величины максимальных погрешностей не изменяются заметно. Полученные таким образом решения  $\hat{w}^{(1)}$  и  $\omega^{(1)}$  в дальнейшем нами используются для сравнения с решением приближенных одномерных краевых задач. Нелинейная краевая задача (5.2.42)- (5.2.43) решалась численно методом пристрелки, а для задачи Штурма-Лиувилля (5.2.45), (5.2.43) с выбранным потенциалом (5.2.48) известно точное решение (см. детали в [Shrira & Slunyaev, 2013\*]), горизонтальная структура мод описывается функциями Лежандра. Поскольку каждое из рассматриваемых решений является приближенным и использует малость параметров:  $\rho = O(\gamma \mu^2)$  для решения двумерной проблемы,  $\mu$  (без обязательного использования малости  $\gamma$ ) для нелинейной одномерной краевой задачи и  $\gamma$  для получения задачи Штурма-Лиувилля, то мы будем использовать эти индексы для маркировки соответствующих решений.

Для ситуации  $k=0.1$  рад/м, рассмотренной на Рис. 5.2.2-5.2.4, нелинейная краевая задача и Штурма-Лиувилля дали 34 и 28 захваченных мод соответственно; для более длинных волн  $k=0.06$  рад/м решение двумерной задачи дало 19 мод, решение одномерной нелинейной проблемы – 18 мод и решение проблемы Штурма-Лиувилля – 15 мод.

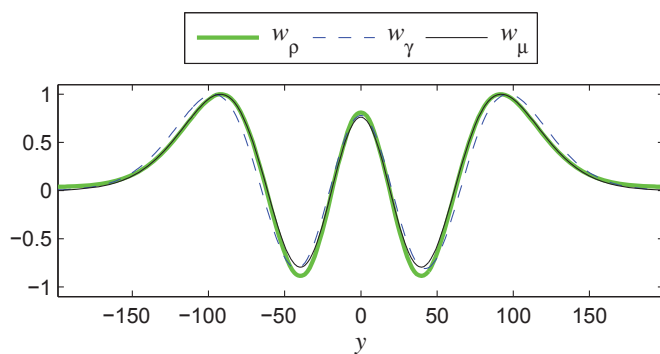
На Рис. 5.2.5 и 5.2.6 показаны результаты сравнения трехмерных профилей мод и срезов на поверхности для случаев  $n=4$  и  $n=14$  соответственно. Для фундаментальной моды  $n=0$  все решения близки между собой с хорошей точностью. Численные характеристики

погрешности решения одномерных краевых задач по отношению к решению двумерной задачи приведены в Табл. 5.2.1.

Из приведенных рисунков и данных Табл. 5.2.1 видно, что одномерные краевые задачи способны хорошо описывать моды захваченных волн (особенно значения собственных частот) даже в случае интенсивного и относительно узкого течения. Большие погрешности в описании моды в рамках задачи Штурма-Лиувилля связаны, по всей видимости, в первую очередь с растяжением решения вдоль поперечной горизонтальной координаты, как хорошо видно на Рис. 5.2.6б. На Рис. 5.2.5, 5.2.6 и в Табл. 5.2.1 используется решение двумерной краевой задачи с учетом первых двух членов разложений (5.2.54). В нашей работе [Shrira & Slunyaev, 2013\*] аналогичное сравнение приведено с использованием только первых членов разложений (5.2.54), в том случае совпадение с решениями одномерных краевых задач оказывается еще лучше. Поправка к решению  $\hat{w}^{(1)}$  делает

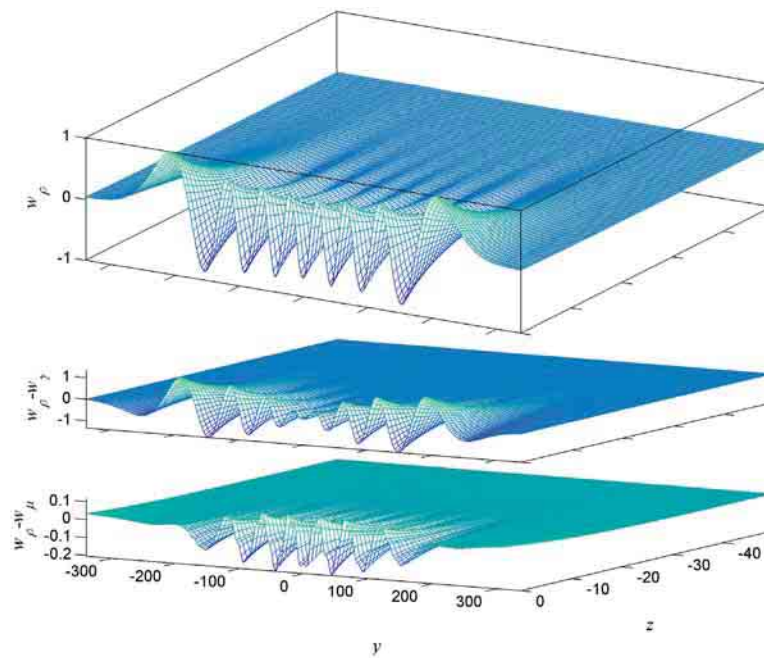


(а)

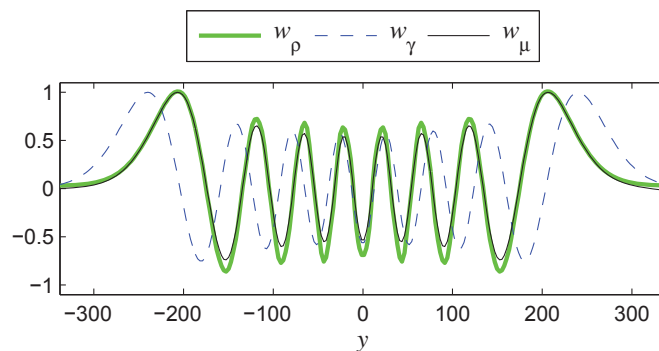


(б)

Рис. 5.2.5. Сопоставление мод с  $n = 4$ , полученных решением двумерной краевой задачи и приближенных одномерных краевых задач: трехмерные профили (а) и зависимости на поверхности (б).



(a)



(б)

Рис. 5.2.6. Сопоставление мод  $n = 14$ , полученных решением двумерной краевой задачи и приближенных одномерных краевых задач: трехмерные профили (а) и зависимости на поверхности (б).

профиль моды более сложным по форме на периферии (см. голубой пунктир на Рис. 5.2.2в), что не наблюдается в решениях одномерных задач и, может быть, является следствием усечения асимптотического ряда (5.2.24). Нелинейная одномерная граничная задача описывает собственные частоты захваченных волн с точностью в доли процента, а профиль моды – с точностью  $\sim 1-10\%$ , и потому является очень удобной альтернативой исходной трудно решаемой двумерной краевой задаче.

### Оценки для океанических течений

Саму идею о наличии захваченных волн в реальных океанических течениях трудно назвать новой, она обсуждается как минимум 40 последних лет, преимущественно в рамках лучевого подхода [Kenyon, 1971; Peregrine, 1976; Басович и Таланов, 1977]. Имеются существенно более свежие наблюдения, подтверждающие эти ожидания [Kudryavtsev et al, 1995]. Наш подход опирается на медленность или слабость изменения захваченных волн по



мере их движения в горизонтально неоднородном поле струйного течения, которые выражаются в малости параметров  $\mu$  или  $\gamma$ . Подчеркнем, что в контексте ветровых волн и волн зыби с характерными длинами  $\sim 10^2$  м и скоростями  $\sim 10^1$  м/с все течения в море – слабые, и большинство течений – широкие.

Случай течения мыса Игольного (по имени мыса Игольного, расположенного к юго-востоку от мыса Доброй Надежды) наиболее употребляемый в контексте «волн-убийц» на течениях, потому проанализируем его более подробно. Это течение распространяется вдоль континентального склона юго-восточной Африки от Мапуту до самого южного мыса Африки (Cape Agulhas), см. Рис. 1.2.3а. Подробное описание течения содержится в книге [Lutjeharms, 2006]. Резкий свал глубин на большом расстоянии вдоль берега помогает течению распространяться практически параллельно без меандрирования, оставаясь в значительной степени однородным, что особенно актуально для развиваемой нами теории. Поперечный срез течения и батиметрия вблизи Дурбана на широте  $30^\circ$ ЮШ представлены на Рис. 5.1.1а по интерполированным данным из [Toole & Raymer, 1985]. Другой срез течения дан на Рис.5.1.1б (воспроизведен из [Lutjeharms, 2006]). Вертикальный сдвиг профиля течения относительно мал,  $\partial U/\partial z \sim 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ , что может условно извинить полное пренебрежение им в рамках развиваемой в этой главе теории. Основная струя течения расположена в глубоководной области, так что использованное нами приближение глубокой

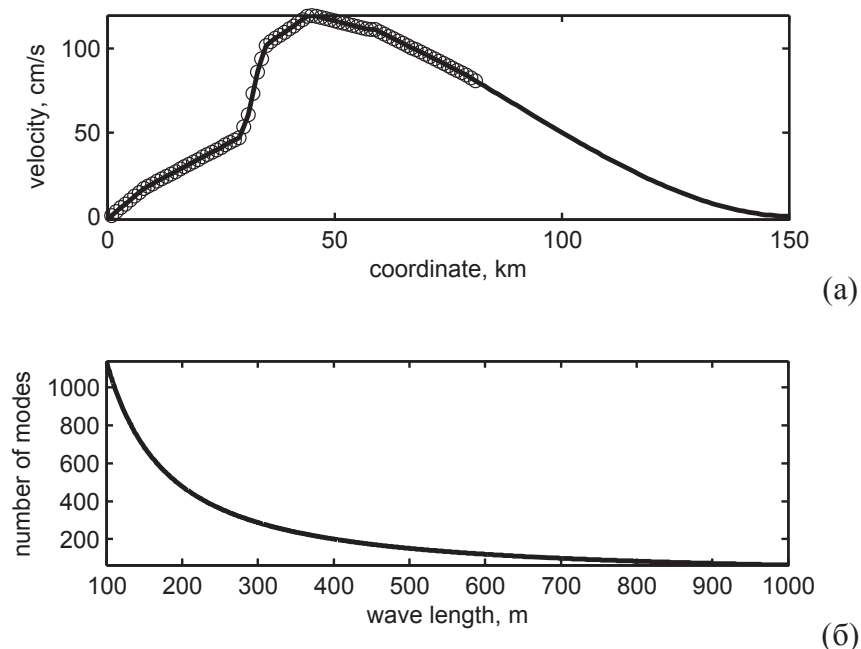


Рис. 5.2.7. (а): Поперечное распределение скорости в течении мыса Игольного на глубине 20 м (кружки отмечают данные по работе [Toole & Raymer, 1985], линия – результат экстраполяции). (б): Число мод захваченных волн в зависимости от продольной длины волны (в метрах).

воды адекватно для этих условий.

Течение мыса Игольного подвержено существенным годовым и сезонным вариациям, по разным данным его максимальная скорость варьируется в интервале 1.2–3 м/с [Mallory, 1974; Toole & Raymer, 1985; Larenov, 1998; Lutjeharms, 2006]. Также иногда отмечается наличие узкого противотечения в мелководной части (оно хорошо видно на Рис. 5.1.16). Здесь нами будет использован профиль на глубине 20 м по данным [Toole & Raymer, 1985], изображенный на Рис. 5.2.7а, с максимальным значением 1.2 м/с.

Число мод захваченных волн для течения, изображенного на Рис. 5.2.7а, оценено по формуле (5.2.50) и построено на Рис. 5.2.7б как функция от продольной (вдоль течения) длины волны. Течение может поддерживать большое число захваченных мод: от  $\sim 10^2$  для волн зыби до  $\sim 10^3$  для ветровых волн. Противотечение способно удерживать от единиц до десятков мод захваченных волн. Оценивая относительный Доплеровский сдвиг для длинных волн зыби (период 17 с, длина 450 м, фазовая скорость 27 м/с, около 200 захваченных мод) как  $U_{max}/C_{ph} \approx 0.05$ , получаем, что для 200 мод относительная разница между близкими частотами захваченных волн очень мала:  $|\omega_{n+1} - \omega_n|/\omega_n \sim 2 \cdot 10^{-4}$ .

Нам не известны публикации с прямой регистрацией захваченных волн на течении мыса Игольного, хотя имеются спутниковые SAR измерения, допускающие такую интерпретацию [Irvine & Tilley, 1988]. Захваченные волны наблюдались на Гольфстриме [Kudryavtsev et al, 1995] в менее благоприятных условиях. При этом значительная высота волн в области максимума течения в 2–3 раза превышала высоту волн вне течения, на волнах наблюдались барашки, несмотря на ослабевший ветер.

Также интересными с точки зрения наблюдения захваченных волн могут быть зональные течения (такие как антарктическое циркумполярное течение), наиболее вероятно – их отдельные струи; отбойные течения, вдольбереговые течения. Подытоживая, можно сформулировать, что типичные океанические течения могут поддерживать большое количество мод захваченных волн ( $\sim 10^2 - 10^3$ ); захваченные волны на крупных океанических течениях наблюдались посредством прямых, а также дистанционных измерений. Прямое наблюдение модовой структуры захваченных волн, а именно, дискретный частотный спектр волн, соответствующий разбивке на моды, и сохранение амплитуд мод во времени обсуждается нами далее в Разделе 5.5 на материале численного моделирования потенциальных уравнений Эйлера для волн на встречном струйном течении.

### **5.3 Нелинейная теория для 3-волновых взаимодействий захваченных мод**

Развитая в Разделе 5.2 модовая теория волн на встречных струйных течениях – линейная. Последовательный учет нелинейности волн с помощью классической асимптотической процедуры получения эволюционных уравнений является, на наш взгляд, одним из главных достоинств модового подхода. Для волн на глубокой воде естественным является развитие модели для огибающей волн. Нелинейное уравнение Шредингера для волн на неоднородных течениях ранее выводилось неоднократно. Эффекты завихренности при выводе этих уравнений, требующие выхода за рамки потенциального приближения, стали учитываться лишь недавно. В частности, они оказались слишком малы, чтобы повлиять на итоговую форму записи двумерного НУШ в работе [Hjelmervik & Trulsen, 2009]; одномерные версии НУШ для завихренности в результате течения с постоянным вертикальным сдвигом обсуждались в [Thomas et al, 2012].

В этом разделе нами развивается нелинейная теория для мод захваченных волн на встречном струйном течении, учитывающая завихренность движений жидкости. Более удобным оказывается вывод эволюционных уравнений для переменной давления, которая теперь будет дополнительно предполагаться медленной функцией продольной координаты и времени. Наличие неоднородного течения приводит к возможности выполнения резонансных условий между тройками захваченных мод. В наших работах [Ezersky et al, 2009\* ; Slunyaev et al, 2009\*] было обнаружено, что при достаточной степени нелинейности трехволновые взаимодействия между встречными волнами на достаточно мелкой воде могут приводить к быстрому нарастанию модуляций кноидальных волн. Напомним, что для волн на глубокой воде трехволновые резонансы запрещены, нелинейная волновая динамика в основном определяется 4-волновыми резонансами (точными и приближенными), а 3-волновые процессы лишь изменяют профиль волны. Таким образом, обсуждаемые в этом разделе нелинейные эффекты, являются новыми для теории нелинейных волн на глубокой воде, они потенциально более сильные и более быстрые, чем «обычные» нелинейные процессы, проходящие в результате 4-волновых нелинейных взаимодействий.

#### **Условия выполнения резонансных соотношений для троек захваченных мод**

Согласно модовому представлению, развитому в Разделе 5.2, каждая мода захваченных волн характеризуется продольным волновым числом  $k$  и частотой  $\omega$ . Одному значению  $k$  может соответствовать несколько частот захваченных мод, и наоборот – одной частоте  $\omega$  могут соответствовать несколько значений продольных волновых чисел, см.

примеры на Рис. 5.2.1 и Рис. 5.3.1. Условие нелинейного резонансного взаимодействия между тремя захваченными модами, которые без ограничения общности можно записать в виде

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0, \quad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0, \quad (5.3.1)$$

если хотя бы одно из значений волновых чисел и частот отрицательно. Форма записи (5.3.1) удобна для более компактной записи результатов, получаемых ниже. Основываясь на Рис. 5.3.1, положим в этом разделе каждое из значений  $k_1 > 0$ ,  $k_2 < 0$ ,  $k_3 > 0$  и  $\omega_1 > 0$ ,  $\omega_2 < 0$ ,  $\omega_3 > 0$ ; нижние индексы нумеруют участвующие во взаимодействии моды. На Рис. 5.3.1а воспроизведено дисперсионное соотношение для течения с профилем  $\text{sech}^2$  (Рис. 5.2.1б) и показано стрелками, как могут выполняться резонансные условия (5.3.1). Будут рассматриваться только захваченные волны, потому можно ограничиться одним квадрантом на плоскости  $(k, \omega)$ . Рис. 5.3.1а соответствует довольно слабому течению, когда приближенная краевая задача Штурма-Лиувилля (5.2.45) дает очень точное описание частот захваченных мод формулой (5.2.49). Одна из волн на Рис. 5.3.1а обладает значительно меньшим волновым числом  $k_3$  и частотой  $\omega_3$ . Как обсуждалось в Разделе 5.3, для существования хотя бы одной захваченной моды должно выполняться условие (5.2.47), так что длинноволновая мода захваченных волн всегда найдется.

Можно выделить другой случай достаточно сильного течения, как показано на Рис. 5.3.1б и тогда все участвующие во взаимодействии моды обладают сопоставимыми продольными волновыми числами и частотами. При этом частоты волн должны сильно отличаться от свободных гравитационных волн. Из геометрического представления на Рис. 5.3.1б легко оценить параметры волн при таком взаимодействии. Тройка взаимодействующих мод составлена двумя модами  $(k_1, \omega_1) = (k_3, \omega_3)$  и одной модой  $(-k_2, -\omega_2) = (2k_1, 2\omega_1)$ , которые для заданного волнового числа  $k > 0$  заключены в интервале  $[\omega_g - k \max|U|, \omega_g]$ , где  $\omega_g = \sqrt{gk}$ . Потому для оценки полагаем  $\omega_1 = \omega_g - k_1 \max|U|$ ,  $\omega_2 = -\sqrt{-gk_2}$ , и резонансное условие (5.3.1) приводит к условию на интенсивность течения:

$$\max|U| = \sqrt{\frac{g}{k_1}} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx 0.3 \sqrt{\frac{g}{k_1}}, \quad (5.3.2)$$

то есть скорость течения должна составлять как минимум треть от фазовой скорости более длинных волн 1 и 3.

Рассмотрим случай слабого течения (Рис. 5.3.1а) более подробно. Предполагая отклонение частоты захваченных волн  $\omega_i$  от значения для свободных волн  $\omega_g$  малым,

$$\delta_i = \frac{\omega_g - |\omega_i|}{\omega_g} \ll 1, \quad (5.3.3)$$

можно записать приближенное дисперсионное соотношение в виде (модули здесь возникают для учета специфического выбора знаков волновых чисел и частот)

$$|\omega_i(k_i)| \approx \sqrt{g|k_i|}(1 - \delta_i), \quad \delta_i \ll 1, \quad (5.3.4)$$

причем  $\delta_i = O(\gamma)$ . Используя (5.3.4) и разность масштабов волн,  $k_3 \ll k_1$ ,  $|k_2|$  и  $k_1 \sim k_2$ , из условия резонанса (5.3.1) следует

$$\delta_2 \approx \delta_1 - \sqrt{\frac{k_3}{k_1}}, \quad (5.3.5)$$

откуда получаем соотношение на масштабы волн в терминах интенсивности течения,  $k_3/k_1 = O(\gamma^2)$ . Таким образом, длинноволновая компонента 3 характеризуется продольным волновым числом  $k_3 \sim \gamma^2 k_1$  и частотой  $\omega_3 \sim \gamma \omega_1$ .

Для примера течения с профилем  $sech^2$ , проиллюстрированного на Рис. 5.3.1а, для явного определения условий возникновения резонансного взаимодействия между тремя модами можно использовать точное решение (5.2.49) приближенной краевой задачи (5.2.45), справедливое во всем диапазоне длин волн (при соблюдении условий вывода (5.2.45)).

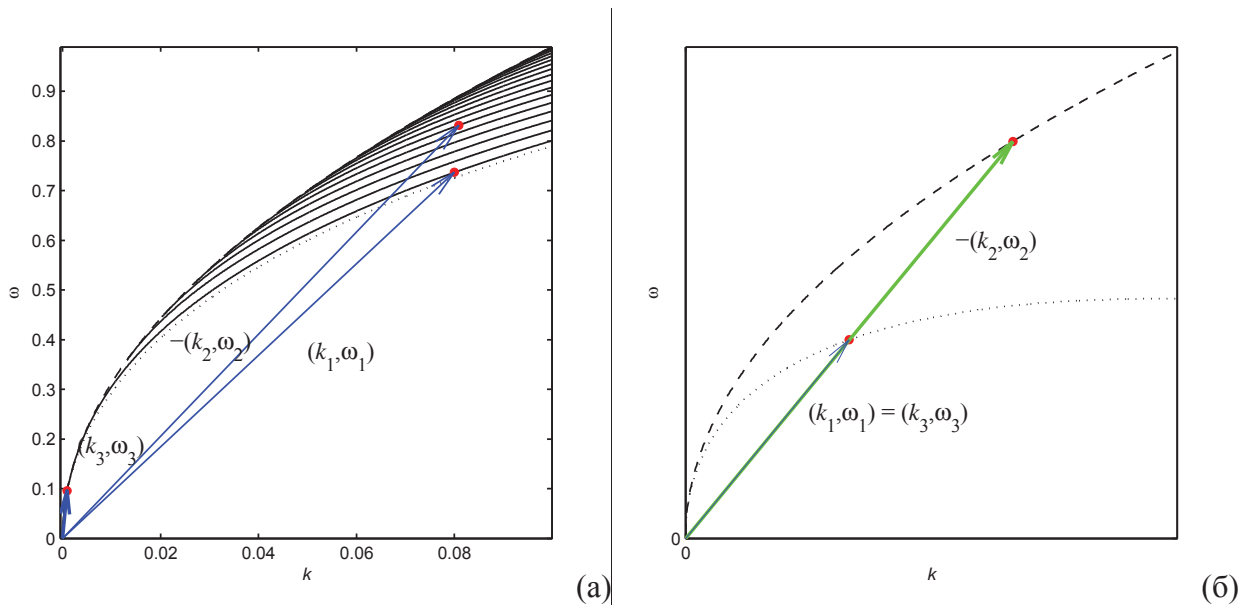


Рис. 5.3.1. (а): Дисперсионные кривые для захваченных мод на течении с профилем  $sech^2$ , максимальной скоростью 2 м/с и характерной шириной 200 м (совпадает с Рис. 5.2.1б) и иллюстрация тройки взаимодействующих мод, одна из которых длинноволновая. (б): Иллюстрация более сильного течения, когда возможно нелинейное резонансное взаимодействие между модами с продольными волновыми числами сопоставимых величин.

Полагаем; для длинноволновой моды существует только одна мода, потому в решении (5.2.49)  $n_3 = 0$ . Также предполагаем общее число захваченных мод для  $k_1$  и  $k_2$ ,  $k_1 \sim k_2 = O(1)$  большим,  $N_{tr} \gg 1$  ( $N_{tr} \sim \sqrt{\gamma} / \mu$ ). После подстановки в (5.3.5), результат сначала раскладываем по малому параметру  $1/N_{tr}$ , удерживая два первых члена разложения. Затем используем разложение в ряд по малому  $\gamma$ , одновременно предполагая, что номер моды 1 низкий,  $n_1 \sim 1$ , а номер моды 2 наоборот высокий,  $n_2 \sim N_{tr}$  (см. Рис. 5.3.1a). В итоге получаем соотношение на продольное волновое число для длинной моды  $k_3$ :

$$\frac{k_3}{k_1} = n_2^2 \left( \frac{\sqrt{-\frac{16k_1^3 U_0 L^2}{\sqrt{k_1 g}} - n_2}}{4k_1^2 L^2} \right)^2 = O(\gamma^2), \quad U_0 < 0. \quad (5.3.6)$$

Таким образом, нелинейные резонансные взаимодействия между тройками мод захваченных волн разрешены всегда. В случае течения малой интенсивности одна из мод, участвующих во взаимодействии, очень длинная. При усилении течения продольные длины взаимодействующих мод становятся сопоставимыми.

### Асимптотическая теория для нелинейных взаимодействий троек захваченных мод

Рассматриваемые далее эффекты динамики мод предполагают, что все временные и пространственные масштабы эволюции мод существенно больше, чем масштабы установления моды. Здесь мы будем выводить эволюционные уравнения только для одной триады мод, предполагая возможность описания общего случая суперпозицией таких троек.

Развиваемая асимптотическая теория в целом схожа с приведенной в Разделе 2.2, но не использует предположение о потенциальности движения волн. Смещение поверхности и орбитальные скорости будут предполагаться малыми, но конечными, характеризуемыми малым параметром  $\varepsilon$ :  $k\eta = O(\varepsilon)$ ,  $|\bar{v}|/C_{ph} = O(\varepsilon)$ . Динамическое условие на поверхности (5.2.4) и компоненты кинематического условия (5.2.5) раскладываются в ряд Тейлора вблизи невозмущенной поверхности  $z = 0$  по малому параметру  $\varepsilon$ . Решение ищется в форме асимптотических разложений

$$\begin{aligned} P(x, y, z, t) &= -gz + \varepsilon p^{(1)} + \varepsilon^2 p^{(2)} + \dots, \\ u(x, y, z, t) &= \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \dots, \\ v(x, y, z, t) &= \varepsilon v^{(1)} + \varepsilon^2 v^{(2)} + \dots, \\ w(x, y, z, t) &= \varepsilon w^{(1)} + \varepsilon^2 w^{(2)} + \dots, \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

$$\eta(x, y, t) = \varepsilon \eta^{(1)} + \varepsilon^2 \eta^{(2)} + \dots$$

Медленные время  $t_1$  и координата  $x_1$  вводятся следующим образом

$$t \rightarrow t_0 + \varepsilon t_1, \quad x \rightarrow x_0 + \varepsilon x_1, \quad (5.3.8)$$

Нами будет предполагаться выполнение условий для приближенного разделения переменных, когда линейная краевая задача на одну захваченную моду (5.2.32)-(5.2.34) (плюс спадающие условия при  $y \rightarrow \pm\infty$ ) может быть сведена к одномерной задаче (5.2.42). Для определенности будем предполагать течение широким по сравнению с продольной длиной волны,  $dU/dy = O(\mu)$ ,  $\mu \ll 1$ . Учтем это, введя медленную поперечную координату  $y_1$ :

$$y \rightarrow y_0 + \mu y_1 \quad (5.3.9)$$

и положив  $U = U(y_1)$ . Далее будут выведены эволюционные уравнения в порядке  $O(\varepsilon^2)$  при предположении следующего соотношения малых параметров:  $\varepsilon \sim \mu$ .

Для удобства слежения за ролью непотенциальных эффектов будет использовано соотношение

$$(\bar{a}, \nabla) \bar{a} = \frac{1}{2} \nabla \bar{a}^2 - \bar{a} \times \text{rot} \bar{a}, \quad (5.3.10)$$

[Ландау и Лифшиц, 1988] которое позволяет разделить уравнения Эйлера (5.2.1) на "потенциальную" и "завихренную" части при помощи константы  $r$ , которая может принимать значения 0 или 1:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + r(\bar{U} + \bar{v}, \nabla)(\bar{U} + \bar{v}) + (1-r) \frac{1}{2} \nabla(\bar{U} + \bar{v})^2 + \nabla P = \bar{g}. \quad (5.3.11)$$

Когда маркер  $r$  равен нулю, выражение (5.3.11) представляет собой потенциальную запись уравнений Эйлера. При  $r = 1$  уравнение (5.3.11) совпадает с (5.2.1).

Порядок  $O(\varepsilon)$ .

В первом порядке давление будет представлено в виде суперпозиции трех захваченных мод с индексами  $j = 1, 2, 3$ , характеризуемых продольными волновыми числами  $k_j$  и соответствующими частотами  $\omega_j$ , а также сразу введем анзац для приближенного разделение переменных (5.2.26):

$$p^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 (P_j(x_1, t_1) e^{i\omega_j t_0 - ik_j x_0} + c.c.) Y_j(y_0) Z_j(z, y_1), \quad (5.3.12)$$

$$Z_j = \exp[zh_j(y_1)], \quad j = 1, 2, 3.$$

Горизонтальные поперечные моды  $Y_j(y_0)$  зависят от быстрой координаты  $y_0$ , в то время как вертикальная мода  $Z(z, y_1)$  допускает только медленную зависимость от поперечной координаты через пока не определенную функцию  $h_j(y_1)$ . Продольные волновые числа и

собственные частоты предполагаются удовлетворяющими резонансному условию (5.3.1).

Медленные функции  $P_j(x_1, t_1)$  описывают эволюцию амплитуд мод в терминах давления.

Уравнение Эйлера (5.3.11) определяет поле скоростей в первом приближении

$$u^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 (B_{x,j} e^{i\omega_j t_0 - ik_j x_0} + c.c.) Y_j Z_j, \quad (5.3.13)$$

$$v^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 (B_{y,j} e^{i\omega_j t_0 - ik_j x_0} + c.c.) \frac{dY_j}{dy_0} Z_j, \quad (5.3.14)$$

$$w^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 (B_{z,j} e^{i\omega_j t_0 - ik_j x_0} + c.c.) Y_j Z_j, \quad (5.3.15)$$

где

$$B_{x,j}(x_1, y_1, t_1) = \frac{k_j}{\Omega_j} P_j, \quad B_{y,j}(x_1, y_1, t_1) = \frac{i}{\Omega_j} P_j, \quad B_{z,j}(x_1, y_1, t_1) = \frac{ih_j}{\Omega_j} P_j, \\ \Omega_j(y_1) = \omega_j - k_j U. \quad (5.3.16)$$

В этих соотношениях сохранены производные моды  $Y$  по быстрой координате  $y_0$ , но производные медленных функций поперечной координаты  $U, \Omega, h$ , уже отброшены.

Условие непрерывности в этом порядке с учетом использованной подстановки решения (5.3.12) и пренебрежения второстепенными членами, как обсуждалось в Разделе 5.3, дает краевые задачи на каждую из мод, которые можно записать в операторном виде

$$\hat{L}[h_j, k_j] Y_j = 0, \quad j=1,2,3, \quad \text{где} \quad \hat{L}[h, k] Y \equiv \frac{d^2 Y}{dy_0^2} + (h^2 - k^2) Y. \quad (5.3.17)$$

Динамическое условие на поверхности дает выражение для смещения поверхности

$$\eta^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 (A_j e^{i\omega_j t_0 - ik_j x_0} + c.c.) Y_j, \quad A_j(x_1, t_1) = \frac{1}{g} P_j, \quad (5.3.18)$$

а кинематическое условие дает связи

$$\Omega_j^2 = gh_j, \quad j=1,2,3. \quad (5.3.19)$$

Эти связи необходимы для формулировки краевой задачи, представленной уравнениями (5.3.17) плюс спадающие условия на бесконечности. Видно, что по форме краевые задачи совпали с ранее обсуждавшейся одномерной нелинейной проблемой (5.2.42)-(5.2.43).

Порядок  $O(\varepsilon^2)$ .

Для следующего шага при суммировании членов рядов и для упрощения выражений учитывается выполнение резонансных условий (5.3.1). Будем рассматривать только те компоненты решения, которые соответствуют резонансным гармоникам, представимым в виде



$$p^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left( \hat{p}_j^{(2)}(x_1, y_0, y_1, t_1, z) e^{i\omega_j t_0 - ik_j x_0} + c.c. \right), \quad (5.3.20)$$

$$u^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left( \hat{u}_j^{(2)}(x_1, y_0, y_1, t_1, z) e^{i\omega_j t_0 - ik_j x_0} + c.c. \right), \quad (5.3.21)$$

$$v^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left( \hat{v}_j^{(2)}(x_1, y_0, y_1, t_1, z) e^{i\omega_j t_0 - ik_j x_0} + c.c. \right), \quad (5.3.22)$$

$$w^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left( \hat{w}_j^{(2)}(x_1, y_0, y_1, t_1, z) e^{i\omega_j t_0 - ik_j x_0} + c.c. \right), \quad (5.3.23)$$

$$\eta^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left( \hat{\eta}_j^{(2)}(x_1, y_0, y_1, t_1) e^{i\omega_j t_0 - ik_j x_0} + c.c. \right), \quad (5.3.24)$$

Динамическое условие на поверхности в этом порядке дает следующую формулу для компонент смещения, представленную в общем виде:

$$g \hat{\eta}_1^{(2)} = \hat{p}_1^{(2)} \Big|_{z=0} + \frac{\Omega_2^2 + \Omega_3^2}{4g^2} P_2^* P_3^* Y_2 Y_3, \quad \forall (1, 2, 3) \quad (5.3.25)$$

Выражения для  $\hat{\eta}_2^{(2)}$  и  $\hat{\eta}_3^{(2)}$  получаются из (5.3.25) циклическим сдвигом индексов (1, 2, 3), обозначающих номер моды в тройке. В частности, формула для  $\hat{\eta}_2^{(2)}$  получается заменой индексов (1, 2, 3) в (5.3.25) на (2, 1, 3) (или, эквивалентно, на (2, 3, 1)):

$$g \hat{\eta}_2^{(2)} = \hat{p}_2^{(2)} \Big|_{z=0} + \frac{\Omega_1^2 + \Omega_3^2}{4g^2} P_1^* P_3^* Y_1 Y_3. \quad (5.3.26)$$

Для указания такой универсальной записи будем отмечать произвольный порядок выбора индексов обозначением " $\forall(1, 2, 3)$ " (см. (5.3.25)).

Уравнения Эйлера определяют компоненты скоростей, которые записаны ниже в универсальной форме, подобно (5.3.25):

$$\hat{u}_1^{(2)} = \frac{k_1}{\Omega_1} \hat{p}_1^{(2)} + \frac{ik_1}{2\Omega_1^2} \frac{\partial P_1}{\partial t_1} Y_1 Z_1 + \frac{i\omega_1}{2\Omega_1^2} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} Y_1 Z_1 + \quad (5.3.27)$$

$$+ \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{k_1 k_2 k_3}{\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3} - \frac{k_1 \Omega_2 \Omega_3}{g^2 \Omega_1} \right) Y_2 Y_3 - \frac{k_1}{4\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3} Y_2 Y_3' \right] P_2^* P_3^* Z_2 Z_3 + r \frac{\Omega_1'}{2k_1 \Omega_1^2} P_1 Y_1 Z_1, \quad \forall (1, 2, 3),$$

$$\hat{v}_1^{(2)} = \frac{i}{\Omega_1} \frac{\partial \hat{p}_1^{(2)}}{\partial y_0} - \frac{1}{2\Omega_1^2} \frac{\partial P_1}{\partial t_1} Y_1 Z_1 - \frac{U}{2\Omega_1^2} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} Y_1 Z_1 + \quad (5.3.28)$$

$$+ \frac{i}{4\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3} \left[ \left( \frac{\Omega_2^2}{g^2} (\Omega_2^2 - \Omega_3^2) - k_2 (k_2 - k_3) \right) Y_2 Y_3' + \left( \frac{\Omega_3^2}{g^2} (\Omega_3^2 - \Omega_2^2) - k_3 (k_3 - k_2) \right) Y_3 Y_2' \right] P_2^* P_3^* Z_2 Z_3 +$$

$$+ r z \frac{i\Omega_1'}{g} P_1 Y_1 Z_1, \quad \forall (1, 2, 3),$$

$$\hat{w}_1^{(2)} = \frac{i}{\Omega_1} \frac{\partial \hat{p}_1^{(2)}}{\partial z} - \frac{1}{2g} \frac{\partial P_1}{\partial t_1} Y_1 Z_1 - \frac{U}{2g} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} Y_1 Z_1 + \quad (5.3.29)$$

$$+ \frac{i}{4g} (\Omega_2^2 + \Omega_3^2) \left[ \left( \frac{k_2 k_3}{\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3} - \frac{\Omega_2 \Omega_3}{g^2 \Omega_1} \right) Y_2 Y_3 - \frac{1}{4\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3} Y_2' Y_3' \right] P_2^* P_3^* Z_2 Z_3, \quad \forall (1, 2, 3).$$

Эффекты завихренности учтены с помощью слагаемых с маркером  $r$ , которых не возникает вовсе для компоненты вертикальной скорости  $\hat{w}_j^{(2)}$  (они сокращаются при выборе значений  $r = 0$  или  $r = 1$ ).

Решение уравнения непрерывности накладывает требование выбора следующей формы для компонент давления:

$$\hat{p}_j^{(2)} = \left[ P_j^{(2)(a)}(x_1, t_1) Y_j + z P_j^{(2)(b)}(x_1, t_1, y_0, y_1) + z^2 P_j^{(2)(c)}(x_1, t_1, y_0, y_1) \right] Z_j + \quad (5.3.30)$$

$$+ P_j^{(2)(d)}(x_1, t_1) Y_j^{(2)}(y_0) Z_j^{(2)}(z, y_1) +$$

$$+ \sum_{f: \omega_j^{(f)} \neq \omega_j} P_j^{(f)}(x_1, t_1) Y_j^{(f)}(y_0) Z_j^{(f)}(z, y_1), \quad j = 1, 2, 3.$$

Первое слагаемое в (5.3.30) с амплитудой  $P_j^{(2)(a)}$  соответствует решению однородной задачи на захваченную моду второго порядка, и может быть положено равным нулю без ограничения общности,

$$P_j^{(2)(a)} = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (5.3.31)$$

Второе и третье слагаемые в (5.3.30) отвечают за линейную поправку к модовой структуре, они равны

$$P_j^{(2)(b)} = i \frac{g k_j}{2\Omega_j^2} \frac{\partial P_j}{\partial x_j} Y_j + \frac{g \Omega_j'}{\Omega_j^3} P_j Y_j', \quad j = 1, 2, 3, \quad (5.3.32)$$

$$P_j^{(2)(c)} = -i \frac{\Omega_j'}{2\Omega_j} P_j Y_j', \quad j = 1, 2, 3. \quad (5.3.33)$$

Поправка  $P_j^{(2)(d)}$  является нелинейной и для удовлетворения условия непрерывности должна быть выбрана в форме

$$P_1^{(2)(d)} = \frac{k_1}{g} P_2^* P_3^*, \quad \forall (1, 2, 3). \quad (5.3.34)$$

В (5.3.34) множитель  $k_j/g$  использован для сохранения физически верной размерности давления. Вертикальная структура нелинейной поправки определяется соотношением

$$Z_1^{(2)} = \exp[z(h_2 + h_3)], \quad \forall (1, 2, 3). \quad (5.3.35)$$

Для поправок к горизонтальной моде, зависящих от быстрой координаты  $Y_j^{(2)}(y_0)$ , записываются обыкновенные дифференциальные уравнения вида

$$\frac{d^2}{dy_0^2} Y_j^{(2)} + \left( \frac{(\bar{\Omega}^2 - \Omega_j^2)^2}{g^2} - k_j^2 \right) Y_j^{(2)} = M_j, \quad j=1,2,3, \quad (5.3.36)$$

$$\bar{\Omega}^2 \equiv \Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2,$$

где  $M_j$  – сумма слагаемых, состоящих из произведений  $Y_j$  и их производных. Поправки такого рода не возникают в случае развития подобной асимптотической теории для свободных волн без течения. Для дальнейших целей удобно переписать (5.3.36) в другой форме:

$$Y_1^{(2)} = \frac{g^2}{2\Omega_2\Omega_3\bar{\Omega}^2} \hat{L}[h_1, k_1] Y_1^{(2)} + s_1 Y_2^* Y_3^* + q_1 Y_2^* Y_3^*, \quad \forall(1, 2, 3), \quad (5.3.37)$$

$$s_1 = \frac{g}{\Omega_1^4 - (\Omega_2^2 + \Omega_3^2)^2} \left[ \frac{g^2 k_2 k_3}{k_1 \Omega_2 \Omega_3} - \frac{\Omega_2 \Omega_3}{k_1} \right], \quad \forall(1, 2, 3), \quad (5.3.38)$$

$$q_1 = \frac{2\Omega_2^4 \Omega_3^4 + 2g^4 k_2^2 k_3^2 - g^2 (k_2 \Omega_3^2 + k_3 \Omega_2^2)^2}{2g k_1 \Omega_2 \Omega_3 ((\Omega_2^2 + \Omega_3^2)^2 - \Omega_1^4)}, \quad \forall(1, 2, 3), \quad (5.3.39)$$

Отметим, что непотенциальные слагаемые не повлияли на результат (5.3.37), но он явно использует резонансные соотношения (5.3.1).

Последняя группа слагаемых в (5.3.30),  $P_j^{(f)}$ , ответственна за нерезонансное возбуждение других захваченных мод, фазово привязанных к вынуждающим модам. Это частный случай нелинейных вынужденных волн. Вынуждающие моды будем называть "хозяевами", а вынужденные моды такого типа – "подчиненными". Для подчиненных мод формулируется следующая краевая задача такой же структуры, что и (5.3.17),

$$\hat{L}[h_j^{(f)}, k_j] Y_j^{(f)} = 0, \quad j=1,2,3, \quad (5.3.40)$$

$$\text{где } h_j^{(f)}(y_1) = \frac{1}{g} \Omega_j^{(f)2}, \quad \Omega_j^{(f)}(y_1) = \omega_j^{(f)} - k_j U.$$

Условие (5.3.40) (дополненное граничными условиями на  $Y_j^{(f)}$ ) задает набор собственных функций  $Y_j^{(f)}$  для всех собственных частот, не совпадающих с частотой хозяина  $\omega = \omega^{(f)} \neq \omega_j$ .

Вертикальная структура подчиненной моды определяется формулой

$$Z_j^{(f)} = \exp[zh_j^{(f)}], \quad j=1,2,3, \quad (5.3.41)$$

Наконец, кинематическое граничное условие на поверхности в порядке  $O(\varepsilon^2)$  имеет вид

$$\frac{\partial P_1}{\partial t_1} Y_1 + V_1 \frac{\partial P_1}{\partial x_1} Y_1 - ig^2 \frac{\Omega_1'}{\Omega_1^4} P_1 Y_1' - i(\sigma_1^{(a)} Y_2' Y_3' + \sigma_1^{(b)} Y_2 Y_3) P_2^* P_3^* +$$

$$+i \frac{gk_1}{\Omega_1 \Omega^2} \hat{L}[h_1, k_1] Y_1^{(2)} P_2^* P_3^* + \sum_{f: \omega_1^{(f)} \neq \omega_1} i \kappa_1^{(f)} P_1^{(f)} Y_1^{(f)} = 0, \quad \forall (1, 2, 3), \quad (5.3.42)$$

$$V_j = \frac{g^2 k_j}{2\Omega_j^3} + U, \quad j=1,2,3, \quad (5.3.43)$$

$$\sigma_1^{(a)} = \frac{\Omega_2^2 \Omega_3^2 - (\Omega_1^2 - \Omega_2 \Omega_3)^2 - g^2 k_2 k_3}{\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \Omega^2}, \quad \forall (1, 2, 3), \quad (5.3.44)$$

$$\sigma_1^{(b)} = \frac{\Omega_2^4 \Omega_3^4 - (\Omega_1^2 - \Omega_2 \Omega_3)^2 (\Omega_2^2 \Omega_3^2 - g^2 k_2 k_3) + g^4 k_2^2 k_3^2 - (k_2 \Omega_3^2 + k_3 \Omega_2^2)^2}{g^2 \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \Omega^2} - \frac{(k_2 \Omega_3^2 + k_3 \Omega_2^2)^2}{2\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \Omega^2}, \quad \forall (1, 2, 3), \quad (5.3.45)$$

$$\kappa_j^{(f)} = \frac{\Omega_j^2 - \Omega_j^{(f)2}}{\Omega_j}, \quad j=1,2,3. \quad (5.3.46)$$

Выражения для  $V_j$  (которые имеют смысл скоростей мод) в случае  $U = 0$  преобразуются к классическим формулам для групповой скорости волн на поверхности воды без течений  $\omega_j/(2k_j)$ . Если же мода составлена из волн, бегущих строго навстречу течению, то для них  $\omega_j = \omega_{g,j} + k_j U$ , а потому  $\Omega_j = \omega_{g,j} = \sqrt{gk_j}$  и выражение для скорости приобретает классический вид для волн, бегущих навстречу течению:  $V_j = 1/2 \omega_{g,j}/k_j + U$ .

### Эволюционное уравнение на амплитуды мод

Чтобы получить уравнения, описывающие эволюцию амплитуд мод, будем умножать равенство (5.3.42) на функции  $Y_j(y_0)$  и потом интегрировать по бесконечному интервалу  $y$ . На этом пути будет полезным тождество

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y_1 Y_2 Y_3 dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left( k_1 k_2 + \frac{\Omega_1^2 \Omega_2^2}{g^2} - 2 \frac{\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3^2}{g^2} \right) Y_1 Y_2 Y_3 dy, \quad \forall (1, 2, 3), \quad (5.3.47)$$

позволяющее существенно упростить ответ. Доказательство (5.3.47) требует только использования формы краевой задачи (5.3.17) и резонансных соотношений (5.3.1), мы его не приводим. Таким образом, из (5.3.42) получаются следующие равенства

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P_1}{\partial t_1} \int_{-\infty}^{\infty} Y_1^2 dy + \frac{\partial P_1}{\partial x_1} \int_{-\infty}^{\infty} V_1 Y_1^2 dy + \frac{i}{6} g^2 P_1 \int_{-\infty}^{\infty} (\Omega_1^{-3})' (Y_1^2)' dy - i P_2^* P_3^* \int_{-\infty}^{\infty} \rho_1 Y_1 Y_2 Y_3 dy + \\ & + i P_2^* P_3^* \int_{-\infty}^{\infty} \frac{gk_1}{\Omega_1 \Omega^2} Y_1 \hat{L}[h_1, k_1] Y_1^{(2)} dy + \sum_{f: \omega_1^{(f)} \neq \omega_1} i P_1^{(f)} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_1^{(f)} Y_1^{(f)} Y_1 dy = 0, \quad \forall (1, 2, 3), \end{aligned} \quad (5.3.48)$$

с новым нелинейным коэффициентом

$$\rho_1 = \frac{2\Omega_1 (\Omega_2^2 + \Omega_3^2) (\Omega_1^2 - \Omega_2 \Omega_3)}{g^2 \Omega^2} + \frac{4k_2 k_3 \Omega_1^2 \Omega_2 \Omega_3 - (k_2 \Omega_3^2 + k_3 \Omega_2^2)^2}{2\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \Omega^2}, \quad \forall (1, 2, 3). \quad (5.3.49)$$

Далее, используем разность масштабов поперечных координат, предполагая локализацию моды быстрой координаты  $Y_j(y_0)$  много сильнее, чем масштаб зависимости  $U(y_1)$  (и, соответственно, функций  $\Omega_j(y_1)$ ,  $\Omega_j^{(j)}(y_1)$ ), что позволит вынести медленные функции за пределы интегрирования по  $y$ . Тогда третье слагаемое в (5.3.48) обращается в ноль; также обращается в ноль и пятое слагаемое, благодаря тождеству

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y_j \hat{L}[h_j, k_j] Y_j^{(2)} dy = 0, \quad j=1,2,3, \quad (5.3.50)$$

где  $Y_j^{(2)}(y)$  может быть любой функцией, спадающей при  $y \rightarrow \pm\infty$ , а  $Y_j$  – собственное решение краевой задачи (5.3.17).

После отбрасывания двух слагаемых, уравнения (5.3.48) можно переписать в виде

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} + \bar{V}_1 \frac{\partial P_1}{\partial x} - i \bar{\rho}_1 P_2^* P_3^* + \sum_{f: \omega_1^{(f)} \neq \omega_1} \bar{\kappa}_1^{(f)} P_1^{(f)} = 0, \quad \forall(1, 2, 3), \quad (5.3.51)$$

$$\bar{V}_1 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} V_1 Y_1^2 dy}{\int_{-\infty}^{\infty} Y_1^2 dy}, \quad \bar{\rho}_1 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \rho_1 Y_1 Y_2 Y_3 dy}{\int_{-\infty}^{\infty} Y_1^2 dy}, \quad \bar{\kappa}_1^{(f)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \kappa_1^{(f)} Y_1^{(f)} Y_1 dy}{\int_{-\infty}^{\infty} Y_1^2 dy}, \quad \forall(1, 2, 3) \quad (5.3.52)$$

(в уравнениях (5.3.51) индексы при медленной координате и медленном времени опущены, поскольку функции  $P_j$  не зависят от быстрых переменных  $x_0$  и  $t_0$ ). Формулы (5.3.52) могут быть дополнительно упрощены с учетом разного масштаба измерения подынтегральных функций, как обсуждалось выше. В этом случае и при ортогональности набора собственных функций краевой задачи для данного  $k_j$  коэффициенты  $\bar{\kappa}_j^{(f)}$  также зануляются, и в уравнениях (5.3.51) остается только по 3 слагаемых. В противоположном случае в эволюционных уравнениях (5.3.51) содержатся как компоненты мод-хозяев, так и подчиненных мод. В этом случае могут быть записаны дополнительные уравнения, содержащие амплитуды подчиненных мод, действуя схожим образом после домножения (5.3.42) на  $Y_j^{(f)}/\kappa_j^{(f)}$  ( $\kappa_j^{(f)}$  не обращается в ноль для волн, распространяющихся против течения с  $\omega_j^{(f)} \neq \omega_j$ )

$$P_1^{(f)} = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} Y_1^{(f)2} dy} \left[ i P_2^* P_3^* \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_1}{\kappa_1^{(f)}} Y_1^{(f)} Y_2 Y_3 dy - \Gamma_1^{(f)} \right], \quad \forall(1, 2, 3) \quad (5.3.53).$$

$$\Gamma_j^{(f)} = \frac{\partial P_j}{\partial t_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\kappa_j^{(f)}} Y_j^{(f)} Y_j dy + \frac{\partial P_j}{\partial x_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V_j}{\kappa_j^{(f)}} Y_j^{(f)} Y_j dy + \sum_{l: \omega_j^{(l)} \neq \omega_j, \omega_j^{(l)} \neq \omega_j^{(f)}} P_j^{(l)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa_j^{(l)}}{\kappa_j^{(f)}} Y_j^{(l)} Y_j^{(f)} dy, \quad j=1,2,3.$$

Разность масштабов подинтегральных функций может опять быть использована для дальнейшего упрощения; в случае ортогональности мод функции  $\Gamma_j^{(f)}$  равны нулю, и тогда системы уравнений (5.3.51) и (5.3.53) расцепляются: первые определяют динамику мод-хозяев, а вторые – амплитуды подчиненных мод. При неортогональности собственных функций краевой задачи (5.3.51) и (5.3.53) представляют собой для  $N^{(f)}$  значимых подчиненных мод  $N^{(f)} + 1$  линейное уравнение для  $N^{(f)} + 1$  неизвестных.

Без слагаемых с вкладом подчиненных мод система уравнений (5.3.51) решается методом обратной задачи рассеяния [Захаров и Манаков, 1973, 1975]. Обзор волновой динамики в рамках такой системы может быть найден в [Kaup et al, 1979]. В частности, могут быть записаны соотношения Мэнли-Роу в виде

$$\bar{\rho}_2 \left( \frac{\partial |P_1|^2}{\partial t} + \bar{V}_1 \frac{\partial |P_1|^2}{\partial x} \right) - \bar{\rho}_1 \left( \frac{\partial |P_2|^2}{\partial t} + \bar{V}_2 \frac{\partial |P_2|^2}{\partial x} \right) = 0, \quad (5.3.54)$$

$$\bar{\rho}_3 \left( \frac{\partial |P_2|^2}{\partial t} + \bar{V}_2 \frac{\partial |P_2|^2}{\partial x} \right) - \bar{\rho}_2 \left( \frac{\partial |P_3|^2}{\partial t} + \bar{V}_3 \frac{\partial |P_3|^2}{\partial x} \right) = 0, \quad (5.3.55)$$

$$\bar{\rho}_1 \left( \frac{\partial |P_3|^2}{\partial t} + \bar{V}_3 \frac{\partial |P_3|^2}{\partial x} \right) - \bar{\rho}_3 \left( \frac{\partial |P_1|^2}{\partial t} + \bar{V}_1 \frac{\partial |P_1|^2}{\partial x} \right) = 0. \quad (5.3.56)$$

Одно из соотношений является следствием двух других. Динамика резонансной системы (5.3.54)-(5.3.56) качественно зависит от знаков нелинейных коэффициентов  $\rho_j$ , которые представляется слишком трудным оценить в общем случае. Как следует из оценки для частного случая слабого течения, как минимум для этой важной ситуации один из коэффициентов имеет знак, отличный от других (можно выбрать  $\bar{\rho}_1 > 0$ ,  $\bar{\rho}_2 < 0$ ,  $\bar{\rho}_3 > 0$ ), а значит, моды могут эффективно обмениваться энергией. Ситуация, когда энергией обладает только мода с самой короткой продольной длиной волны  $k_2$  (см. Рис. 5.3.1а), неустойчива; благодаря распадной неустойчивости энергию будут получать две другие моды. Если же изначально энергия сосредоточена в модах с большей продольной длиной волны: 1 или 3, то перетекания энергии в моду с более короткой волной не происходит.

Благодаря линейной связи между давлением и смещение поверхности (5.3.18)  $P_j = gA_j$ , полученные эволюционные уравнения можно переформулировать в терминах смещения поверхности.

Интересно отметить, что учет завихренности не дал явного вклада в коэффициенты полученной системы уравнений динамики захваченных волн (отсутствуют слагаемые с маркерами  $r$ ). На рассматриваемых волновых гармониках компоненты завихренности

соответствуют порядку асимптотических разложений  $O(\varepsilon\mu) = O(\varepsilon^2)$  и определяются через соотношения скорости с давлением по формулам

$$[\nabla \times \vec{v}]_x = -ir \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\Omega_j \Omega'_j}{2g(\omega_j - rk_j U)} P_j e^{i\omega_j t - ik_j x} + c.c. \right) Y_j Z_j, \quad (5.3.57)$$

$$[\nabla \times \vec{v}]_y = r \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\Omega_j \Omega'_j}{2k_j g(\omega_j - rk_j U)} P_j e^{i\omega_j t - ik_j x} + c.c. \right) Y'_j Z_j, \quad (5.3.58)$$

$$[\nabla \times \vec{v}]_z = r \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\Omega_j^3 \Omega'_j}{2k_j g^2(\omega_j - rk_j U)} P_j e^{i\omega_j t - ik_j x} + c.c. \right) Y_j Z_j. \quad (5.3.59)$$

### Предел слабого течения

Важным для рассмотренной проблемы является предел слабого течения, когда его максимальная скорость много меньше фазовой скорости волн,  $|kU/\omega| = O(\gamma)$ ,  $\gamma \ll 1$ . В этом случае триада взаимодействующих мод состоит из двух волн с сопоставимыми продольными волновыми числами и одной длинной волны, которую в дальнейшем будем обозначать индексом  $LW$ . Как обсуждалось выше, параметры «коротких»  $k_1 \sim k_2 \sim k$  и длинной волны  $k_3 = k_{LW}$  соотносятся следующим образом:  $k_{LW}/k = O(\gamma^2)$  и  $\omega_{LW}/\omega = O(\gamma)$ . Краевая задача сводится к задаче Штурма-Лиувилля (5.2.45) с собственными функциями, представляющими полный базис, потому в уравнении (5.3.51) пренебрегаем последний слагаемым, ответственным за подчиненные моды. Хотя в случае слабого течения масштаб моды может быть подобен характерному масштабу профиля течения, коэффициенты, зависящие от течения, изменяются слабо, а потому снова могут быть вынесены за знаки интегралов.

Эволюционное уравнение, получаемое из (5.3.51), для длинноволновой компоненты следующее:

$$\frac{\partial P_{LW}}{\partial t} + \bar{V}_{LW} \frac{\partial P_{LW}}{\partial x} - i\bar{\rho}_{LW} P_1^* P_2^* = 0, \quad (5.3.60)$$

$$\bar{V}_{LW} = \gamma^{-1} \frac{g^2 k_{LW}}{\omega_{LW}^3} + \gamma \frac{5}{2} U + O(\gamma^2), \quad (5.3.61)$$

$$\bar{\rho}_{LW} = \gamma \frac{2k\omega_{LW}}{g} I_{LW} + O(\gamma^2), \quad I_{LW} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} Y_{LW} Y_1 Y_2 dy}{\int_{-\infty}^{\infty} Y_{LW}^2 dy}. \quad (5.3.62)$$

Для двух других мод с сопоставимыми продольными длинами уравнения выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} + \bar{V}_1 \frac{\partial P_1}{\partial x} - i\bar{\rho}_1 P_{LW}^* P_2^* = 0, \quad (5.3.63)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} + \bar{V}_2 \frac{\partial P_2}{\partial x} - i\bar{\rho}_2 P_{LW}^* P_1^* = 0, \quad (5.3.64)$$

$$\bar{V}_1 = \frac{g^2 k_1}{\omega_1^3} + \gamma \frac{5}{2} U + O(\gamma^2), \quad \bar{\rho}_1 = \frac{\omega_1^3}{g^2} I_1 + O(\gamma), \quad I_1 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} Y_{LW} Y_1 Y_2 dy}{\int_{-\infty}^{\infty} Y_1^2 dy}, \quad (5.3.65)$$

$$\bar{V}_2 = \frac{g^2 k_2}{\omega_2^3} + \gamma \frac{5}{2} U + O(\gamma^2), \quad \bar{\rho}_2 = \frac{\omega_2^3}{g^2} I_2 + O(\gamma), \quad I_2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} Y_{LW} Y_1 Y_2 dy}{\int_{-\infty}^{\infty} Y_2^2 dy}. \quad (5.3.66)$$

С учетом выбранных нами знаков  $k_1 > 0$ ,  $\omega_1 > 0$ ,  $k_2 < 0$ ,  $\omega_2 < 0$ ,  $k_{LW} = k_3 > 0$ ,  $\omega_{LW} = \omega_3 > 0$ , коэффициент  $\bar{\rho}_2$  выступает с противоположным другим коэффициентам знаком. Отметим, что нелинейный коэффициент  $\bar{\rho}_{LW} = O(\gamma)$  оказывается мал,  $\bar{\rho}_1 = O(1)$ ,  $\bar{\rho}_2 = O(1)$ , а скорость длинноволновой моды  $V_{LW} = O(\gamma^{-1})$  очень большая,  $V_1 = O(1)$ ,  $V_2 = O(1)$ , что говорит о неудачном выборе масштабов для системы (5.3.60), (5.3.63), (5.3.64). Можно сформулировать две постановки задачи, сфокусированные на описании эволюции длинноволновой моды, либо описании динамики коротковолновых мод.

В первом случае система уравнений приводится к виду, где все слагаемые сопоставимы по величине, посредством перехода к новым переменным  $a_j(x', t')$

$$a_1(x', t') = \gamma^{-\frac{1}{2}} P_1(x, t) \sqrt{-\bar{\rho}_2 \bar{\rho}_{LW}},$$

$$a_2(x', t') = \gamma^{-\frac{1}{2}} P_2(x, t) \sqrt{\bar{\rho}_1 \bar{\rho}_{LW}}, \quad (5.3.67)$$

$$a_{LW}(x', t') = \gamma^{-\frac{1}{2}} P_{LW}(x, t) \sqrt{-\bar{\rho}_2 \bar{\rho}_1},$$

$$x' = \gamma^{\frac{3}{2}} x, \quad t' = \gamma^{\frac{1}{2}} t.$$

В новых переменных система уравнений выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial a_1}{\partial t'} = i a_2^* a_{LW}^*, \quad (5.3.68)$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial t'} = -i a_1^* a_{LW}^*, \quad (5.3.69)$$

$$\frac{\partial a_{LW}}{\partial t'} + V'_{LW} \frac{\partial a_{LW}}{\partial x} = i a_1^* a_2^*, \quad V'_{LW} = \gamma \bar{V}_{LW} = O(1). \quad (5.3.70)$$



Производные по координате от амплитуд волн 1 и 2 оказываются порядка  $O(\gamma)$  и потому опущены.

В другой постановке замена переменных использует другое масштабирование,

$$\begin{aligned} a_1(x', t') &= \gamma^{-\frac{1}{2}} P_1(x, t) \sqrt{-\bar{\rho}_2 \bar{\rho}_{LW}}, \\ a_2(x', t') &= \gamma^{-\frac{1}{2}} P_2(x, t) \sqrt{\bar{\rho}_1 \bar{\rho}_{LW}}, \\ a_{LW}(x', t') &= \gamma^{-1} P_{LW}(x, t) \sqrt{-\bar{\rho}_2 \bar{\rho}_1}, \\ x' &= \gamma x, \quad t' = \gamma t. \end{aligned} \quad (5.3.71)$$

Тогда система для взаимодействующей триады имеет вид

$$\frac{\partial a_1}{\partial t'} + \bar{V}_1 \frac{\partial a_1}{\partial x'} = i a_2^* a_{LW}^*, \quad (5.3.72)$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial t'} + \bar{V}_2 \frac{\partial a_2}{\partial x'} = -i a_1^* a_{LW}^*, \quad (5.3.73)$$

$$V'_{LW} \frac{\partial a_{LW}}{\partial x} = i a_1^* a_2^*. \quad (5.3.74)$$

Таким образом, эволюция разных мод, участвующих в нелинейном резонансном взаимодействии захваченных мод на слабом течении, проходит с разными характерными масштабами. Динамика «коротковолновых» мод имеет одинаковый масштаб изменения в пространстве и времени, оцениваемый как  $O(\gamma)$ . В результате взаимодействия амплитуды (энергии) мод также сильно отличаются. В первом случае (5.3.67) выполняются следующие соотношения между амплитудами мод:  $|P_{LW}/P_1| \sim \gamma^{1/2}$ ,  $P_1 \sim P_2$  (для оценки нужно учесть величины нелинейных коэффициентов). Во втором случае (5.3.71) различие еще сильнее:  $|P_{LW}/P_1| \sim \gamma$ ,  $P_1 \sim P_2$ . Соответственно, дискриминация в крутизнах длинных и коротких волн будет выражена еще сильнее вследствие отношения  $k_{LW}/k_1 \sim \gamma^{1/2}$ ,  $k_2 \sim k_1$ .

#### **5.4 Нелинейная теория для 4-волновых взаимодействий захваченных мод**

Кроме резонансных взаимодействий между тройками мод не исчезают и классические 4-волновые взаимодействия, доминирующие в нелинейной динамике свободных волн на поверхности глубокой воды. В случае волн, захваченных струйным течением, возможны взаимодействия между разными масштабами волн и разными модами. Как оценено выше, 3-волновые взаимодействия становятся слабее при уменьшении интенсивности течения, и тогда квадратичные и кубические эффекты нелинейного взаимодействия между модами захваченных волн могут конкурировать. Отметим, что в случае слабого течения одна из мод,

участвующих в 3-волновом взаимодействии, обязательно длинная, а потому предположение об узком спектре становится нелегитимным.

### Нелинейная динамика квартета захваченных мод

Учет нелинейных взаимодействий более высокого порядка, естественно, делает асимптотическую схему более сложной. Для упрощения, можно изначально предположить, что рассматривается слабое широкое течение, а тогда движение волн близко к потенциальному и можно ввести потенциал скорости. В этом случае вывод эволюционного уравнения для одной моды почти повторяет вывод нелинейного уравнения Шредингера для волн на поверхности глубокой воды с той модификацией, что частота связана с волновым числом через решение краевой задачи Штурма-Лиувилля (5.2.45), а также поперечная структура волн учитывается через модовую функцию – решение этой краевой задачи. Такой подход был использован для получения НУШ для одной захваченной моды в нашей работе [Shrira & Slunyaev, 2014\*]. В общем случае резонансные условия для четверки мод можно записать в виде

$$k_1 + k_2 = k_3 + k_4, \quad \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4, \quad (5.4.1)$$

Также можно условиться, что  $k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq k_4$ . Для свободных волн на глубокой воде разрешены только вырожденные взаимодействия,  $(k_1, \omega_1) = (k_3, \omega_3)$ ,  $(k_2, \omega_2) = (k_4, \omega_4)$ ; в случае струйного течения легко видеть (Рис. 5.2.1, 5.3.1), что невырожденные взаимодействия между захваченными модами также возможны. Слабость течения  $\gamma \ll 1$  обуславливает малый градиент поперечной моды  $\chi \sim \gamma^{1/2} \ll 1$  (из (5.2.45)). Показатель экспоненты вертикальной структуры моды  $\exp(h_j z)$  близок к продольному числу:  $h_j^2 = k_j^2 + O(\gamma)$ . Тогда приближенно можно пользоваться потенциальной теорией,  $h_j \approx k_j$ ,  $\Omega_j \approx \sqrt{gk_j}$ , что упрощает выкладки значительно, и вывод уравнений очень близок к рассмотренному в Разделе 2.2 за тем отличием, что рассматриваются 4 волны и их комбинации. В линейном приближении моды описываются приближенной задачей (5.2.45) и являются ортогональными, по этой причине компоненты «подчиненных» волн не входят в эволюционные уравнения на амплитуды квартета мод. Структура уравнений естественна:

$$\begin{aligned} i\omega_1 \frac{\partial A_1}{\partial t} &= \bar{\alpha}_1 A_1 |A_1|^2 + \sum_{j=2,3,4} \bar{\alpha}_{1j} A_1 |A_j|^2 + \bar{v}_1 A_2^* A_3 A_4, \\ i\omega_2 \frac{\partial A_2}{\partial t} &= \bar{\alpha}_2 A_2 |A_2|^2 + \sum_{j=1,3,4} \bar{\alpha}_{2j} A_2 |A_j|^2 + \bar{v}_2 A_1^* A_3 A_4, \\ i\omega_3 \frac{\partial A_3}{\partial t} &= \bar{\alpha}_3 A_3 |A_3|^2 + \sum_{j=1,2,4} \bar{\alpha}_{3j} A_3 |A_j|^2 + \bar{v}_3 A_4^* A_1 A_2, \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

$$i\omega_4 \frac{\partial A_4}{\partial t} = \bar{\alpha}_4 A_4 |A_4|^2 + \sum_{j=1,2,3} \bar{\alpha}_{4j} A_4 |A_j|^2 + \bar{\nu}_4 A_3^* A_1 A_2,$$

величины  $A_j(t)$  имеют смысл смещения поверхности для соответствующей моды. В диссертации мы не приводим вывод уравнений, выполненный в среде символьной математики Maple; коэффициенты имеют очень громоздкий вид. Для простоты мы также не учли зависимость от продольной координаты  $x$ . В предположении медленной огибающей слагаемые дисперсии в каждом из уравнений (5.4.2) имеют классический вид для НУШ; они будут также обсуждаться ниже в случае одного НУШ.

Коэффициенты нелинейного самовоздействия определяются соотношениями

$$\bar{\alpha}_j = \alpha_j I_j, \quad \alpha_j = \frac{1}{2} k_j^2, \quad I_j = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} Y_j^4 dy}{\int_{-\infty}^{\infty} Y_j^2 dy}, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (5.4.3)$$

Коэффициент  $\alpha_j$  совпадает с классическим коэффициентом нелинейности для волн на глубокой воде (см. Раздел. 2.2). Коэффициенты попарного тривиального воздействия между модами есть

$$\bar{\alpha}_{jq} = 2\alpha_j I_{jq} \begin{cases} \sqrt{\frac{k_j}{k_q}} & \text{если } k_q > k_j \\ \sqrt{\frac{k_q}{k_j}} & \text{если } k_j > k_q \end{cases}, \quad I_{jq} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} Y_j^2 Y_q^2 dy}{\int_{-\infty}^{\infty} Y_j^2 dy}, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad q = 1, 2, 3, 4, \quad q \neq j, \quad (5.4.4)$$

при этом всегда выполняется  $\bar{\alpha}_{jq} < 2\bar{\alpha}_j$ . С точностью до учета модовой структуры  $I_{jq}$ , коэффициенты (5.4.4) совпадают с полученными в работе [Лаврова, 1983] для двух взаимодействующих волновых систем. Отметим, что величины  $I_j$  и  $I_{jq}$  всегда положительны.

Коэффициенты нетривиальных взаимодействий чрезвычайно громоздки, они могут быть представлены в виде

$$\bar{\nu}_j = \nu_j(k_1, k_2, k_3, k_4) J_j, \quad J_j = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 dy}{\int_{-\infty}^{\infty} Y_j^2 dy}, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (5.4.5)$$

В пределе парного взаимодействия, когда  $k_3 \rightarrow k_1$  и  $k_4 \rightarrow k_2$ , эти коэффициенты стремятся к (5.4.4),

$$\nu_j \xrightarrow{k_2 \rightarrow k_1, k_4 \rightarrow k_2} 2\alpha_j \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (5.4.6)$$

Таким образом, если пара волновых чисел  $k_1 \approx k_3$  и  $k_2 \approx k_4$  сильно отличается по величине, то коэффициенты взаимодействия  $\alpha_{jq}$  и  $\nu_j$  много меньше, чем  $\alpha_j$ .

В случае, когда слагаемыми нетривиальных взаимодействий в (5.4.2) можно пренебречь, динамика квартета существенно упрощается. В частности, каждой из мод сохраняется парциальная энергия:

$$\frac{\partial}{\partial t} |A_j|^2 = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (5.4.7)$$

В противном случае динамика квартета может быть очень сложной [Benney, 1962; Stiassnie & Shemer, 2005; Kartashova, 2010].

Система (5.4.2) трансформируется к двум сцепленным НУШ для мод  $A_1$  и  $A_2$ , если положить амплитуды двух других мод равными нулю,  $A_3 = A_4 = 0$ . Такая система обладает интересными свойствами нелинейной динамики в приложении к аномально высоким волнам. Так, инкремент модуляционной неустойчивости для двух взаимодействующих систем может превышать таковой для одной системы в приближении узкого спектра [Roskes, 1976; Onorato et al, 2006].

Важное отличие приведенных результатов для нелинейно взаимодействующих захваченных мод заключается в появлении дополнительных множителей в коэффициентах взаимодействия, связанных с перекрытием мод. Благодаря им ослабляется межмодовое взаимодействие. Оценка для интегралов перекрытия может быть легко получена для модельного примера кусочно-постоянного течения (см. в [Shrira & Slunyaev, 2013\*]), удерживающего большое число мод в интервале  $|y| < L$  (предел глубокой потенциальной ямы). В этом случае моды хорошо локализованы течением и могут быть представлены гармоническими функциями,

$$I_n \approx \frac{\int_{-L}^L \cos^4\left(\pi n \frac{y}{L}\right) dy}{\int_{-L}^L \cos^2\left(\pi n \frac{y}{L}\right) dy} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \frac{3}{4}, & n > 0 \end{cases}, \quad (5.4.8)$$

где  $n$  – целые номера мод. Межмодовые интегралы перекрытия также могут быть вычислены точно,

$$I_{nm} = \frac{1}{2}, \quad n \neq m, \quad I_{nn} = I_n, \quad J_n = 0, \quad n \geq 0, \quad m \geq 0. \quad (5.4.9)$$

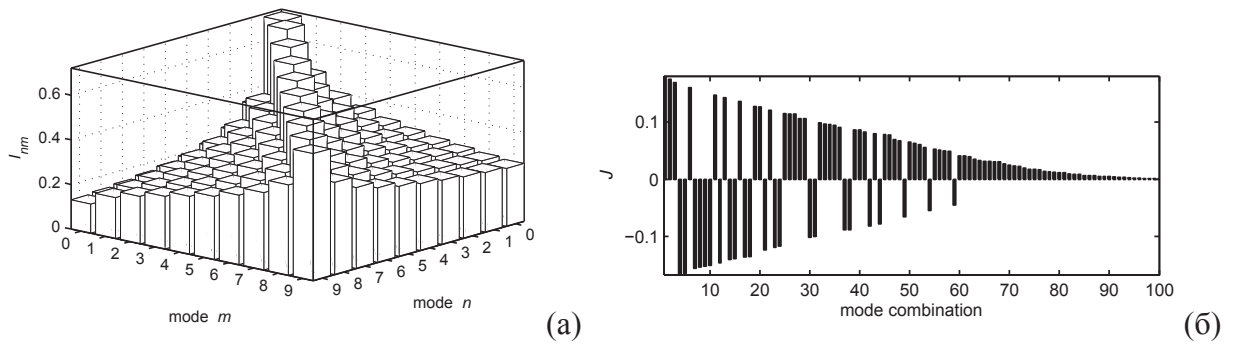


Рис. 5.4.1. Интеграл перекрытия  $I_{nm}$  для 10 низших мод для параболического течения (а), а также интеграл  $J$  для того же профиля для случаев, когда как минимум 3 взаимодействующие моды отличны.

(Здесь мы использовали нормировку мод на максимум значения).

Для другого примера параболического профиля течения (см. решение в [Shrira & Slunyaev, 2013\*]) модовые функции выражаются в терминах полиномов Эрмита, которые после соответствующего масштабирования не зависят от физических параметров и потому удобны для вычисления интегралов перекрытия. Результат построен на Рис. 5.4.1 для мод, нормированных на максимум значения. Для снижения числа свободных параметров мы остановились на случае равных продольных волновых чисел и 10-ти захваченных модах с низшим номером. Значения интеграла  $I_{nm}$  приведены на Рис. 5.4.1а, где целые числа  $n$  и  $m$  нумеруют номер моды от 0 до 9. Максимальное значение соответствует  $I_{00} \approx 0.71$ . Интеграл  $I_{nm}$  значительно больше в случае самовоздействия ( $I_{nm} = I_n$ ), чем при взаимодействии разных мод; он спадает при увеличении номера моды.

Для иллюстрации интеграла перекрытия четырех мод  $J$  на Рис. 5.4.1б построены упорядоченные значения этого интеграла для перебора комбинаций мод с числами от 0 до 9, причем хотя бы три моды должны иметь разные номера (чтобы не дублировать данные для  $I_{nm}$  и  $I_n$  на Рис. 5.4.1а). Максимальное значение  $J$  на Рис. 5.4.1б примерно равно 0.18.

Нами был также рассмотрен другой модельный случай «треугольного» течения (см. в [Shrira & Slunyaev, 2013\*]), а также в следующем разделе рассматривается (численно) задача модельного гладкого течения; они подтверждают общий характер полученных здесь оценок. Таким образом, оценка максимального значения интеграла перекрытия для самовоздействия моды, равна примерно 0.7. Для парных тривиальных взаимодействий это значение заметно меньше, а для нетривиальных взаимодействий – еще меньше (максимум  $\sim 0.1-0.2$ ).

### Нелинейное уравнение Шредингера для одной захваченной моды

Хотя случай самовоздействия одной единственной захваченной моды является идеализированным, как следует из исследований, представленных в следующем разделе, он

имеет право на существование: энергия, изначально сосредоточенная в захваченных волнах одной моды, может длительное время в ней оставаться, несмотря на возможные межмодовые взаимодействия, описанные выше. При этом нелинейность и дисперсия волн этой моды могут играть важную роль в динамике захваченных волн, и мы будем предполагать волновой спектр продольных волновых чисел, допуская слабые модуляции амплитуд мод вдоль направления течения  $Ox$ . В диссертации приведен более общий вывод НУШ для одной моды захваченных волн, чем был выполнен для записи уравнения, представленного в нашей работе [Shrira & Slunyaev, 2014\*]. Подробный вывод помещен в Приложение В. Он, в целом, следует асимптотической процедуре, приведенной в Разделе 5.3 для троек взаимодействующих волн, но содержит свои особенности, которые здесь обсуждаться не будут. Приведенный в Приложении В вывод НУШ не использует близость волн к потенциальным, но предполагает течение широким для использования приближенного разделения переменных в краевой задаче на моды, которое обсуждалось в Разделе 5.2. Родственный по подходу вывод НУШ для волн на течении был выполнен в работе [Hjelmervik & Trulsen, 2009], но без учета захваченных мод. Технически и идеологически изложенный в Приложении В вывод сложнее, чем в [Hjelmervik & Trulsen, 2009], однако в отношении эффекта завихренности результат оказался преимущественным: он не изменил вид коэффициентов в эволюционных уравнениях. Очевидно, что такой результат последовал из-за ограничений на течение, необходимых для согласованности порядков малости всех членов, входящих в полученные уравнения.

А именно, нами вводится довольно жесткое условие для соотношения между поперечным масштабом моды и степенью нелинейности,  $\mu = O(\varepsilon^3)$ , с той целью, чтобы краевая задача на моды возникала в том же порядке, что и кубическая нелинейность. В случае ослабления условия на  $\mu$  для получения полностью согласованной по порядкам малости теории потребовался бы учет поправок для структуры моды. Выведенное в итоге нелинейное уравнение на амплитуду одной моды имеет точность  $O(\varepsilon^4) + O(\varepsilon\mu)$  (см. (B.62)):

$$i\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \bar{V} \frac{\partial A}{\partial x}\right) + \bar{\beta} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \bar{\alpha} |A|^2 A = O(\varepsilon^4) + O(\varepsilon\mu), \quad (5.4.10)$$

$$\bar{V} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} V Y^2 dy}{\int_{-\infty}^{\infty} Y^2 dy}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \alpha Y^4 dy}{\int_{-\infty}^{\infty} Y^2 dy}, \quad \bar{\beta} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \beta Y^2 dy}{\int_{-\infty}^{\infty} Y^2 dy},$$

$$V = U + \frac{kg^2}{2\Omega^3}, \quad \alpha = \frac{\Omega(-h^4 + 5k^4 + 2h^2k^2)}{12h^2}, \quad \beta = \frac{\Omega(3k^2 - 2h^2)}{8h^4}, \quad \Omega^2 = gh.$$

Здесь  $V(y)$  и коэффициенты  $\alpha(y)$ ,  $\beta(y)$  – медленные функции поперечной координаты, а потому при дополнительных условиях или предположениях их выражения могут быть упрощены. Скорость моды совпадает с полученным ранее выражением для троек мод (5.3.43).

В пределе слабого течения,  $kU/\omega = O(\gamma)$ ,  $\gamma \ll 1$ , разложение коэффициентов уравнения (5.4.10) в ряд по малому  $\gamma$  дано в Приложении В (формулы (В.64)-(В.66)), так что нелинейное уравнение Шредингера для одной захваченной моды можно записать в виде

$$i \left[ \frac{\partial A}{\partial t} + \left( \frac{1}{2} \frac{kg^2}{\omega^3} + \frac{5}{2} \bar{U} \right) \frac{\partial A}{\partial x} \right] + \frac{\omega_g}{k^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + I \frac{\omega_g k^2}{2} |A|^2 A = 0. \quad (5.4.11)$$

Вклад геометрической структуры мод учитывается в выражении для скорости через

$$\bar{U} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} U Y^2 dy}{\int_{-\infty}^{\infty} Y^2 dy}, \quad (5.4.12)$$

а также в коэффициенте нелинейности через интеграл перекрытия

$$I = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} Y^4 dy}{\int_{-\infty}^{\infty} Y^2 dy}. \quad (5.4.13)$$

Если течение  $U(y)$  примерно постоянно в области локализации моды  $Y(y)$ , тогда величина  $\bar{U}$  примерно равна этой скорости. Как обсуждалось выше, разумной оценкой сверху интеграла (5.4.13) является значение  $\approx 0.7$ .

Для согласованности асимптотического уравнения в выражении для скорости содержится частота в лабораторной системе отсчета  $\omega$  – решение приближенной краевой задачи Штурма-Лиувилля (5.2.45), а в коэффициентах нелинейности и дисперсии можно использовать близкое к ней значение частоты свободных гравитационных волн  $\omega_g = (gk)^{1/2}$ ,  $\omega - \omega_g = O(\gamma)$ . В итоге коэффициенты дисперсии и нелинейности совпадают с таковыми для классической задачи свободных волн на поверхности покоящейся воды. В формулах реконструкции смещения поверхности  $\eta = \text{Re}[A \exp(i\omega t - ikx)]$  частота также берется из решения краевой задачи; в противном случае в эволюционном уравнении должно появиться еще одно линейное слагаемое, ответственное за поправку частоты (оно присутствует, в частности, в уравнениях, использованных в [Hjelmervik & Trulsen, 2009; Onorato et al, 2011]). В отличие от (5.4.11), уравнения в [Hjelmervik & Trulsen, 2009; Onorato et al, 2011] записаны в форме для эволюции в пространстве, а не во времени. Если считать, что волна движется

навстречу течению, и тогда  $\omega = \omega_g + kU$ ,  $\omega_g = gk$ , то выражение для скорости моды в (5.4.11) равно скорости свободной волны, распространяющейся против течения.

$$V = \frac{1}{2} \frac{kg^2}{\omega^3} + \frac{5}{2} U + O(\gamma^2) = \frac{\omega_g}{2k} + U + O(\gamma^2). \quad (5.4.14)$$

Наличие захваченных мод проявляется в отличии эффективной скорости течения  $\bar{U}$  от локальной скорости и в поправочном множителе при нелинейном коэффициенте, содержащем интеграл перекрытия (5.4.13).

Таким образом, в пределе слабого течения теория для слабо нелинейных слабо модулированных захваченных волн состоит из краевой задачи (5.2.45) на структуру мод, которая имеет точные решения для ряда модельных профилей течений (см. обсуждение в [Shrira & Slunyaev, 2013\*]), и интегрируемого эволюционного уравнения НУШ (5.4.11). Таким образом, доступно множество аналитических решений, полностью описывающих динамику волн. Некоторые из этих решений будут использованы в качестве начальных условий для численного моделирования в рамках уравнений Эйлера в Разделе 5.5.

### **5.5 Численное моделирование возникновения «волн-убийц» на встречном струйном течении в рамках исходных уравнений гидродинамики**

В этом разделе нами выполнено компьютерное моделирование исходных уравнений гидродинамики с целью подтверждения теоретических моделей и выводов, изложенных в Разделах 5.2, 5.3 и 5.4. В качестве модели использован псевдоспектральный код уравнений

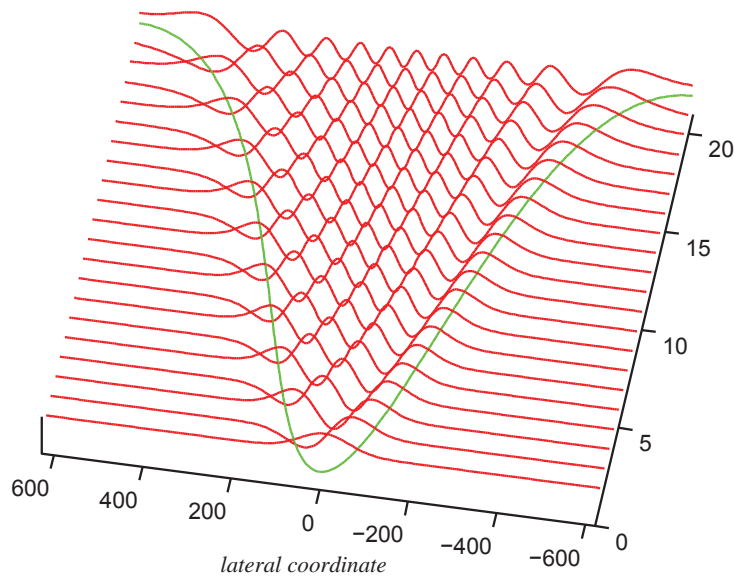


Рис. 5.5.1. Профиль течения в зависимости от поперечной координаты (в метрах) построен зеленой линией. Красными линиями построены моды.



Эйлера HOSM, модифицированный для учета струйного течения, однородного по глубине, в пределе глубокой жидкости, который описан в Приложении Б. Очевидным недостатком выбранной модели является использование в ней потенциального приближения уравнений Эйлера, в то время как выше нами использовались уравнения, учитывающие эффекты завихренности. В частности, в рамках потенциальных уравнений равновесное состояние системы (без волн) требует введения компенсирующего давления на поверхности или изменяющегося поперек течения среднего уровня жидкости (нами выбран первый вариант, см. (Б.14)). С другой стороны, результаты нелинейной теории, развитой в Разделах 5.3 и 5.4, показали, что учет непотенциальных слагаемых не повлияли на динамику волн (в частности, не изменили вид нелинейных коэффициентов), что может отчасти оправдать использования нами кода потенциальных уравнений HOSM.

Выполнены численные эксперименты в односторонних условиях. Для устойчивости спектрального кода предпочтительны периодические функции, потому профиль течения выбран близким к  $sech^2$  в виде кноидальной функции

$$U(y) = U_m cn^2 \left( 2K \frac{y}{L_y}, s^2 \right), \quad (5.5.1)$$

где  $K(s^2)$  – полный эллиптический интеграл первого рода,  $s = 0.9$ , поперечный размер вычислительной области  $L_y = 1200$  м,  $U_m = -2$  м/с. Течение изменяется от нуля до  $U_m$  при  $y = 0$ , как схематично показано зеленой линией на Рис. 5.5.1. Для выбранных условий градиент  $|dU/dy| < 0.006$  с<sup>-1</sup>.

Также на Рис. 5.5.1 построены моды захваченных волн  $Y_n(y)$ , которые найдены численно как решение двумерной краевой задачи с использованием уравнения Гельмгольца (5.2.55)-(5.2.57), то есть нами принято  $Y_n(y) = \hat{w}^{(0)}(y, z = 0)$ . Как обсуждалось в Разделе 5.2, это решение близко к решению нелинейной одномерной краевой задачи (5.2.42)-(5.2.43). Во

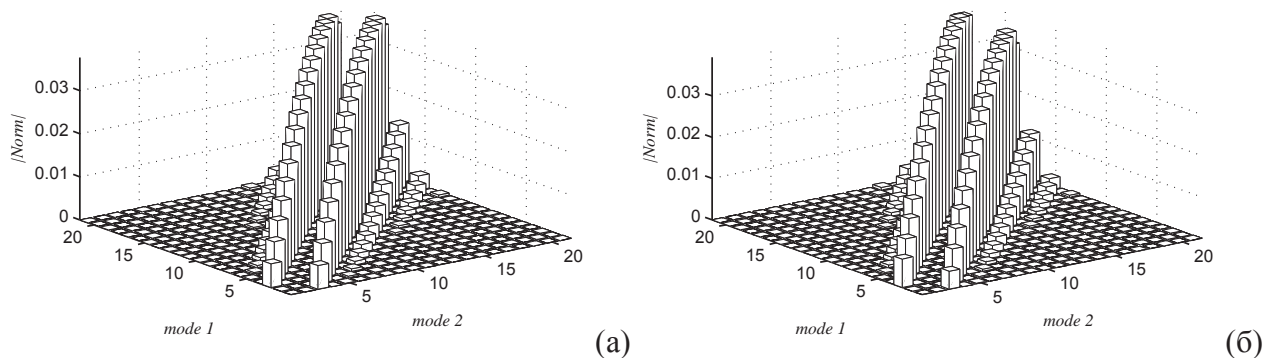


Рис. 5.5.2. Значения интеграла  $\Delta I_{nm}$ , характеризующего неортогональность мод для нормировки по энергии (а) и на максимум значения (б). Значения  $I_{nn} = 1$  не построены.

всех случаях начальные условия задавались для одномодовой ситуации для продольного волнового числа  $k = k_0 = 0.1$  рад/м. Для таких условий линейная частота волн без течения  $\omega_g \approx 0.990$  рад/с ( $g = 9.81$  м/с<sup>2</sup>), частота волн с учетом Допплеровского сдвига на течении  $U_m$ :  $\omega_g - |k_0 U_m| \approx 0.790$  рад/с. Дискретные собственные частоты краевой задачи заключены в интервале от  $\omega_0 = 0.798$  рад/с до  $\omega_{20} = 0.987$  рад/с.

Найденные моды не ортогональны. На Рис. 5.5.2 построены значения интеграла, характеризующего степень неортогональности,

$$\Delta I_{nm} = \frac{\int Y_n Y_m dy}{\int Y_n^2 dy}, \quad (5.5.2)$$

для нормировки на энергию,  $\int Y_n^2 dy = 1$  (Рис. 5.5.2а), и на максимум,  $\max(|Y_m|) = 1$  (Рис. 5.5.2б). Значения  $I_{nm} = 1$  не построены на Рис. 5.5.2. Видно, что в обоих случаях максимум величины интеграла  $\Delta I_{nm}$  оценивается  $\sim 4\%$ , а для мод с низшими числами он еще меньше,  $\sim 1\%$  для ближних мод.

### Модовая структура захваченных волн

В основе развитой нами теории захваченных волн на струйном течении является предположение о существовании объекта, отличного от классической поверхностной волны – моды захваченных волн, характеризуемой продольным волновым числом  $k$ , частотой  $\omega_n$  и амплитудой. Потому первая серия экспериментов посвящена анализу модового состава волн. Для задания начального условия (смещение поверхности и потенциал скорости на поверхности) использовалось решение в виде однородной волны Стокса (без учета течения), которое профилировалось в поперечном направлении с помощью домножения на моду  $Y_n$ . Далее для расчета эволюции волн использовался код уравнений Эйлера НОСМ. Поверхности волн в начальный момент времени и после длительного расчета приведены на Рис. 5.5.3 для фундаментальной моды  $n = 0$  и случаев крутизны начального условия  $k_0 H/2 = 0.01$  и  $k_0 H/2 = 0.15$ . Несмотря на мелкую рябь, различимую на Рис. 5.5.3б,г, несомненно сохранение одномодового режима для однородной волны. Видеоматериал, демонстрирующий численный расчет для случая  $k_0 H/2 = 0.15$ , можно найти в дополнительных материалах к нашей статье [Shrira & Slunyaev, 2014\*]\*. Отметим визуальное сходство волн на Рис. 5.5.3 и фотографии, представленной Рис. 5.1.2.

Частотный спектр волн можно померить по временным последовательностям записей смещения, взятым на разных расстояниях от оси течения  $y$ . Для измерений в области

\* <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevE.89.041002>

локализации моды выделяется центральный пик со значением  $\omega_p = 0.799 \pm 0.002$  рад/с для случая малой крутизны волн, и  $\omega_p = 0.805 \pm 0.002$  рад/с для случая интенсивных волн. Напомним, что теоретическое значение частоты для линейной фундаментальной моды равно  $\omega_0 = 0.798$  рад/с, что совпадает со значением  $\omega_p$ , полученным для волны малой крутизны. Большая крутизна привела к увеличению частоты волн.

Для более детального анализа картины волн были выделены компоненты полей смещения поверхности, относящиеся к конкретным модам  $n$ , с помощью процедуры

$$\eta_n(x, t) = \int \eta(x, y, t) Y_n(y) dy. \quad (5.5.3)$$

Амплитуда моды  $a_n$  нами далее определена по формуле

$$a_n(t) = \sqrt{\frac{1}{L_x} \int \eta_n^2(x, t) dx}, \quad (5.5.4)$$

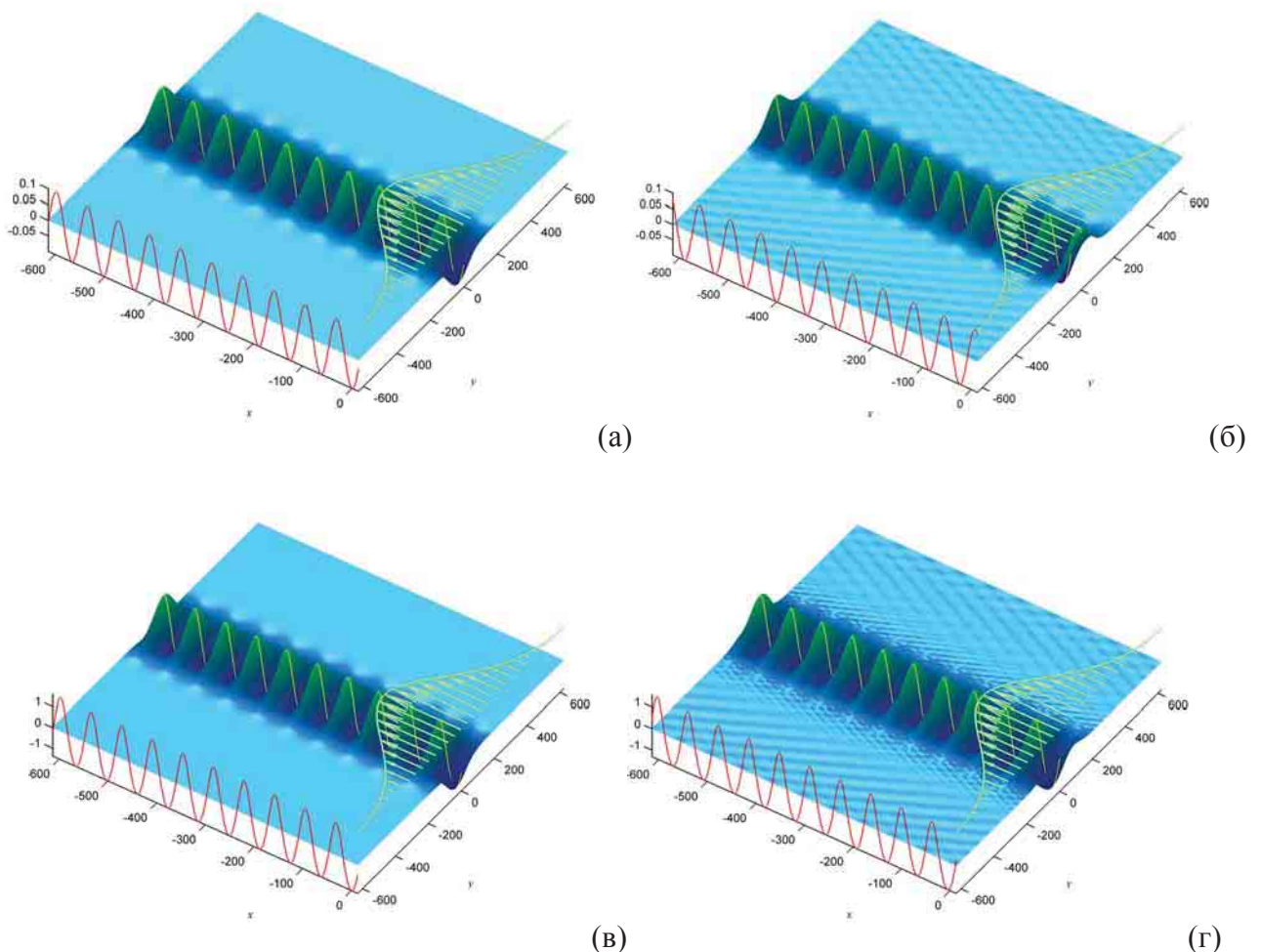


Рис. 5.5.3. Поверхности в начальный момент времени (а, в) и после длительного расчета (примерно через 370 периодов) (б, г) для условий  $k_0H/2 = 0.01$  (а, б) и  $k_0H/2 = 0.15$  (в, г). Все единицы измерения – м. Красной линией построен продольный профиль волн вдоль  $y = 0$ , зеленой линией со стрелками построен профиль течения.

где  $L_x$  – продольный размер расчетной области. Для соответствия принципу сохранения энергии, использована нормировка мод  $\int Y_n^2 dy = 1$ . При этом нужно понимать, что функции  $Y_n$  не полностью ортогональны (и представимый ими базис, очевидно, не полон).

На Рис. 5.5.4 построены зависимости определенных таким образом амплитуд мод для двух случаев интенсивности волн, проиллюстрированных на Рис. 5.5.3. Моды с низшими числами показаны разными цветами (в подписях к рисункам мода 1 соответствует значению  $n = 0$  и т.д.), причем моды с нечетными значениями  $n$  не построены вовсе, их амплитуда очень мала. В случае волн малой амплитуды  $k_0 H/2 = 0.01$  амплитуда следующей по интенсивности моды,  $n = 2$ , составляет менее 1% от амплитуды фундаментальной моды (Рис. 5.5.4.а). В более интенсивном случае  $kH/2 = 0.15$  осцилляции  $a_2(t)$  составляют до 16% от амплитуды фундаментальной моды (Рис. 5.5.4.б), при этом  $a_0(t)$  периодически проседает на величину около 2%. Пиковая частота в экспериментах соответствует периоду примерно  $T_p = 7.8$  с, так что осцилляции моды  $n = 2$  происходят с периодичностью примерно 30

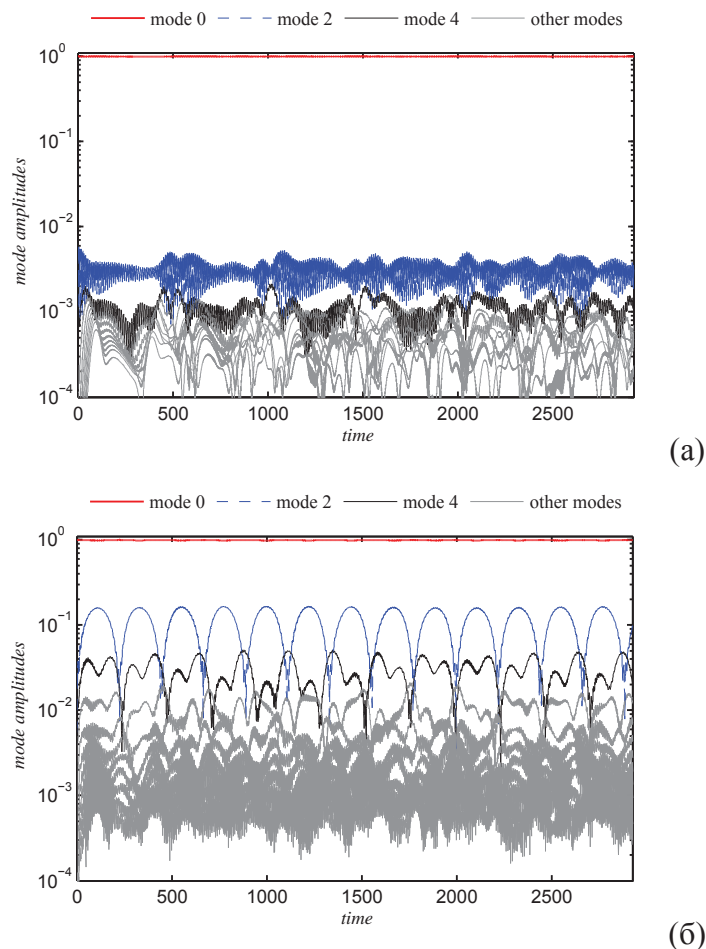


Рис. 5.5.4. Зависимость от времени амплитуд мод, нормированных на максимальное значение, в полулогарифмических координатах для случаев  $k_0 H/2 = 0.01$  (а) и  $k_0 H/2 = 0.15$  (б). Мода  $n = 0$  построена красным цветом,  $n = 2$  – синим пунктиром,  $n = 4$  – черной линией и остальные четные моды – серым.

волновых периодов. Осцилляции мод  $n = 4$  и  $n = 6$  примерно в 2 и 3 раза чаще, чем для моды  $n = 2$ .

Для анализа динамики волн были построены пространственно-временные спектры (подобные изображенным на Рис. 4.3.5) для избранных волн, применяя двойное преобразование Фурье для функций  $\eta_m^{(H)}(x, t)$ ,

$$\eta_m^{(H)}(x, t) = H(t)\eta_m(x, t), \quad H \equiv \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \left( 2\pi \frac{t}{T} \right) \right), \quad (5.5.5)$$

здесь  $H(t)$  – маска Ханнинга (Hanning data mask, [Massel, 1996]), применяемая для сглаживания непериодических сигналов,  $T$  – длительность выборки во времени. Амплитудный спектр  $S_n(k, \omega)$  для  $n = 1$  и примера более интенсивных волн построен на Рис. 5.5.5. Цветом отложен десятичный логарифм от нормированного на максимум спектра, отсеченный на уровне  $10^{-4}$ , на шкале даны степени логарифма,  $\log S_n$ . Спектр дискретен по волновым числам, кратным  $k_0 = 0.1$  рад/м. Кроме того, на рисунке построены спектры продольных волновых чисел

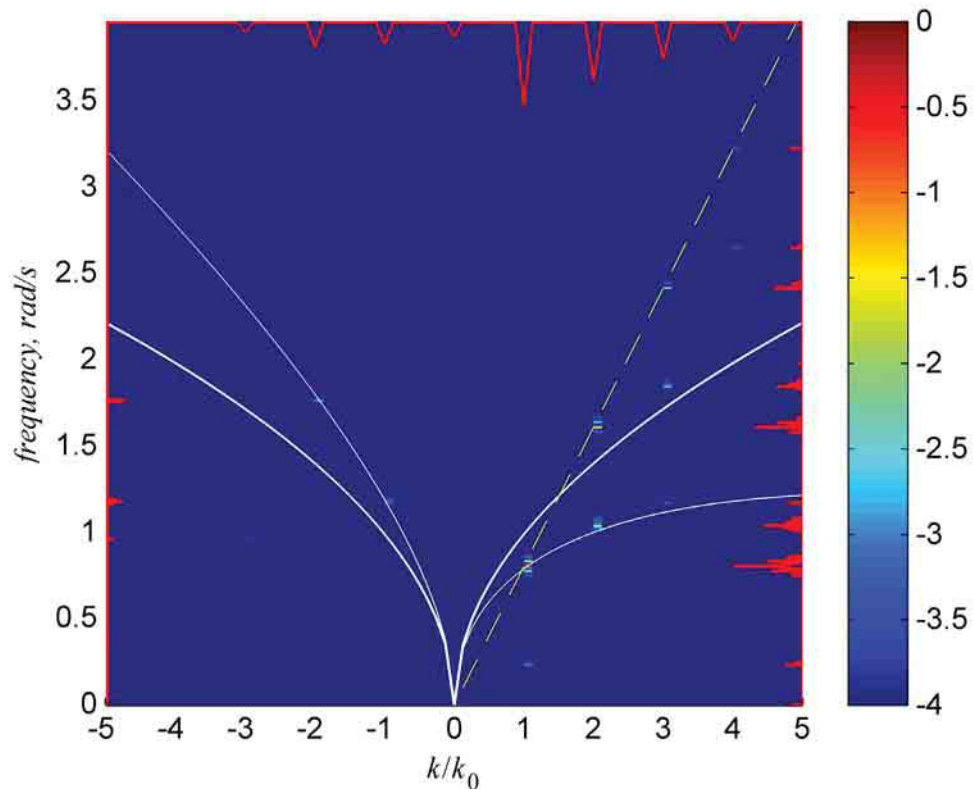


Рис. 5.5.5. Спектр  $\log S_1(k, \omega)$  для однородной захваченной волны построен цветом, красными линиями построены спектры  $S_1(k)$ ,  $S_1^+(\omega)$  и  $S_1^-(\omega)$  (вверху, слева и справа на панели). Жирная и тонкая белые линии показывают зависимости  $\omega_g(k)$  и  $\omega_g(k) - k|U_m|$  соответственно. Желтая штриховая линия проведена через точку  $k = 0$ ,  $\omega = 0$  и спектральный максимум. Случай  $k_0 H/2 = 0.15$ .

$$S_n(k) = \int_{\omega > 0} S_n(k, \omega) d\omega, \quad (5.5.6)$$

и частотные спектры для волн,двигающихся вправо (навстречу течению) и влево (по течению),

$$S_n^+(\omega) = \int_{k > 0} S_n(k, \omega) dk \quad \text{и} \quad S_n^-(\omega) = \int_{k < 0} S_n(k, \omega) dk. \quad (5.5.7)$$

Эти спектры также построены в полулогарифмических координатах и обрезаны по уровню  $10^{-4}$ . Спектры на Рис. 5.5.5 представляют богатую картину волн. В правой половине ( $k > 0$ ) расположены волны, бегущие против течения. Кроме пика в точке  $(k_0, \omega_p)$  (вблизи кривой  $\omega_g(k) - k|U_m|$ ) видны пики меньшей интенсивности для кратных гармоник (желтая штрихованная прямая), также видны волны с продольными волновыми числами  $2k_0, 3k_0$  и различные комбинационные гармоники. В левой половине спектра на Рис. 5.5.5, отвечающей за волны, попутные течению, видны слабые компоненты с продольными волновыми числами  $-k_0$  и  $-2k_0$ , расположенные вблизи линии  $\omega_g(k) - k|U_m|$ . В системе отсчета, движущейся против оси  $Ox$  со скоростью  $U_m$  для волн,двигающихся против  $Ox$ , захватывающим струйным течением является наоборот область на периферии течения  $U(y)$ . Перечисленные волновые компоненты, очевидно, вызваны неидеальностью задания начального условия.

Для более детального анализа частотного спектра рассмотрим его «срез», полученный

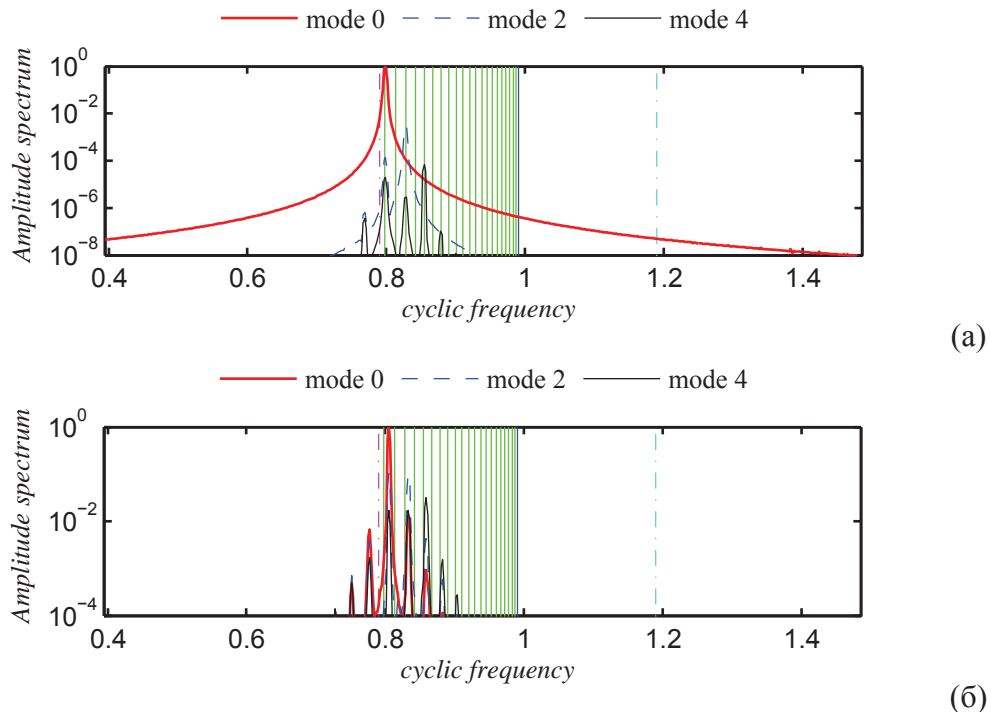


Рис. 5.5.6. Нормированный частотный спектр  $S_n^l(\omega)$  для  $n = 0$  (красный),  $n = 2$  (синий пунктир) и  $n = 4$  (черный) для случаев  $k_0H/2 = 0.01$  (а) и  $k_0H/2 = 0.15$  (б) (вертикальные оси отличаются минимальными пределами). Вертикальные зеленые линии – расчет частот захваченных мод, розовый штрих-пунктир показывает предельную частоту  $((g/k_0)^{1/2} - k_0|U_m|)$ , а синяя линия – частоту свободных волн  $\omega_g$ .

на выбранном уровне продольного волнового числа  $k = mk_0$ ,

$$S_n^m(\omega) = S_n(k = mk_0, \omega). \quad (5.5.8)$$

Соответствующие графики для среза на значении  $k_0$  даны на Рис. 5.5.6 для двух интенсивностей волны и для разных мод  $n=0, 2, 4$  (различными линиями). Спектр фундаментальной моды построен красной линией. Вертикальные зеленые линии отмечают частоты захваченных мод, определенные при численном решении краевой задачи.

Очевидна гребенчатая структура спектров с расстоянием между линиями примерно равным расстоянию между первой и третьей модой,  $\omega_2 - \omega_0$ . Видно, что максимум спектра лежит на теоретически предсказанном значении в случае волн малой интенсивности (Рис. 5.5.6а) и смещен вправо в случае волн большей крутизны (Рис. 5.5.6б). Спектры, построенные для других мод, также хорошо ложатся на расчетные значения частот захваченных волн. В частности, на Рис. 5.5.6а максимум третьей моды ( $n = 2$ ) приходится на частоту  $\omega_2$ , а максимум пятой моды ( $n = 4$ ) – на  $\omega_4$ . Отметим наличие на Рис. 5.5.6б дискретных спектральных пиков в области  $\omega < \omega_g(k) - k_0|U_m|$ ; как показывает более пристальный анализ картины спектральных пиков, эти частоты являются комбинационными.

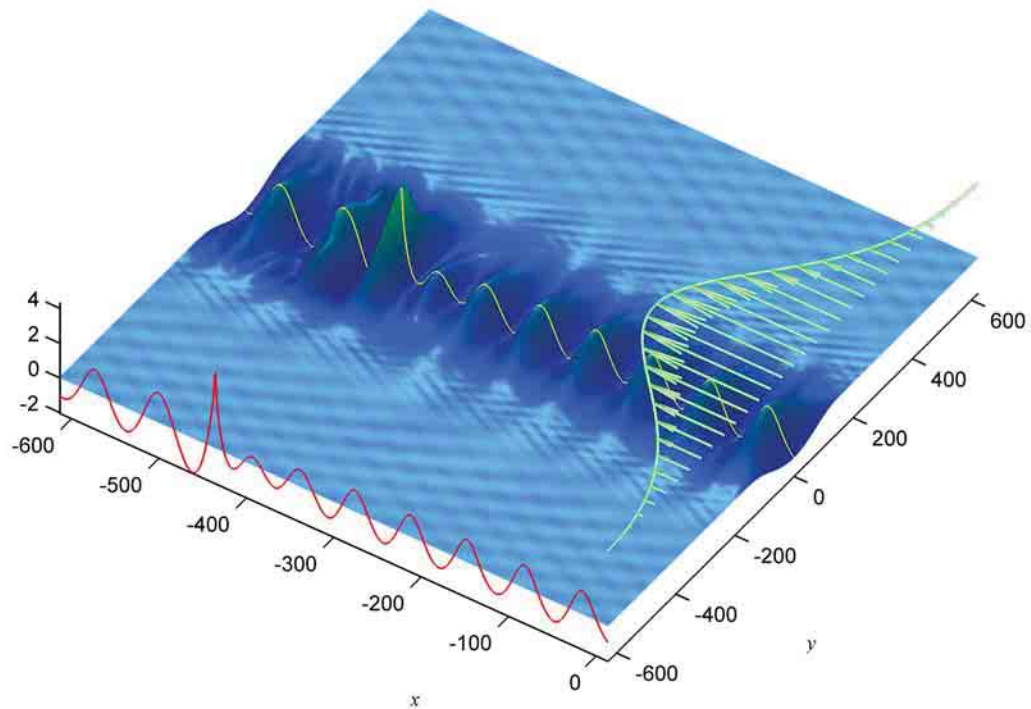


Рис. 5.5.7. Образование «волны-убийцы» в результате развития модуляционной неустойчивости фундаментальной моды захваченных волн. Вид поверхности перед обрушением волны ( $t = 829.4$  с); максимальная волна оценивается  $k_0H/2 \approx 0.32$ . Красной линией показан разрез вдоль течения через максимум ( $y = 0$ ). Все размеры – в метрах.

Уровень амплитуд комбинационных частот значительно падает в случае волн меньшей крутизны (ср. Рис. 5.5.6а и 5.5.6б).

Проявление в измеренных спектрах мод, не предполагаемых выбором условий экспериментов, очевидно, является результатом как минимум следующих эффектов: 1) неортогональностью мод, и потому процедура (5.5.3) не идеальна; 2) изменением структуры моды для нелинейных волн (наличие обсуждавшихся выше подчиненных, *slave*, мод); 3) возбуждением других мод в результате погрешностей при задании начальных условий. Критически важным результатом для развитой нами в Разделах 5.2-5.4 теории является то, что энергия, изначально содержащаяся практически в одной моде, удерживается ей в течение длительного времени, несмотря на нелинейный характер волн, а значит, и потенциально возможный 4-й тип возбуждения новых мод – через нелинейное резонансное взаимодействие. Рис. 5.5.4 не содержит признаков невозвратной утечки энергии из заданной моды. Примеры динамики моды более высокого порядка будут даны ниже.

### Модуляционная неустойчивость захваченных волн и образование «волн-убийц»

Важный эффект нелинейной динамики поверхностных волн на глубокой воде, лежащий в центре нашего исследования, связан с нелинейной самомодуляцией волн. Согласно Разделу 5.4, при реалистичных предположениях о достаточно слабом и широком струйном течении динамика моды захваченных волн описывается одномерным

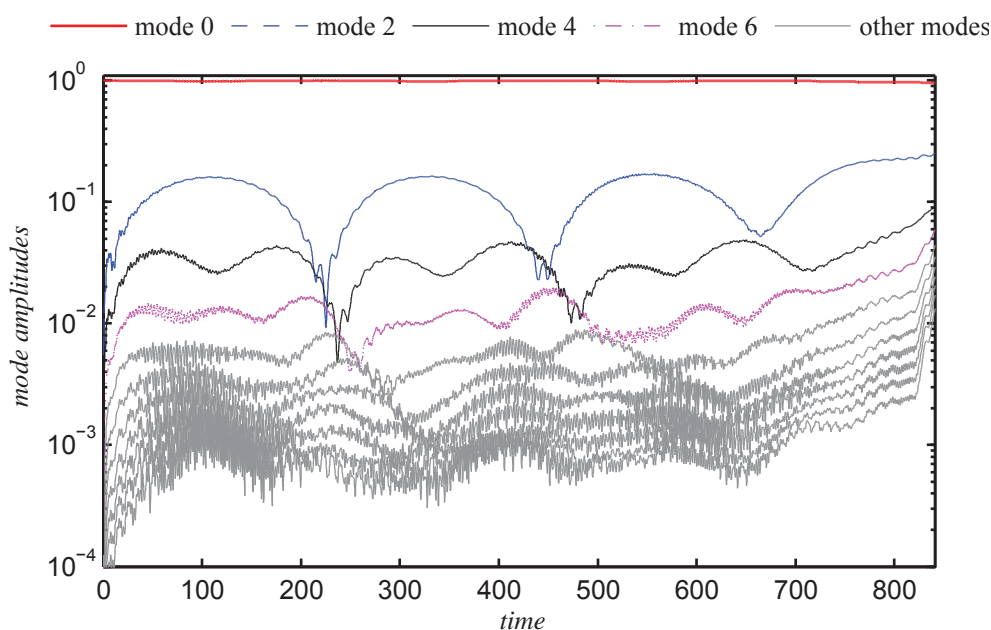


Рис. 5.5.8. Эволюция амплитуд захваченных мод при развитии модуляционной неустойчивости фундаментальной моды, изображенной на Рис. 5.5.7. Мода  $n = 0$  построена красным цветом,  $n = 2$  – синим пунктиром,  $n = 4$  – черной линией,  $n = 6$  – сиреневой штрихпунктирной линией и остальные четные моды – серым.



фокусирующим нелинейным уравнением Шредингера (5.4.10) (либо системой НУШ (5.4.2)), а потому моды подвержены неустойчивости. Здесь мы рассмотрим эволюцию захваченной моды, изначально модулированной вдоль течения.

Начальное условие соответствует 10 периодам волн, изображенных на Рис. 5.5.3в ( $k_0H/2 = 0.15$ ) с 5% модуляцией смещения поверхности и поверхностного потенциала, изначально практически не заметной глазу. С течением времени модуляция нарастает и волны достигают порога обрушения, что ведет к численной неустойчивости и остановке расчета через немногим более 100 периодов. Вид поверхности незадолго до обрушения показан на Рис. 5.5.7. К этому моменту высота максимальной волны превысила начальную более чем в 2 раза. Эволюция амплитуд захваченных волн показана на Рис. 5.5.8. Видны

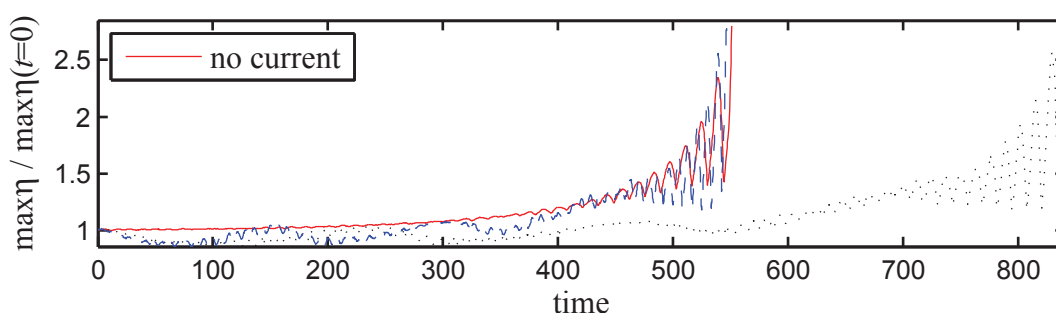


Рис. 5.5.9. Максимум смещения поверхности от времени для расчета модулированных захваченных волн с крутизной  $k_0H/2 = 0.15$  (черный пунктир), та же зависимость, но для шкалы времени, масштабированного с коэффициентом 0.65 (синий штрих) и расчета плоских волн той же крутизны без течения (красная линия).

долгопериодные осцилляции соседних по номеру мод той же четности (осцилляции амплитуды моды  $n=2$  составляют около 20%). При нарастании амплитуды волн и приближении к моменту обрушения моды с высшими номерами начинают расти по амплитуде (мода  $n=4$  вырастает по амплитуде до  $\sim 10\%$ ), тем самым одномодовый режим динамики нарушается.

В рамках выведенного для одной моды захваченных волн НУШ (5.4.11) отличие нелинейной динамики захваченных волн от динамики свободных волн проявляется, главным образом, в коэффициенте перекрытия мод  $I$  (5.4.13), появляющемся при нелинейном слагаемом. Он всегда положителен, но менее единицы, его реалистичная оценка сверху была определена равной  $\sim 0.7$ . Для профиля течения, использованного в численном моделировании в этом разделе, этот коэффициент равен  $I_0 \approx 0.71$ . На Рис. 5.5.9 построены зависимости максимума смещения поверхности от времени для вышеописанного расчета модуляционной неустойчивости захваченных волн (Рис. 5.5.7. 5.5.8) (черным пунктиром), а также для расчета модулированной плоской волны с такими же параметрами, но при «выключенном»

течении (красная линия). Путем масштабирования оси времени черный пунктир хорошо ложится на зависимость, построенную красной линией (синий пунктир на Рис.5.5.9), только использованный коэффициент масштабирования оси времени, равный 0.65, немного отличается от теоретического. Отметим на Рис.5.5.9 длинные осцилляции максимума для расчета волн на течении. По всей видимости, они связаны с осцилляциями амплитуд мод на Рис.5.5.8.

Таким образом, коэффициент нелинейности в уравнении (5.4.11) для мод захваченных волн на встречном течении удовлетворительно описывает эффект течения, приводящий к ослаблению нелинейности. Во время роста модуляции фундаментальной моды и приближении волн к порогу обрушения другие моды, по-видимому, приобретают энергию, хотя выполненный нами анализ не дает окончательного ответа на этот счет, поскольку основывается на разложении по базису, который 1) не ортогонален и 2) соответствует линейным модам.

### **Солитоны огибающей захваченных волн**

Как уже обсуждалось в диссертации, солитоны огибающей или другие подобные им долгоживущие когерентные структуры, с одной стороны, объясняют изменение статистики волн с сторону экстремизации, а с другой, – дают понимание процессов и потенциальную возможность краткосрочного оперативного прогноза «волн-убийц». Конечно, они являются интересными объектами для изучения и сами по себе.

Для моделирования солитонов огибающей начальное условие задано следующим образом. Решение в виде солитона огибающей (3.2.1) с поправками для связанных волн на глубокой воде (2.5.4)-(2.5.5) используется для описания решения вдоль  $Ox$  (смещение поверхности и поверхностный потенциал), затем оно домножается на функцию поперечного профиля  $Y_n(y)$  требуемой моды. На Рис. 5.5.10а,в показаны поверхности счетной области (она периодична по  $Ox$  и  $Oy$ ) для случаев фундаментальной моды  $n = 0$  и для  $n = 4$  соответственно. В обоих случаях интенсивность солитона огибающей, определенная по свободной компоненте волн, одинакова,  $k_0 A_s = 0.12$ ; как и прежде, продольное волновое число несущей  $k_0 = 0.1$  рад/с. Далее расчет шел, как и прежде, в рамках версии кода HOSM с учетом струйного течения, описанной в Приложении Б.

Поверхности на Рис. 5.5.10б,г показывают вид решения после того, как группы прошли длину вычислительной области дважды, что соответствует примерно 40 длинам волн или более 100 волновых периодов. Видео, демонстрирующее эти численные эксперименты,

можно найти в дополнительных материалах к нашей статье [Shrira & Slunyaev, 2014\*]<sup>\*</sup> Профили волн, построенные по бокам поверхностей на Рис. 5.5.10б,г, демонстрируют продольные и поперечные разрез волн: актуальные (красным) и в начальный момент времени (черным). Очевидно наличие излученных волн по ряби поверхности. По срезам видно, что волновые группы потеряли в амплитуде и, соответственно, несколько расширились. Более подробное рассмотрение эволюции максимума поля свидетельствует, что относительно сильное излучение солитонной группой происходит на начальной стадии эволюции; потом также происходит медленное снижение амплитуды. Всего за примерно 120 периодов солитонная группа на Рис. 5.5.10г потеряла 20-25% амплитуды. В случае фундаментальной моды (Рис. 5.5.10а-б) потери амплитуды меньше – около 10–15%. Потерю энергии на начальной стадии можно связать с неидеальностью задания начального условия. Временные зависимости амплитуд мод ведут подобно изображенным на Рис. 5.5.4 для однородных захваченных волн: имеются осцилляции амплитуд других мод, но нет явных трендов их роста.

Детальная картина пространственно-временного спектра, подобная построенной для однородной волны на Рис. 5.5.5, приведена для солитона фундаментальной моды на Рис. 5.5.11. На Рис. 5.5.11 четко видны компоненты несущей, второй и третьей гармоник и наведенное нелинейностью течение, расположенные на желтой штриховой линии. Картина спектра для другого приведенного примера, солитона моды  $n = 4$   $S_4(k, \omega)$ , выглядит очень похоже. Частотный спектр и спектр продольных волновых чисел построены в полулогарифмических координатах у правого и верхнего краев Рис. 5.5.11. Эти спектры довольно широкие, поскольку описывают короткую группу, и, на первый взгляд, потеряли гребенчатый характер. На Рис. 5.5.12 дан срез спектра  $S_n^I(\omega)$ , на котором видны гребенчатые спектры для первых трех мод, расположенные в соответствии с решением краевой задачи для частот захваченных волн, отмеченных вертикальными зелеными линиями. Хотя каждый срез спектра вдоль заданного  $k$  остается гребенчатым, они смещены друг относительно друга на плоскости  $(k, \omega)$  в соответствии с групповой скоростью солитонной группы, и их суперпозиция формирует сплошной частотный спектр, как показано справа на Рис. 5.5.11. Такая же ситуация наблюдается и в случае спектра для солитона огибающей моды  $n = 4$ .

Важно, что коэффициент нелинейности в НУШ для захваченных волн (5.4.11), в отличие от классического НУШ для свободных волн, не меняет своего знака для любых углов распространения волн (т.е., для любых захваченных волн). При выводе НУШ для захваченных волн не делалось предположения на квазипараксиальность лучей волн. Моды с

\* <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevE.89.041002>

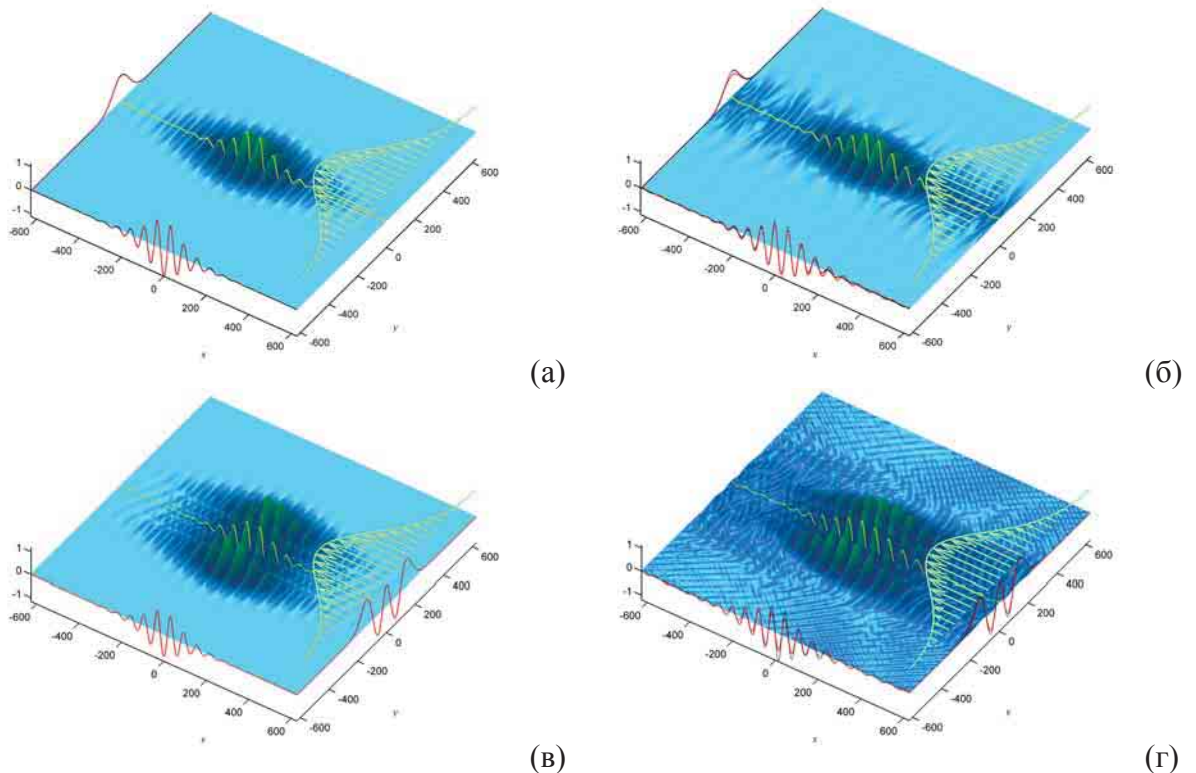


Рис. 5.5.10. Численное моделирование солитонов огибающей захваченных волн для  $k_0 A_s = 0.12$ : фундаментальная мода  $n=0$  (а,б) и мода  $n=5$  (в, г). Показаны поверхности воды в начальный момент (а, в) и после двух проходов вычислительного домена через более чем 100 периодов несущей волны (б, г). Профили по бокам красными линиями дают разрезы поверхности вдоль и поперек; на панелях (б, г) черными линиями – разрезы в начальный момент. Все размеры – в метрах.

высокими номерами имеют широкий угловой спектр, тем не менее, они остаются модуляционно неустойчивыми и описываются моделью НУШ. В частности, спектр волновых векторов, построенный для поля на Рис. 5.5.10в, имеет ширину, сопоставимую с  $k_0$ . Если для фундаментальной моды интеграл перекрытия равен  $I_0 \approx 0.71$ , то для пятой моды  $I_4 \approx 0.65$ , что несколько снижает эффективность нелинейных эффектов. Таким образом, волны, захваченные встречным струйным течением, представляют собой исключительную ситуацию, когда эффекты модуляционной неустойчивости и связанные с ними «волны-убийцы» могут возникать в поле волн с широким угловым спектром.

## 5.6 Заключение

По содержанию Главы 5 формулируются следующие основные результаты и выводы.

1. Предложен подход для последовательного описания линейной и нелинейной динамики волн на струйных течениях, основанный на модовом представлении. Предложено приближенное разделение переменных для двумерной краевой задачи на моды в случае широкого течения по сравнению с длиной волны вдоль течения, позволяющее свести задачу

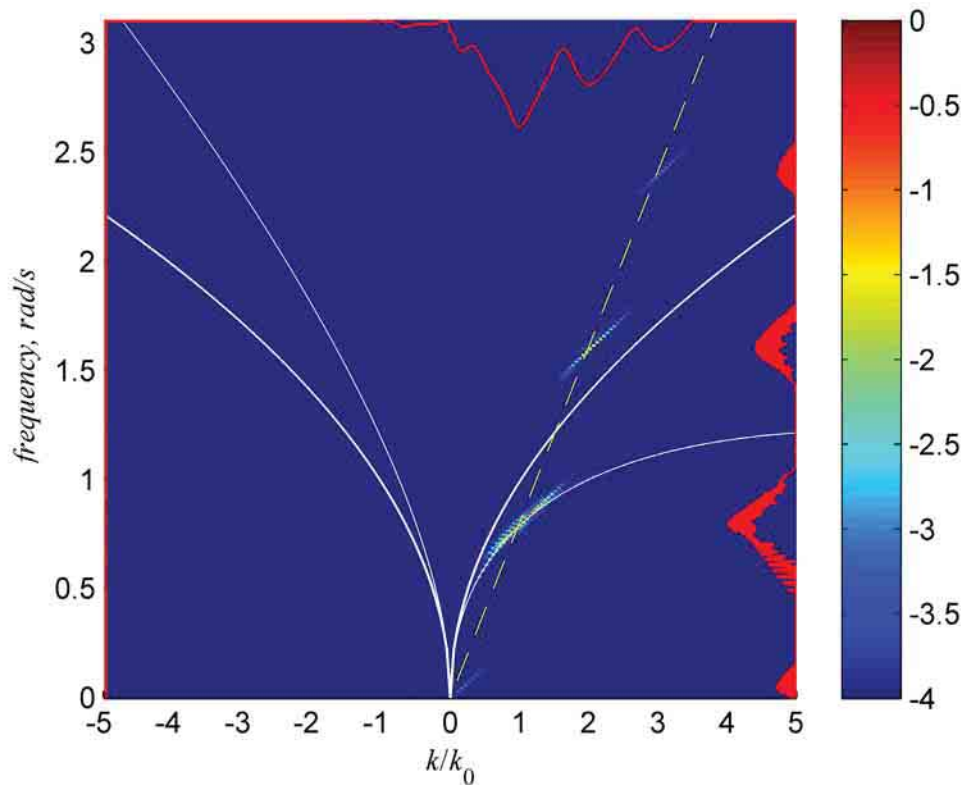


Рис. 5.5.11. Спектр  $\log S_1(k, \omega)$  для солитона огибающей на Рис. 5.5.10а-б построен цветом, красными линиями построены спектры  $S_1(k)$ ,  $S_1^+(\omega)$  и  $S_1^-(\omega)$  (вверху, слева и справа на панели). Жирная и тонкая белые линии показывают зависимости  $\omega_g(k)$  и  $\omega_g(k) - k|U_m|$  соответственно. Желтая штриховая линия проведена через точку  $k = 0$ ,  $\omega = 0$  и спектральный максимум.

к существенно более простой – одномерной, а в случае слабого течения – к классической задаче Штурма-Лиувилля с модами, составляющими полный базис. Показано хорошее согласие между решениями упрощенных одномерных краевых задач и исходной двумерной задачи. Оценено, что течение мыса Игольного может поддерживать до  $10^2$ – $10^3$  захваченных мод.

2. Выведены нелинейные эволюционные уравнения для взаимодействующих триад и квартетов захваченных мод, в том числе, без предположения о потенциальности волн. В зависимости от параметров задачи доминировать могут 3- или 4-волновые взаимодействия, либо их комбинация. Квадратичные резонансные взаимодействия ожидаются наиболее существенными для случая сильного течения, тогда продольные длины взаимодействующих волн сопоставимы. В случае слабого течения одна из волн в триаде должна быть много длиннее и быстрее остальных, а нелинейное взаимодействие ослабляется и может быть сопоставимым или слабее, чем эффекты кубической нелинейности. Показано, что в этом случае возможна перекачка энергии вниз по спектру в результате 3-волнового взаимодействия. В пределе одной моды захваченных волн с узким спектром на слабом

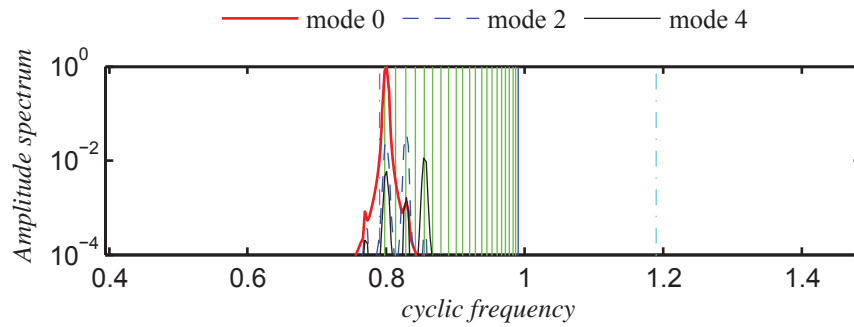


Рис. 5.5.12. Нормированный частотный спектр  $S_n^I(\omega)$  для  $n = 0$  (красный),  $n = 2$  (синий пунктир) и  $n = 4$  (черный) для случаев солитона огибающей захваченных волн, изображенного на Рис. 5.5.10а-б. Вертикальные зеленые линии – расчет частот захваченных мод, розовый штрих-пунктир показывает предельную частоту  $((g/k_0)^{1/2} - k_0|U_m|)$ , а синяя линия – частоту свободных волн  $\omega_g$ .

струйном течении эволюционное уравнение для захваченной моды по форме совпадает с нелинейным уравнением Шредингера; эффект течения проявляется в коэффициентах линейной скорости и нелинейности.

3. Выполнено численное моделирование динамики нелинейных захваченных волн в рамках полных уравнений гидродинамики в потенциальном приближении, в котором наблюдались гребенчатые спектры, соответствующие дискретному спектру захваченных волн, одномодовые режимы распространения захваченных волн, что подтверждает применимость модового подхода. Показана возможность образования «волн-убийц» в результате модуляционной неустойчивости захваченных волн. Результаты численного моделирования полных уравнений хорошо согласуются с разработанной нелинейной теорией для захваченных волн; в частности, подтверждено существование солитонов огибающей захваченных волн. Эти солитонные группы представляют собой долгоживущие когерентные трехмерные локализованные по всем направлениям волновые пакеты на поверхности глубокой воды, распространяющиеся вблизи струи течения ему навстречу.

4. Развитая теория нелинейных волн на струйных течениях позволяет предложить серию возможных механизмов формирования anomalously высоких волн, которые связаны с модовым характером захваченных волн и с эффективно одномерным характером нелинейной эволюции волн. Среди механизмов усиления волн на адиабатически изменяющемся течении можно выделить укручение волн на усиливающихся течениях, увеличение локализации мод на усиливающихся либо суживающихся течениях, адиабатическое усиление солитонных волновых групп (подобно рассмотренному в Разделе 4.4) на усиливающихся течениях. Одномерный характер нелинейной динамики трехмерных волн благоприятен для эффекта

нелинейной самомодуляции волн. В то же время, ограничивающая роль обрушения для трехмерных скрещенных волн снижается из-за увеличения порога обрушения и уменьшения доли потерь энергии после обрушения (см. в [Nepf et al, 1998; Babanin, 2011]), что делает волны потенциально более опасными.

5. Все эффекты одномерной динамики формирования экстремальных волн, исследовавшиеся в большинстве работ по «волнам-убийцам», в том числе, в Главах 2-4 диссертации, могут быть применимы к волнам, захваченным течением. В случае волн на струйных течениях реализуется гипотетическое предположение о возникновении «где-то в океане» условий для узкого углового спектра, в которых эффективна модуляционная неустойчивость. Отличие заключается в том, что возникновение нелинейной неустойчивости захваченных волн происходит и в случае широкого углового спектра.

6. Близость эволюционных моделей, описывающих захваченные волны на встречном течении, к интегрируемому НУШ (или связанным НУШ), подтвержденная прямым численным моделированием солитонных групп волн, позволяет использовать детерминистское описание «волн-убийц» в целях оперативного краткосрочного прогноза опасных событий. Рассмотренная проблема представляет исключительный пример, когда аномально высокие волны, вызванные нелинейной самомодуляцией волн, могут возникать в условиях широкого углового спектра. Предложенные индексы модуляционной неустойчивости для волн с конечным угловым спектром не способны описывать эту ситуацию.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации представлены результаты исследования нелинейных механизмов генерации аномально высоких волн на морской поверхности, позволившие построить типичный портрет «волн-убийц» и предложить подходы для вероятностного и детерминистского прогноза опасных волн. Более детально основные результаты диссертации можно сформулировать следующим образом.

1. Выведены асимптотические эволюционные уравнения 5-го порядка для огибающей нелинейных диспергирующих потенциальных волн на поверхности воды произвольной постоянной глубины. Полученная теория обобщает известные модели (нелинейное уравнение Шредингера, модель Диста), в частности, описывает модулированные волны в пределах мелкой и глубокой воды, а также описывает ситуацию вблизи критической глубины  $kh \approx 1.36$ . Показано, что порог модуляционной неустойчивости для волн конечной крутизны сдвигается от  $kh \approx 1.36$  в область мелкой воды.
2. Предложен оригинальный подход к анализу записей волн на поверхности глубокой воды и осуществления краткосрочного прогноза экстремальных волн, основанный на оконном анализе ассоциированной задачи рассеяния (в рамках метода обратной задачи рассеяния для нелинейного уравнения Шредингера, НУШ) и выделении солитоноподобных групп. По имеющимся инструментальным измерениям показано, что большинство «волн-убийц» возникает на фоне интенсивной когерентной волновой группы. Для ряда случаев интерпретация динамики в терминах бризеров НУШ (солитонов огибающей на фоновом волнении) способна полностью объяснить наблюдаемые высоты волн. По данным расчета полных уравнений гидродинамики выявлена сильная корреляция между спектральными квартетами, возникающая в полях нерегулярных волн.
3. Выполнено численное моделирование, реконструирующее пространственно-временную эволюцию событий «волн-убийц» по данным измерения смещения поверхности в одной точке. Времена жизни «волн-убийц» по данным расчетов достигают 100 с (порядка 10 периодов волн). Показана реалистичность реконструкций интенсивных морских волн для записей длительностью до 10 мин. Ограничения используемой теории для прогрессивных волн приводят к систематическому занижению реконструированных высот волн.
4. В рамках численного и лабораторного моделирования показано существование структурно устойчивых уединенных групп волн (квазисолитонов огибающей) во всем диапазоне амплитуд: от малых до предела обрушения (в пренебрежении поперечными эффектами). В случае большой амплитуды такие группы представимы всего 2-3



осцилляциями. Их вертикальная асимметрия подобна асимметрии однородных волн Стокса, но нелинейная поправка к скорости существенно больше. Такие группы могут взаимодействовать неупруго, либо почти упруго в зависимости от соотношения параметров. Аналитическое решение солитона огибающей нелинейного уравнения Шредингера может быть использовано для генерации солитонных групп в лабораторных условиях до крутизны 0.3 (определенной по высоте гребня). Эволюция интенсивных солитонов огибающей может быть довольно хорошо описана в рамках обобщенного уравнения Шредингера (модели Диста) до крутизн волн порядка 0.2. Для еще больших крутизн отличия становятся качественными и быстро проявляются.

5. Детально исследовано развитие и нелинейная стадия одномодовой модуляционной неустойчивости потенциальных волн на поверхности глубокой воды в области параметров, наиболее интересных в приложении к морским «волнам-убийцам», в рамках полных уравнений гидродинамики. Показано, что порог возникновения модуляционной неустойчивости занижен, и нелинейная фокусировка происходит медленнее, чем предсказывает решение слабо нелинейной теории. Дано количественное описание порога модуляционной неустойчивости, картины максимального усиления амплитуд гребней и впадин, а также высот волн во всем рассмотренном диапазоне параметров вне обрушения. Тем самым, показано существование сильно нелинейных аналогов бризерных решений НУШ. Максимальное усиление амплитуд гребней необрушающихся волн чуть менее 4.2, максимальное усиление амплитуд ложбин, максимальное усиление высот волн – около 3. Обнаружена и описана универсальная картина максимальной группы и максимальной волны в такой группе. Исследована динамика мультибризерных решений нелинейного уравнения Шредингера в ситуации сильной нелинейности.
6. Изучена общая картина эволюции ансамблей однонаправленных поверхностных волн с заданным начальным спектром. Предложена ее параметризация в терминах индекса модуляционной неустойчивости,  $BFI$ , и характерного масштаба кубической нелинейности,  $T_{nl}$ . В случае  $BFI > 1$  усредненный спектр волн претерпевает существенные изменения, сначала расширяясь, а затем частично сужаясь. Волны достигают нового состояния статистического равновесия за  $1-2T_{nl}$ , при этом моментальное значение  $BFI$  становится примерно равным единице. Максимальная вероятность высоких волн и наибольшие значения 4-го статистического момента (эксцесса) смещения поверхности достигаются во время вышеописанной переходной стадии установления нового состояния равновесия, когда происходит формирование волновых групп. Такой же эффект возникает и при других способах нарушения статистического равновесия: искусственного перемешивания

фаз гармоник Фурье, быстрого включения или выключения мощной накачки волн извне. При этом нарушается пропорциональная связь между эксцессом смещения поверхности и  $BFI$ , полученная ранее теоретически в приближениях близости к стационарному гауссовому процессу.

7. Проведено стохастическое моделирование интенсивных поверхностных морских волн с модельным спектром (гауссовым и JONSWAP) в предположении однонаправленного распространения. Проанализирована эволюция сильно нелинейных нерегулярных волн на пространственно-временных областях  $10 \text{ км} \times 20 \text{ мин}$ . Впервые обнаружена асимметрия фронтов экстремальных волн в случае морского состояния, характеризуемого большой степенью нелинейности. Показано несоответствие в статистическом смысле между волнами большой высоты и волнами с большими скоростями жидкости на поверхности.
8. Предложен подход для последовательного описания линейной и нелинейной динамики волн на струйных течениях, основанный на модовом представлении. Предложено разделение переменных для двумерной краевой задачи на моды в случае широкого течения по сравнению с длиной волны вдоль течения, позволяющее свести задачу к существенно более простой – одномерной, а в случае слабого течения – к классической задаче Штурма-Лиувилля с модами, составляющими полный базис. Показано хорошее согласие между решениями упрощенных одномерных краевых задач и исходной двумерной задачи.
9. Выведены нелинейные эволюционные уравнения для взаимодействующих триад (непотенциальная теория) и квартетов (в потенциальном приближении) захваченных мод на течении. В зависимости от параметров задачи доминировать могут 3- или 4-волновые взаимодействия, либо их комбинации. Квадратичные резонансные взаимодействия ожидаются наиболее существенными для случая сильного течения, тогда продольные длины взаимодействующих волн сопоставимы. В случае слабого течения одна из волн в триаде много длиннее и быстрее остальных, а нелинейное взаимодействие ослабляется и может быть сопоставимым или слабее, чем эффекты кубической нелинейности. Возможна перекачка энергии вниз по спектру в результате 3-волнового взаимодействия. Решения полученной слабо нелинейной теории для 4-волновых взаимодействий модулированных волн проверены в рамках численного моделирования исходных уравнений гидродинамики (в предположении потенциальности движения). Показано существование долгоживущих когерентных локализованных по всем направлениям волновых пакетов, распространяющихся навстречу течению вблизи его струи (солитоны огибающей захваченных волн).

**10.** Предложены возможные механизмы формирования аномально высоких волн в поле захваченных течением волн. На адиабатически изменяющемся течении это: укрупнение волн на усиливающемся течении, увеличение локализации мод на усиливающемся либо суживающемся течениях, адиабатическое усиление солитонных волновых групп на усиливающемся течении. Эффективно одномерный характер динамики захваченных волн делает возможным развитие модуляционной неустойчивости даже в случае широкого углового спектра волн. Возможность образования аномально высоких волн в результате нелинейной самомодуляции захваченных волн предсказана в рамках слабо нелинейной теории и показана в рамках численного моделирования полных уравнений гидродинамики. Близость эволюционных моделей, описывающих захваченные волны на встречном течении, к интегрируемым системам позволяет развивать детерминистское описание «волн-убийц» в целях краткосрочного прогноза опасных событий.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А. Коэффициенты уравнения огибающей высокого порядка

В приведенных ниже выражениях коэффициенты при слагаемых высших порядков малости выражены через коэффициенты при низших порядках. Такое представление удобно для проверки выкладок и понимания вкладов различных эффектов. Выражение для скорости  $V$  где-то подставлено в коэффициенты, а где-то нет – с целью сократить размер формул.

### Коэффициенты выбора компонент поля:

$$p_1 = h\sigma + \frac{V}{\omega}$$

$$p_{21} = \frac{\beta_1}{\omega} + k^2 h^2 \frac{3\sigma^4 - 2\sigma^2 + 1}{4k^2 \sigma^2} + \frac{kh}{2k^2 \sigma} + \frac{1}{4k^2}$$

$$p_{22} = \frac{\tilde{\alpha}_1}{\omega} + \frac{k^2 V \sigma^2 - \omega k}{\omega^2} \gamma_1 + k^2 \frac{-\sigma^4 - 2\sigma^2 + 1}{\omega(\sigma^2 + 1)} \chi_1 + k^4 \frac{\sigma^2(5\sigma^2 - 8)}{8\omega^2}$$

### Коэффициенты нелинейных взаимодействий:

$$\chi_1 = 3k^2 \frac{\sigma^4 - 1}{8\omega\sigma^2}$$

$$\chi_2 = \left( kh \frac{-\sigma^2 + 3}{k\sigma} + \frac{1}{k} \right) \chi_1 + 3k^2 h \frac{(\sigma^4 - 1)(3\sigma^2 + 1)}{16\omega\sigma^3} + 9k \frac{-\sigma^4 + 1}{16\omega\sigma^2}$$

$$\chi_{31} = -2 \frac{\sigma^2 + 1}{\omega\sigma^2} \tilde{\alpha}_1 \chi_1 + k^2 \frac{\sigma^4 + 4\sigma^2 + 3}{8\omega^2 \sigma^2} \tilde{\alpha}_1 + \left( k^2 h \frac{(\sigma^2 - 1)(3\sigma^2 - 1)}{2\omega\sigma^3} + k \frac{\sigma^2 + 5}{2\omega\sigma^2} \right) \gamma_1 \chi_1 +$$

$$+ \left( k^4 h \frac{(\sigma^2 - 1)^2 (\sigma^2 + 1)}{4\omega^2 \sigma} - k^3 \frac{2\sigma^6 + \sigma^4 + 2\sigma^2 + 3}{8\omega^2 \sigma^2} \right) \gamma_1 + k^4 \frac{\sigma^4 - 4\sigma^2 + 19}{4\omega^2} \chi_1 +$$

$$+ 3k^2 \frac{(1 - \sigma^4)(5\sigma^2 + 3)}{4\omega\sigma^2(3\sigma^2 + 1)} \nu_1 + k^6 \frac{-21\sigma^6 + 4\sigma^4 - 27\sigma^2 - 52}{96\omega^3}$$

$$\begin{aligned}\chi_{32} = & -2 \frac{\sigma^2 + 1}{\omega \sigma^2} \beta_1 \chi_1 + k^2 \frac{\sigma^4 + 4\sigma^2 + 3}{8\omega^2 \sigma^2} \beta_1 + \left( kh \frac{\sigma^2 - 3}{2k\sigma} - \frac{1}{2k} \right) \chi_2 + \\ & + \left( k^2 h^2 \frac{\sigma^6 - 9\sigma^4 + 15\sigma^2 + 1}{8k^2 \sigma^4} + kh \frac{-\sigma^4 + 6\sigma^2 - 1}{4k^2 \sigma^3} + \frac{\sigma^2 + 1}{8k^2 \sigma^2} \right) \chi_1 + \\ & + k^2 h^2 \frac{-17\sigma^8 + 4\sigma^6 + 14\sigma^4 - 4\sigma^2 + 3}{32\omega \sigma^4} + kh \frac{(\sigma^4 - 1)(9\sigma^2 + 1)}{16\omega \sigma^3} - \frac{(\sigma^2 + 1)^2}{32\omega \sigma^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_{33} = & \left( kh \frac{\sigma^2 - 3}{2k\sigma} - \frac{1}{2k} \right) \chi_2 + \left( k^2 h^2 \frac{\sigma^6 - 9\sigma^4 + 15\sigma^2 + 1}{8k^2 \sigma^4} + kh \frac{-\sigma^4 + 6\sigma^2 - 1}{4k^2 \sigma^3} + \frac{\sigma^2 + 1}{8k^2 \sigma^2} \right) \chi_1 - \\ & - k^2 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)^2 (1 + \sigma^2)}{8\omega \sigma^2} + kh \frac{(\sigma^4 - 1)(2\sigma^2 + 1)}{8\omega \sigma^3} + \frac{-\sigma^4 + 1}{8\omega \sigma^2} \\ v_1 = & k^2 \frac{-3\sigma^6 - 13\sigma^4 + 5\sigma^2 + 3}{8\omega \sigma^2 (\sigma^2 + 1)} \chi_1 + k^4 \frac{(\sigma^2 - 1)(9\sigma^4 - 1)}{64\omega^2 \sigma^2}\end{aligned}$$

**Коэффициенты линейной дисперсии:**

$$\beta_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}, \quad \beta_2 = -\frac{1}{6} \frac{\partial^3 \omega}{\partial k^3}, \quad \beta_3 = \frac{1}{24} \frac{\partial^4 \omega}{\partial k^4}$$

Эти выражения могут быть вычислены по дисперсионной зависимости для гравитационных волн (2.2.24), мы не приводим их вида.

**Коэффициенты компонент наведенного течения:**

$$\begin{aligned}\gamma_1 = & \frac{k^2 V (\sigma^2 - 1) - 2\omega k}{4V_d^2} \\ \gamma_2 = & 2 \frac{V}{V_d^2} \gamma_1 \beta_1 + k^2 \frac{\sigma^2 - 1}{4V_d^2} \beta_1 + \frac{\omega^2 - k^2 V^2 (\sigma^2 + 1)}{4\omega V_d^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{31} = & k^2 \frac{\sigma^2 - 1}{8V_d^2} (\tilde{\alpha}_{21} + \tilde{\alpha}_{22}) + \frac{V}{V_d^2} (\tilde{\alpha}_{21} + \tilde{\alpha}_{22}) \gamma_1 - 2 \frac{V}{V_d^2} \tilde{\alpha}_1 \gamma_2 - \frac{1}{V_d^2} \tilde{\alpha}_1 \gamma_1 \beta_1 + \\
& + \frac{k\omega + 3k^2 V (\sigma^2 + 1)}{4\omega V_d^2} \tilde{\alpha}_1 - 3 \frac{V}{2V_d^2} \gamma_1^2 + \left( k^3 h \frac{\sigma^4 - 1}{4\sigma V_d^2} - k^2 \frac{\sigma^2 + 1}{2V_d^2} \right) \gamma_1 + \\
& + \left( \omega k^2 h \frac{(\sigma^2 - 1)(-7\sigma^4 - 2\sigma^2 + 1)}{2\sigma(\sigma^2 + 1)^2 V_d^2} + \omega k \frac{3\sigma^4 - 6\sigma^2 - 5}{2(\sigma^2 + 1)^2 V_d^2} \right) \chi_1^2 + \\
& + \left( k^4 h \frac{(\sigma^2 - 1)^2 (7\sigma^2 + 1)}{4\sigma(\sigma^2 + 1) V_d^2} + k^3 \frac{-2\sigma^4 + 5\sigma^2 + 1}{2(\sigma^2 + 1) V_d^2} \right) \chi_1 + \\
& + k^6 h \frac{\sigma(\sigma^2 - 1)(-3\sigma^2 + 11)}{32\omega V_d^2} + k^5 \frac{\sigma^2(3\sigma^2 - 23)}{32\omega V_d^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{32} = & -2 \frac{V}{V_d^2} \gamma_2 \beta_1 + 2 \frac{V}{V_d^2} \gamma_1 \beta_2 - \frac{1}{V_d^2} \gamma_1 \beta_1^2 + h^2 \frac{V_d^2 - 2V^2}{6V_d^2} \gamma_1 + \\
& + k^2 \frac{\sigma^2 - 1}{4V_d^2} \beta_2 + k^2 V \frac{\sigma^2 + 1}{2\omega V_d^2} \beta_1 + \omega k^3 h^3 \frac{(\sigma^2 - 1)^4}{32k\sigma^3 V_d^2} + \\
& + 3\omega k^2 h^2 \frac{(-\sigma^2 + 1)^3}{32k\sigma^2 V_d^2} + \omega k h \frac{(\sigma^2 - 1)(3\sigma^2 + 1)}{32k\sigma V_d^2} - \omega \frac{\sigma^2 + 3}{32kV_d^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{33} = & 4 \frac{V}{V_d^2} \gamma_2 \beta_1 - 2 \frac{V}{V_d^2} \gamma_1 \beta_2 + \frac{2}{V_d^2} \gamma_1 \beta_1^2 + h^2 \frac{V_d^2 - 2V^2}{3V_d^2} \gamma_1 + \\
& + k^2 \frac{-\sigma^2 + 1}{4V_d^2} \beta_2 + \frac{k\omega - k^2 V (\sigma^2 + 1)}{2\omega V_d^2} \beta_1 + \omega k^3 h^3 \frac{(\sigma^2 - 1)^3 (\sigma^2 + 1)}{32k\sigma^3 V_d^2} + \\
& + \omega k^2 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)^2 (-3\sigma^2 + 1)}{32k\sigma^2 V_d^2} + \omega k h \frac{(\sigma^2 - 1)(3\sigma^2 - 1)}{32k\sigma V_d^2} - \omega \frac{\sigma^2 + 1}{32kV_d^2}
\end{aligned}$$

**Коэффициенты уравнений:**

$$\tilde{\rho}_{11} = k^2 \frac{\sigma^4 - 3}{2(\sigma^2 + 1)} \chi_1 + k^4 \frac{-5\sigma^4 + 16\sigma^2 - 3}{16\omega}$$

$$\tilde{\rho}_{12} = \frac{2\omega k - k^2 V (\sigma^2 - 1)}{2\omega}$$

$$\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\rho}_{11} + \tilde{\rho}_{12} \gamma_1$$

$$\begin{aligned}
P_{21} = & \left( k^2 h^2 \frac{-4\sigma^6 + 7\sigma^4 - 2\sigma^2 - 1}{8\sigma^2} + kh \frac{4\sigma^4 - 9\sigma^2 + 3}{4\sigma} + \frac{-4\sigma^2 + 19}{8} \right) \gamma_1 + \\
& + k^2 \frac{-\sigma^4 + 3}{2(\sigma^2 + 1)} \chi_2 + \left( k^2 h \frac{-3\sigma^6 + 7\sigma^4 - 9\sigma^2 - 3}{4\sigma(\sigma^2 + 1)} + 3k \frac{\sigma^4 - 5}{4(\sigma^2 + 1)} \right) \chi_1 + \\
& + k^4 h \frac{11\sigma^6 - 23\sigma^4 + 9\sigma^2 + 3}{16\omega\sigma} + k^3 \frac{-11\sigma^4 + 40\sigma^2 - 9}{16\omega}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{22} = & \left( -k^2 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)^2}{8} + kh \frac{\sigma^4 - 5\sigma^2 + 2}{4\sigma} + \frac{-\sigma^2 + 8}{8} \right) \gamma_1 + \\
& + \left( k^2 h \frac{(\sigma^2 - 1)(\sigma^4 + 3)}{4\sigma(\sigma^2 + 1)} - k \frac{\sigma^4 + 3}{4(\sigma^2 + 1)} \right) \chi_1 + k^4 h \frac{-3\sigma^6 - 5\sigma^4 + 11\sigma^2 - 3}{32\omega\sigma} + 3k^3 \frac{\sigma^4 - 1}{32\omega}
\end{aligned}$$

$$\tilde{\rho}_{21} = P_{21} + s\beta_1\gamma_1, \quad \tilde{\rho}_{22} = P_{22} - s\beta_1\gamma_1$$

$$s = k^2 \frac{\sigma^2 - 1}{2\omega}$$

$$\tilde{\alpha}_{21} = \tilde{\rho}_{21} - \tilde{\rho}_{12}\gamma_2, \quad \tilde{\alpha}_{22} = \tilde{\rho}_{22} + \tilde{\rho}_{12}\gamma_2$$

$$\begin{aligned}
P_{31} = & \frac{1}{2\omega} \tilde{\alpha}_1 + \frac{k^2 V(\sigma^2 - 1) - 2\omega k}{2\omega^2} \tilde{\alpha}_1 \gamma_1 + k^2 \frac{3\sigma^2 + 1}{\omega(\sigma^2 + 1)} \tilde{\alpha}_1 \chi_1 + 3k^4 \frac{\sigma^4 - 12\sigma^2 + 3}{16\omega^2} \tilde{\alpha}_1 + \\
& + \left( k^4 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)^3}{8\omega} - k^3 h \frac{(\sigma^2 - 1)^3}{4\omega\sigma} + k^2 \frac{\sigma^4 - \sigma^2 + 4}{8\omega} \right) \gamma_1^2 + \\
& + \left( k^4 h \frac{(\sigma^2 - 1)(2\sigma^6 - 7\sigma^4 + 8\sigma^2 + 1)}{4\omega\sigma(\sigma^2 + 1)} + k^3 \frac{-2\sigma^6 + 7\sigma^4 - 20\sigma^2 - 5}{4\omega(\sigma^2 + 1)} \right) \gamma_1 \chi_1 + \\
& + \left( k^6 h \frac{\sigma(\sigma^2 - 1)^2(-7\sigma^2 + 13)}{16\omega^2} + k^5 \frac{7\sigma^6 - 23\sigma^4 + 49\sigma^2 - 9}{16\omega^2} \right) \gamma_1 + \\
& + k^2 \frac{\sigma^4 - 3}{2(\sigma^2 + 1)} \chi_{31} + k^4 \frac{\sigma^2(\sigma^6 - 17\sigma^4 - \sigma^2 + 37)}{2\omega(\sigma^2 + 1)^2} \chi_1^2 + 3k^2 \frac{-\sigma^4 - 4\sigma^2 + 3}{2(\sigma^2 + 1)} \chi_1 \nu_1 + \\
& + k^6 \frac{-36\sigma^8 + 318\sigma^6 - 561\sigma^4 - 82\sigma^2 + 27}{48\omega^2(\sigma^2 + 1)} \chi_1 + 3k^4 \frac{19\sigma^6 + 5\sigma^4 - 51\sigma^2 + 3}{16\omega(3\sigma^2 + 1)} \nu_1 + \\
& + k^8 \frac{\sigma^2(117\sigma^6 - 578\sigma^4 + 1175\sigma^2 - 378)}{384\omega^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{32} = & \frac{2}{\omega} \tilde{\alpha}_1 \beta_1 + \frac{V_d^2 - 2\omega h \sigma V}{\omega^2} \tilde{\alpha}_1 + \left( -k^2 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)^2}{8} + kh \frac{\sigma^4 - 5\sigma^2 + 2}{4\sigma} + \frac{-\sigma^2 + 8}{8} \right) \gamma_2 + \\
& + \frac{k^2 V (\sigma^2 - 1) - 2\omega k}{2\omega^2} \gamma_1 \beta_1 + \left( -k^3 h^3 \frac{(\sigma^2 - 1)^2 (12\sigma^4 + \sigma^2 + 1)}{16k\sigma^3} + \right. \\
& + k^2 h^2 \frac{24\sigma^6 - 53\sigma^4 + 16\sigma^2 + 5}{16k\sigma^2} + kh \frac{-12\sigma^4 + 27\sigma^2 - 7}{16k\sigma} + \frac{3}{16k} \left. \right) \gamma_1 + k^2 \frac{-\sigma^2 + 1}{2\omega} \beta_1 \chi_1 + \\
& + k^4 \frac{5\sigma^4 - 16\sigma^2 + 3}{8\omega^2} \beta_1 + k^2 \frac{\sigma^4 - 3}{2(\sigma^2 + 1)} \chi_{32} + \left( k^2 h \frac{-3\sigma^6 + 7\sigma^4 - 9\sigma^2 - 3}{8\sigma(\sigma^2 + 1)} + 3k \frac{\sigma^4 - 5}{8(\sigma^2 + 1)} \right) \chi_2 + \\
& + \left( k^2 h^2 \frac{-7\sigma^8 + 5\sigma^6 + \sigma^4 + 11\sigma^2 - 2}{8\sigma^2(\sigma^2 + 1)} + kh \frac{3\sigma^6 - 4\sigma^4 + 9\sigma^2 + 4}{4\sigma(\sigma^2 + 1)} + \frac{\sigma^4 - \sigma^2 + 6}{8(\sigma^2 + 1)} \right) \chi_1 + \\
& + 3k^4 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)(11\sigma^6 - 17\sigma^4 - \sigma^2 - 1)}{32\omega\sigma^2} + k^3 h \frac{(\sigma^2 - 1)(-17\sigma^4 + 28\sigma^2 + 3)}{16\omega\sigma} + k^2 \frac{\sigma^4 - 10\sigma^2 + 3}{32\omega}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{33} = & \frac{V_d^2 - 2\omega h \sigma V}{2\omega^2} \tilde{\alpha}_1 + \left( k^2 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)^2}{8} + kh \frac{-\sigma^4 + 5\sigma^2 - 2}{4\sigma} + \frac{\sigma^2 - 8}{8} \right) \gamma_2 + \\
& + \left( -3k^3 h^3 \frac{(\sigma^2 - 1)^2 (\sigma^2 + 1)}{16k\sigma} + k^2 h^2 \frac{5\sigma^6 - 18\sigma^4 + 3\sigma^2 + 2}{16k\sigma^2} + kh \frac{-\sigma^4 + 13\sigma^2 - 4}{16k\sigma} + \frac{-\sigma^2 + 2}{16k} \right) \gamma_1 + \\
& + k^2 \frac{\sigma^4 + 6\sigma^2 + 1}{2\omega(\sigma^2 + 1)} \beta_1 \chi_1 + k^4 \frac{-7\sigma^4 - 4\sigma^2 + 3}{16\omega^2} \beta_1 + \left( k^2 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)(-5\sigma^6 - 4\sigma^4 + 3\sigma^2 - 2)}{8\sigma^2(\sigma^2 + 1)} + \right. \\
& + kh \frac{(\sigma^2 - 1)^2 (\sigma^2 + 2)}{4\sigma(\sigma^2 + 1)} + \frac{3\sigma^4 - 5\sigma^2 - 6}{8(\sigma^2 + 1)} \left. \right) \chi_1 + k^4 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)(21\sigma^6 - 43\sigma^4 + \sigma^2 - 3)}{64\omega\sigma^2} + \\
& + k^3 h \frac{(\sigma^2 - 1)(-5\sigma^4 + 10\sigma^2 - 3)}{32\omega\sigma} + k^2 \frac{-11\sigma^4 + 46\sigma^2 - 9}{64\omega}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
P_{34} = & \frac{2}{\omega} \tilde{\alpha}_1 \beta_1 + 2 \frac{V_d^2 - 2\omega h \sigma V}{\omega^2} \tilde{\alpha}_1 + \left( k^2 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)^2 (3\sigma^2 + 1)}{8\sigma^2} + kh \frac{(\sigma^2 - 1)(-3\sigma^2 + 1)}{4\sigma} + \right. \\
& \left. + \frac{3\sigma^2 - 11}{8} \right) \gamma_2 + \left( -k^2 h \frac{(\sigma^2 - 1)(3\sigma^2 + 1)}{4\omega\sigma} + 3k \frac{\sigma^2 - 1}{4\omega} \right) \gamma_1 \beta_1 + \left( -k^3 h^3 \frac{(\sigma^2 - 1)^2 (7\sigma^2 + 3)}{8k\sigma} + \right. \\
& \left. + k^2 h^2 \frac{13\sigma^6 - 38\sigma^4 + 11\sigma^2 + 6}{8k\sigma^2} + kh \frac{-5\sigma^4 + 25\sigma^2 - 8}{8k\sigma} + \frac{-\sigma^2 + 2}{8k} \right) \gamma_1 + \\
& \left( k^2 h \frac{(\sigma^2 - 1)(\sigma^4 + 3)}{4\sigma(\sigma^2 + 1)} - k \frac{\sigma^4 + 3}{4(\sigma^2 + 1)} \right) \chi_2 + \left( k^2 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)(-7\sigma^6 - 33\sigma^4 - 9\sigma^2 + 1)}{8\sigma^2(\sigma^2 + 1)} + \right. \\
& \left. + kh \frac{-\sigma^6 + 11\sigma^4 - 11\sigma^2 + 9}{4\sigma(\sigma^2 + 1)} + \frac{(\sigma^2 - 1)(9\sigma^2 + 5)}{8(\sigma^2 + 1)} \right) \chi_1 + k^4 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)(21\sigma^6 - 41\sigma^4 - 7\sigma^2 + 3)}{32\omega\sigma^2} + \\
& + k^3 h \frac{(\sigma^2 - 1)(-\sigma^4 + 18\sigma^2 - 3)}{16\omega\sigma} + k^2 \frac{-19\sigma^4 + 44\sigma^2 - 3}{32\omega}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{35} = & \frac{1}{\omega} \tilde{\alpha}_1 \beta_1 + \frac{V_d^2 - 2\omega h \sigma V}{\omega^2} \tilde{\alpha}_1 + \left( -k^2 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)^2 (3\sigma^2 + 1)}{8\sigma^2} + kh \frac{(\sigma^2 - 1)(3\sigma^2 - 1)}{4\sigma} + \frac{-3\sigma^2 + 11}{8} \right) \gamma_2 + \\
& \left( k^2 h \frac{(\sigma^2 - 1)(3\sigma^2 + 1)}{4\omega\sigma} + 3k \frac{-\sigma^2 + 1}{4\omega} \right) \gamma_1 \beta_1 + \left( -k^3 h^3 \frac{\sigma(\sigma^2 - 1)^2}{2k} + k^2 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)(2\sigma^4 - 3\sigma^2 - 1)}{2k\sigma^2} + \right. \\
& \left. + kh \frac{-\sigma^4 + 3\sigma^2 - 1}{2k\sigma} \right) \gamma_1 + k^2 \frac{\sigma^4 - 3}{2(\sigma^2 + 1)} \chi_{33} + \left( k^2 h \frac{-3\sigma^6 + 7\sigma^4 - 9\sigma^2 - 3}{8\sigma(\sigma^2 + 1)} + 3k \frac{\sigma^4 - 5}{8(\sigma^2 + 1)} \right) \chi_2 + \\
& \left( k^2 h^2 \frac{-7\sigma^8 + 5\sigma^6 + \sigma^4 + 11\sigma^2 - 2}{8\sigma^2(\sigma^2 + 1)} + kh \frac{3\sigma^6 - 4\sigma^4 + 9\sigma^2 + 4}{4\sigma(\sigma^2 + 1)} + \frac{\sigma^4 - \sigma^2 + 6}{8(\sigma^2 + 1)} \right) \chi_1 + \\
& + k^4 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)(47\sigma^6 - 51\sigma^4 - 17\sigma^2 - 3)}{64\omega\sigma^2} + k^3 h \frac{(\sigma^2 - 1)(-27\sigma^4 + 28\sigma^2 + 9)}{32\omega\sigma} + k^2 \frac{7\sigma^4 - 40\sigma^2 + 15}{64\omega}
\end{aligned}$$

$$\tilde{\rho}_{31} = P_{31} + s \left( \gamma_2 \tilde{\alpha}_1 - \gamma_1 \frac{\tilde{\alpha}_{21} + \tilde{\alpha}_{22}}{2} \right), \quad \tilde{\rho}_{32} = P_{32} + s(\gamma_2 \beta_1 - \gamma_1 \beta_2)$$

$$\tilde{\rho}_{33} = P_{33} + s(\gamma_2 \beta_1 - \gamma_1 \beta_2), \quad \tilde{\rho}_{34} = P_{34} + s(\gamma_1 \beta_2 - 2\gamma_2 \beta_1), \quad \tilde{\rho}_{35} = P_{35}$$

$$\tilde{\alpha}_{31} = \tilde{\rho}_{31} + \tilde{\rho}_{12} \gamma_{31}, \quad \tilde{\alpha}_{32} = \tilde{\rho}_{32} + \tilde{\rho}_{12} \gamma_{32}, \quad \tilde{\alpha}_{33} = \tilde{\rho}_{33} + \tilde{\rho}_{12} \gamma_{32}$$

$$\tilde{\alpha}_{34} = \tilde{\rho}_{34} + \tilde{\rho}_{12} \gamma_{33}, \quad \tilde{\alpha}_{35} = \tilde{\rho}_{35}$$

**Коэффициенты построения полного поля:**

$$\tilde{r}_{01} = \sigma k \frac{k^2(\sigma^2 - 1) + 4V\gamma_1}{4\omega^2}$$

$$\tilde{r}_{02} = k \frac{\sigma V}{\omega^2} \gamma_2 + k \frac{\sigma}{\omega^2} \beta_1 \gamma_1 + k^2 \sigma \frac{\omega - kV(1 + \sigma^2)}{4\omega^3}$$

$$\tilde{r}_{21} = 2k \frac{\sigma}{\omega} \chi_1 + k^3 \frac{\sigma(-3\sigma^2 + 1)}{4\omega^2}$$

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{22} = & -2k \frac{\sigma}{\omega} \chi_2 + \left( kh \frac{-\sigma^4 + 8\sigma^2 + 1}{\omega(\sigma^2 + 1)} + \frac{\sigma}{\omega} \right) \chi_1 + \\ & + k^3 h \frac{(\sigma^2 - 1)(3\sigma^2 + 1)}{4\omega^2} + k^2 \frac{\sigma(-3\sigma^2 + 1)}{4\omega^2} \end{aligned}$$

$$\tilde{r}_{32} = k^3 \frac{\sigma(-\sigma^4 - 6\sigma^2 + 1)}{\omega^2(\sigma^2 + 1)} \chi_1 - 3k \frac{\sigma}{\omega} \nu_1 + 3k^5 \frac{\sigma^5}{8\omega^3}.$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Описание программного комплекса для моделирования волн на поверхности воды

Все используемые в работе коды написаны в среде MatLab и управляются общей оболочкой, позволяющей решать задачи в однотипной постановке в рамках различных уравнений с использованием общих унифицированных блоков. В частности, реализовано 2 блока расчета эволюции во времени:

- метод Рунге-Кутты 4 порядка;
- сплит-степ-Фурье метод.

Потенциальные уравнения гидродинамики, которые решались в рамках исследования по диссертации, можно классифицировать следующим образом:

### **Полные по нелинейности (эволюция во времени):**

- Двумерный код уравнений Эйлера в переменных Дьяченко-Захарова [Zakharov et al, 2002]

### **Учитывающие нелинейные эффекты высоких порядков (эволюция во времени):**

- 2D и 3D версии псевдоспектрального кода высокого порядка (High Order Spectral Method, HOSM), предложенного в работах [Dommermuth & Yue 1987, West et al 1987]. Были реализованы несколько модификаций кода, включая постановки [Dommermuth & Yue 1987] и [West et al 1987], случаи постоянной глубины или бесконечно большой. Схема обобщена на случай учета струйного течения.

### **Нелинейные модели огибающих волн:**

- нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) (эволюция во времени или по координате)
- НУШ на переменном дне (эволюция по координате)
- модель Диста (с полным или усеченным законом дисперсии, эволюция во времени или по координате)
- обобщенное НУШ третьего порядка (эволюция во времени) [Слюняев, 2005\*]

В Разделе Б.1 дано беглое описание классического метода HOSM для трехмерной. В Разделе Б.2 приведена структура и принципы организации общей программной оболочки.

## Описание алгоритма решения трехмерных уравнений гидродинамики в потенциальном приближении HOSM с учетом струйного течения

Система уравнений движения воды, ограниченной снизу плоским дном ( $z = -h$ ) а сверху свободной поверхностью  $z = \eta(x, y, t)$ , состоит из уравнения Лапласа для поля потенциала скорости  $\varphi(x, y, z, t)$  в толще воды

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad -h \leq z \leq \eta \quad (\text{Б.1})$$

с граничным условием непротекания на дне

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = -h \quad (\text{Б.2})$$

и граничными условиями на свободной поверхности  $z = \eta(x, y, t)$ , записанными в виде, предложенным в [Захаров, 1968]:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \left( 1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (\text{Б.3})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \left[ 1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] - P_a. \quad (\text{Б.4})$$

Вертикальная ось  $Oz$  направлена вверх, оси  $Ox$  и  $Oy$  параллельны невозмущенной поверхности воды. Поверхностный потенциал скорости определяется как  $\Phi = \varphi(x, y, z = \eta(x, y, t), t)$ ;  $g$  – ускорение свободного падения. Атмосферное давление  $P_a$  предполагается однородным надо всей поверхностью воды и полагалось равным нулю.

Уравнения на свободной поверхности (Б.3) и (Б.4) задают эволюцию во времени полей смещения поверхности  $\eta(x, y, t)$  и потенциала скорости на поверхности  $\Phi(x, y, t)$ . Для определения правых частей этих уравнений требуются значения вертикальной скорости  $\partial \varphi / \partial z$  на уровне смещения поверхности. Они определяются из решения уравнения Лапласа (Б.1) с граничными условиями на дне (Б.2) и поверхности. Трудность здесь заключается в том, что форма поверхности не является постоянной, и на каждом этапе приходится решать уравнение Лапласа в объеме сложной переменной формы.

В работах [Dommermuth & Yue 1987, West et al 1987] предложено решать уравнение Лапласа в объеме с постоянными границами (в прямоугольном параллелепипеде), а значения вертикальной скорости с уровня возмущенной границы пересчитывать на уровень невозмущенной воды  $z = 0$  с помощью процедуры последовательного приближения, использующего зацепление мод. В упрощенном виде [Dommermuth & Yue 1987] подход представляется следующими формулами. Потенциал скорости записывается в виде суммы

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_{m=1}^M \varphi^{(m)}(x, y, z, t), \quad (\text{Б.5})$$

где  $m$  нумерует порядок приближения, а потенциал скорости на поверхности воды записывается с использованием разложения в ряд Тейлора

$$\Phi(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{p=0}^{M-m} \frac{\eta^p}{p!} \frac{\partial^p}{\partial z^p} \varphi^{(m)}(x, y, z=0, t). \quad (\text{Б.6})$$

Расписывая (Б.6) и группируя слагаемые одних порядков в предположении малого смещения  $\eta$ , получаем рекуррентную формулу для определения потенциала скорости на уровне невзволнованной поверхности  $z = 0$  по известному  $\Phi(x, y, t)$ :

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(x, y, z=0, t) &= \Phi, \\ \varphi^{(m)}(x, y, z=0, t) &= - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial z^k} \varphi^{(m-k)} \Big|_{z=0}, \quad m > 1. \end{aligned} \quad (\text{Б.7})$$

Параметр  $M$ , ограничивающий число слагаемых в представлении (Б.5), определяет степень нелинейности схемы. Можно показать, что  $M$  слагаемых в (Б.5) соответствует учету нелинейных взаимодействий между волнами до  $M + 1$  порядка. Так, что  $M = 3$  соответствует приближению уравнений Захарова [Захаров 1968]. Случай  $M = 4$  охватывает пятиволновые взаимодействия, которые играют важную роль в динамике двумерной поверхности. В работе [Clamond et al 2006] обсуждается, что выбор значения  $M > 6$  практически не изменяет результатов расчета динамики интенсивных волновых пакетов (в случае одномерной поверхности). В большинстве проведенных нами численных расчетов полагалось  $M = 6$  или  $M = 3$ .

Разложение в ряд (Б.6) предполагает малость смещения  $\eta$ . Это разложение хорошо описывает волны с крутизнами порядка  $k\eta < 0.35 \dots 0.4$  [Dommermuth & Yue 1987]. Как легко видеть, предполагая смещение и поверхностный потенциал скорости малыми величинами и подставляя (Б.5) в (Б.3) и (Б.4), за счет перемножения слагаемых, в последних уравнениях возникают члены, формально пренебрежимые в рамках выбранной степени нелинейности (контролируемой параметром  $M$ ). Потому после непосредственной подстановки ряда (Б.5) в (Б.3) и (Б.4) в [West et al 1987] было предложено отбрасывать слагаемые, превосходящие выбранную степень нелинейности. Тогда процедура определения соответствующих слагаемых (Б.8) и (Б.9) в правых частях уравнений имеет вид:

$$\left(1 + (\nabla \eta)^2\right) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=\eta} = S^{(M)} + (\nabla \eta)^2 S^{(M-2)}, \quad (\text{Б.8})$$

$$\left(1 + (\nabla \eta)^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=\eta} \right)^2 \right) = \sum_{m=1}^{M-1} W^{(m)} S^{(M-m)} + (\nabla \eta)^2 \sum_{m=1}^{M-3} W^{(m)} S^{(M-m-2)}, \quad (\text{Б.9})$$

где

$$W^{(m)} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!} \frac{\partial^{k+1}}{\partial z^{k+1}} \varphi^{(m-k)} \Big|_{z=0}, \quad (\text{Б.10})$$

$$S^{(m)} = \sum_{k=1}^m W^{(k)}.$$

Как показали расчеты модельных задач для интенсивных поверхностных волн, подход [West et al 1987] обеспечивает значительно лучшее выполнение закона сохранения энергии в процессе вычислений. В работе [Tanaka 2001] показано, что этот подход находится в согласии с гамильтоновой структурой уравнений Захарова и обеспечивает быстрое время расчета.

Проблема подхода HOSM при описании многомасштабных волн обсуждалась в [Чаликов, 2014], вкратце она состоит в том, что волны разных масштабов имеют разную скорость спадания вглубь толщи воды, а потому используемое разложение (вокруг положения равновесия жидкости) коротких волн на фоне длинных волн будет вести к ошибкам в описании коротких волн.

На каждом шаге интегрирования по времени требуется решение уравнения Лапласа в фиксированном объеме, которое находится аналитически:

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_p \sum_q \hat{\varphi}_{p,q}(t) \Psi_{p,q}(z) \exp(ik_{xp}x + ik_{yq}y), \quad (\text{Б.11})$$

$$\Psi_{p,q} = \frac{\cosh[k_{p,q}(z+h)]}{\cosh[k_{p,q}h]}, \quad k_{p,q} = \sqrt{k_{x,p}^2 + k_{y,q}^2}.$$

Модовая структура  $\Psi$  для каждой гармоники поверхностной волны, задаваемой волновым числом  $(k_x, k_y)$ , определяет изменение полей потенциала скорости вглубь толщи воды. Для применения быстрого преобразования Фурье используются периодические граничные условия по координатам, потому допустимые волновые числа дискретны и нумеруются индексами  $p$  и  $q$ . Фурье-компоненты  $\hat{\varphi}$  есть функции времени. Вертикальная компонента скорости (взятие производной от потенциала скорости по  $z$ ) вычисляется с учетом решения (Б.11).

В случае учета струйного течения  $U_x(y)$  ( $\vec{U} = (U_x(y), 0)$ ), которое имеет зависимость только от поперечной координаты  $y$ , потенциал скорости  $\varphi(x, y, z, t)$  должен учитывать две составляющие: волновое движение и постоянное течение. Выбранный вид струйного течения

не изменяет уравнение Лапласа (Б.1) и граничное условие на дне (Б.2), потому они справедливы для волновой компоненты. Граничные условия на поверхности (Б.3), (Б.4) можно записать для явно разнесенных составляющих потенциала скорости в виде

$$\eta_t + (\nabla\Phi + \vec{U}) \cdot \nabla\eta - \varphi_z (1 + (\nabla\eta)^2) = 0, \quad (\text{Б.12})$$

$$\Phi_t + g\eta + \vec{U} \cdot \nabla\Phi + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - \frac{1}{2}\varphi_z^2 (1 + (\nabla\eta)^2) + P_a = 0, \quad (\text{Б.13})$$

здесь поверхностный потенциал  $\Phi(x, y, t)$  и объемный потенциал  $\varphi(x, y, z, t)$  описывают волновую компоненту.

Для удержания системы со струйным течением в равновесии (в отсутствии волн) предполагается наличие в системе компенсирующего давления

$$\bar{P} = -\frac{1}{2}|\vec{U}|^2. \quad (\text{Б.14})$$

Полное давление на поверхности воды  $P$  равно сумме фонового давления и атмосферного

$$P = \bar{P} + P_a. \quad (\text{Б.15})$$

Закон сохранения энергии  $W$  описывается соотношением

$$A + \frac{d}{dt}W = 0, \quad (\text{Б.16})$$

где работа

$$A = \iint (\bar{P} + P_a) dx dy, \quad (\text{Б.17})$$

и потенциальная и кинетическая части энергии для случая бесконечно глубокой воды имеют вид

$$W^k = \frac{1}{2} \iint \left[ \Phi \eta_t + \eta |\vec{U}|^2 - \Phi \vec{U} \cdot \nabla \eta \right] dx dy, \quad (\text{Б.18})$$

$$W^p = \frac{1}{2} \iint [g \eta^2] dx dy \quad (\text{Б.19}).$$

Ошибка сохранения полной энергии отслеживается как основной индикатор аккуратности численного расчета.

Другие законы сохранения – сохранение массы воды

$$M = \iint \eta dx dy = \text{Const}, \quad (\text{Б.20})$$

сохранение потока жидкости

$$F = \iint \eta_t dx dy = \text{Const}, \quad (\text{Б.21})$$

импульс определяется с добавлением слагаемого от течения:

$$\vec{P} = \iint \eta (\vec{U} + \nabla\Phi) dx dy. \quad (\text{Б.22})$$

## Описание структуры общей программной оболочки

Программные коды уравнений идеальной гидродинамики были реализованы в программной среде Матлаб (MatLab). Особенностью среды Матлаб являются быстрые операции с матрицами данных, встроенные процедуры распараллеливания вычислений, возможность создания независимых (standalone) приложений, удобная работа с данными в виде структур, отличная графическая оболочка, понятный язык (близкий к Си). Все программы были реализованы в виде модулей с общей структурой.

Архитектура пакета программ для расчета поверхностных волн в рамках различных подходов представлена на Рис. Б.1. Основной блок EEManager (Evolution Equation Manager) на этапе инициализации обеспечивает:

- считывание опций моделирования из файлов параметров,
- выполнение процедур задания начальных полей  $\eta(x, y, t=0)$  и  $\Phi(x, y, t=0)$  (StartFile),
- вычисление постоянных массивов данных (например, для вычисления производных в пространстве Фурье).

Примеры содержания файлов параметров для программы EEManager и блока расчета 3D уравнений гидродинамики в рамках HOSM даны в Табл. Б.1 и Б.2.

Цикл вычислений состоит из передачи волновых полей в подпрограмму интегрирования по времени SolverName (реализовано две процедуры интегрирования по времени: метод Рунге-Кутты 4 порядка и сплит-степ-Фурье метод, см. Табл. Б.1. Для расчета уравнений Эйлера используется только метод Рунге-Кутты), которая, в свою очередь, для вычисления правых частей эволюционных уравнений использует подпрограмму EqNameStep (где EqName определяет решаемую систему уравнений: Диста, Дьяченко и т.д., см. Табл. Б.1). Для расчета выбранных уравнений реализовано несколько версий подпрограмм вычисления правой части уравнений (см. Табл. Б.2, переменная Method). Для подавления численной неустойчивости применяются разные фильтры (маски) на каждом шаге по времени (FiltMaskX, FiltMaskY), а также при вычислении производных в пространстве Фурье (DerivMaskX, DerivMaskY).

Расчет идет с заданным шагом по времени до момента сохранения результатов. Тогда поля передаются в подпрограмму EqNameResult, рассчитываются поля, подлежащие сохранению в очередном выводимом файле (см. список величин в Табл. Б.3 для примера HOSM); подпрограмма проверяет сохранение энергии в системе и выводит графические результаты на экран с помощью подпрограммы EqNamePlot. Если предел приемлемой



точности сохранения энергии (TolBreak) нарушен, то моделирование прекращается, и дополнительно сохраняется файл `abnormal_end.mat` с рассчитанными полями; в противном случае цикл расчета повторяется. По окончании расчета сохраняется файл с параметрами численного эксперимента `ExperimentOptions.mat`.

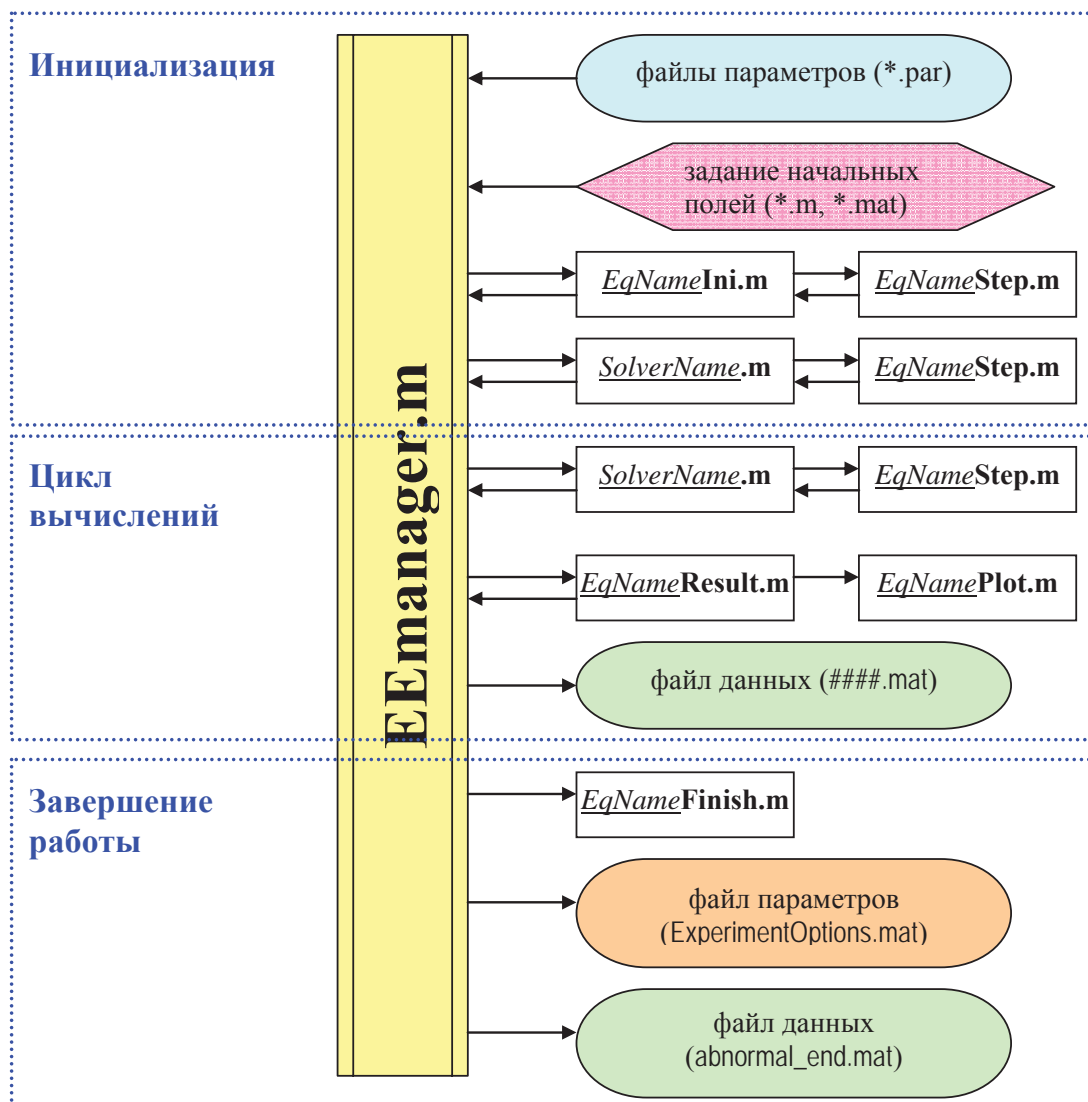


Рис. Б.1. Схема комплекса программных кодов для расчета динамики волн на поверхности ВОДЫ

Таблица Б.1. Пример файла параметров для главного модуля EEManager (с пояснениями)

(имя солвера)	
<code>%SolverName = 'RK4' ;</code>	(Метод Рунге-Кутты 4 порядка)
<code>SolverName = 'SSF' ;</code>	(Сплит-степ-Фурье метод)
(направление эволюции)	
<code>Evolution = 'Forward' ;</code>	(прямое)
<code>%Evolution = 'Backward' ;</code>	(обратное)

(имя 2D модели)

```
%EqName= 'Dyachenko'           (Модель Дьяченко-Захарова)
%EqName= 'DommermuthYue'       (Псевдоспектральная модель высокого порядка)
%EqName= 'DystheT' ;           (Модель Диста для эволюции во времени)
%EqName= 'DystheX' ;           (Модель Диста для эволюции в пространстве)
%EqName= 'WaveEqT'             (Волновое уравнение)
```

(имя 3D модели)

```
%EqName= 'Dysthe3DT' ;         (Модель Диста)
EqName= 'DommermuthYue3D'      (Псевдоспектральная модель высокого порядка)
```

(задание начальных условий)

```
StartFile= 'StokesWave3D.m' ;  (модулированная группа волн Стокса)
%StartFile= 'continue' ;        (продолжить предыдущий расчет)
%StartFile= 'complete' ;        (пересчитать требуемые физические поля на
основе
                               уже сохраненных)
```

(моменты сохранения результатов в файлы)

```
TOut=[0:1:10];
```

(предел точности выполнения закона сохранения, при котором моделирование прекращается)

```
TolBreak=0.0001;
```

Таблица Б.2. Пример файла параметров для модуля решения 3D уравнений Эйлера в рамках псевдоспектральной схемы высокого порядка:

```
M=6 ; (порядок нелинейности схемы)
```

(маски на вычисление производных в Фурье пространстве)

```
DerivMaskX= 'None' ;           (нет маски)
%DerivMaskX= 'FivePointSmoothing' ; (5-точечная маска [Dommermuth & Yue 1987])
%DerivMaskX= 'SWExpSmoothing' ;   (экспоненциальная маска)
DerivMaskY= 'None' ;           (нет маски)
%DerivMaskY= 'FivePointSmoothing' ; (5-точечная маска [Dommermuth & Yue 1987])
%DerivMaskY= 'SWExpSmoothing' ;   (экспоненциальная маска)
```

(сглаживающие фильтры, применяемые на каждом шаге интегрирования по времени)

```
%FiltMaskX= 'None' ;           (нет маски)
FiltMaskX= 'FivePointSmoothing' ; (5-точечная маска [Dommermuth & Yue 1987])
%FiltMaskX= 'SWExpSmoothing' ;   (экспоненциальная маска)
%FiltMaskX= 'HalfLowPassFilter' ; (фильтр высоких частот)
%FiltMaskX= 'FivePointSmoothing&HalfLowPassFilter' ; (5-точечная маска +
фильтр высоких частот)
FiltMaskY= 'None' ;           (нет маски)
%FiltMaskY= 'FivePointSmoothing' ; (5-точечная маска [Dommermuth & Yue 1987])
%FiltMaskY= 'SWExpSmoothing' ;   (экспоненциальная маска)
```

<code>%FiltMaskY= 'HalfLowPassFilter' ;</code>	(фильтр высоких частот)
<code>%FiltMaskY= 'FivePointSmoothing&amp;HalfLowPassFilter' ;</code>	(5-точечная маска + фильтр высоких частот)
(метод расчета правой части уравнений)	
<code>%Method=1 ;</code>	(неоптимизированный метод [Dommermuth & Yue 1987])
<code>%Method=3 ;</code>	(Метод 1 с оптимизацией по скорости)
<code>%Method=5 ;</code>	(Метод [West et al 1987] с оптимизацией по скорости)
<code>%Method=6 ;</code>	(Метод 5, но традиционный метод избавления от ошибки Переналожения спектров при перемножении путем увеличения размеров массивов до $N * M$ )
<code>Method=7 ;</code>	(Метод 5 с оптимизацией использования памяти и частичной оптимизацией скорости)
<code>%Method=8 ;</code>	(Метод 7 с добавлением компоненты струйного течения $U_x(y)$ )

Таблица Б.3. Переменные и поля, используемые при решении 3D уравнений Эйлера в рамках псевдоспектральной схемы высокого порядка:

	Имя переменной	Значение
Обязательные величины	TimeName	$t$
	CoordinateXName	$x$
	CoordinateYName	$y$
	SurfaceElevationName	$\eta$
	SurfacePotentialName	$\Phi$
	DepthName	$h$
	GravityAccelerationName	$g$
Желательные величины	FluxDensityName	$\frac{\partial \eta}{\partial t}$
	FluxPotentialName	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$
	ZeroLevelPotentialName	$\varphi(z=0)$
	ZeroLevelFluxPotentialName	$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right _{z=0}$
Вторичные (производные) величины	EnergyPDensityName	$\frac{1}{2} g \eta^2$
	EnergyPName	$\frac{1}{2} g \int \eta^2 dx dy$
	EnergyKDensityName	$\frac{1}{2} \frac{\partial \eta}{\partial t} \Phi$
	EnergyKName	$\frac{1}{2} \int \frac{\partial \eta}{\partial t} \Phi dx dy$
	EnergyName	$\frac{1}{2} \int \left( g \eta^2 + \frac{\partial \eta}{\partial t} \Phi \right) dx dy$

MassName	$\int \eta dx dy$
FluxName	$\int \frac{\partial \eta}{\partial t} dx dy$
MomentumXName	$\int \frac{\partial \eta}{\partial x} \Phi dx dy$
MomentumXDensityName	$\frac{\partial \eta}{\partial x} \Phi$
MomentumYName	$\int \frac{\partial \eta}{\partial y} \Phi dx dy$
MomentumYDensityName	$\frac{\partial \eta}{\partial y} \Phi$

## ПРИЛОЖЕНИЕ В. Вывод нелинейного уравнения Шредингера для одной захваченной моды на широком встречном струйном течении

Согласно принятым в Главе 5 обозначениям, слабую нелинейность будем характеризовать малым параметром  $\varepsilon \ll 1$ , который будет использоваться для разложений; в используемых переменных продольное волновое число  $k$  и частота  $\omega$  – порядка единицы. Многомасштабные времена и координаты вводятся следующим образом:

$$t \rightarrow t_0 + \varepsilon t_1 + \varepsilon^2 t_2, \quad x \rightarrow x_0 + \varepsilon x_1, \quad y \rightarrow y_0 + \mu y_1, \quad \mu \sim \varepsilon^3, \quad (\text{B.1})$$

течение – медленная функция поперечной координаты  $U = U(y_1)$ . Введение медленной продольной координаты позволит учесть эффекты слабой модуляции волн вдоль  $Ox$ . Нами вводится довольно жесткое условие для соотношения между поперечным масштабом моды и степенью нелинейности, чтобы краевая задача на моды возникала в том же порядке, что и кубическая нелинейность. В случае ослабления условия на  $\mu$  потребуются находить поправки для структуры моды. Теория, что будет получена в итоге, имеет точность  $O(\varepsilon^4) + O(\varepsilon\mu)$ . Так же, как и в Разделе 5.3, уравнение Эйлера разделено на 2 части (5.3.11) для слежения за вкладом непотенциальных слагаемых. Решение ищется в виде асимптотической суммы

$$P = -gz + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots, \quad (\text{B.2})$$

$$u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \quad (\text{B.3})$$

$$v = \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots, \quad (\text{B.4})$$

$$w = \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots, \quad (\text{B.5})$$

$$\eta = \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + \dots \quad (\text{B.6})$$

Система уравнений состоит из уравнений Эйлера в толще воды (5.3.11), уравнения непрерывности (5.2.3), граничных условий на поверхности (5.2.4) и (5.2.5), которые раскладываются в ряд Тейлора вблизи уровня невозмущенной воды  $z = 0$ , граничного условия на глубине (5.2.6). Эволюционное уравнение будет выводиться для компоненты давления. Общий подход таков, что уравнения Эйлера используются для определения компонент скорости, динамическое условие на поверхности определяет смещение, уравнение непрерывности и кинематическое условие на поверхности задают решение проблемы.

Порядок  $O(\varepsilon)$ .

Этот порядок соответствует линейной теории, которая неоднократно обсуждалась (Разделы 5.2, 5.3). Решение ищется в виде одной моды захваченных волн

$$p_1 = \frac{1}{2}(P(x_1, t_1, t_2)E + c.c.)Y(y_0)Z(y_1, z), \quad (B.7)$$

$$Z = \exp[zh(y_1)], \quad E = \exp[i\omega t_0 - ikx_0].$$

Этот анзац выбран в соответствии с приближенным разделением переменных для модовой задачи, который обсуждался в Разделе 5.2. Отметим, что для обозначения амплитуды моды  $P(x_1, t_1, t_2)$  использована та же буква, что и для обозначения полного давления  $P(x, y, z, t)$ . Последнее далее не будет встречаться в этом Приложении.  $P(x_1, t_1, t_2)$  – медленная функция своих переменных.

Другие волновые компоненты легко находятся в этом порядке:

$$u_1 = \frac{1}{2}(B_x E + c.c.)YZ, \quad B_x(x_1, t_1, t_2, z) = \frac{k}{\Omega} P, \quad (B.8)$$

$$v_1 = \frac{1}{2}(B_y E + c.c.)YZ, \quad B_y(x_1, t_1, t_2, z) = \frac{i}{\Omega} P, \quad (B.9)$$

$$w_1 = \frac{1}{2}(B_z E + c.c.)YZ, \quad B_z(x_1, t_1, t_2, z) = \frac{ih}{\Omega} P, \quad (B.10)$$

$$\eta_1 = \frac{1}{2}(AE + c.c.)Y, \quad A(x_1, t_1, t_2) = \frac{1}{g} P, \quad (B.11)$$

где, как и прежде, использовано обозначение  $\Omega = \omega - kU$ .

Условие непрерывности и кинематическое условие на поверхности приводят к краевой задаче

$$\frac{d^2 Y}{dy_0^2} + [h^2 - k^2]Y = 0, \quad (B.12)$$

$$\Omega^2 = gh. \quad (B.13)$$

Порядок  $O(\varepsilon^2)$ .

В этом порядке решение можно разбить на гармоники (степени  $E$ )

$$p_2 = p_{02} + (p_{12}E + p_{22}E^2 + c.c.), \quad (B.14)$$

$$u_2 = u_{02} + (u_{12}E + u_{22}E^2 + c.c.), \quad (B.15)$$

$$v_2 = v_{02} + (v_{12}E + v_{22}E^2 + c.c.), \quad (B.16)$$

$$w_2 = w_{02} + (w_{12}E + w_{22}E^2 + c.c.), \quad (B.17)$$

$$\eta_2 = \eta_{02} + (\eta_{12}E + \eta_{22}E^2 + c.c.), \quad (B.18)$$

где составляющие заданы выражениями ниже:

$$p_{02} = -\frac{1}{8gh} \left( (h^2 + k^2)Y^2 + Y'^2 \right) |P|^2 Z^2, \quad (\text{B.19})$$

$$p_{12} = iz \frac{k}{2h} Y \frac{\partial P}{\partial x_1} Z, \quad (\text{B.20})$$

$$p_{22} = -\frac{3}{8gh} \left( (h^2 - k^2)Y^2 + Y'^2 \right) P^2 Z^2, \quad (\text{B.21})$$

$$u_{12} = i \frac{2h^2 - k^2 + 2k^2hz}{4h^2\Omega} Y \frac{\partial P}{\partial x_1} Z, \quad (\text{B.22})$$

$$u_{22} = -\frac{k}{2\Omega^3} \left( (h^2 - k^2)Y^2 + Y'^2 \right) P^2 Z^2, \quad (\text{B.23})$$

$$v_{12} = k \frac{1 - 2hz}{4h^2\Omega} Y' \frac{\partial P}{\partial x_1} Z, \quad (\text{B.24})$$

$$v_{22} = 0, \quad (\text{B.25})$$

$$w_{12} = -k \frac{1 + 2hz}{4h\Omega} Y \frac{\partial P}{\partial x_1} Z, \quad (\text{B.26})$$

$$w_{22} = -i \frac{h}{2\Omega^3} \left( (h^2 - k^2)Y^2 + Y'^2 \right) P^2 Z^2, \quad (\text{B.27})$$

$$\eta_{02} = \frac{1}{8g^2h} \left( (h^2 - k^2)Y^2 + Y'^2 \right) |P|^2, \quad (\text{B.28})$$

$$\eta_{12} = 0, \quad (\text{B.29})$$

$$\eta_{22} = -\frac{1}{8g^2h} \left( (h^2 - 3k^2)Y^2 + 3Y'^2 \right) P^2. \quad (\text{B.30})$$

Кинематическое условие для первой гармоники дает уравнение переноса

$$\frac{\partial P}{\partial t_1} + V \frac{\partial P}{\partial x_1} = 0, \quad (\text{B.31})$$

где скорость определена формулой (тождественной (5.3.43))

$$V = U + \frac{k\Omega}{2h^2} = U + \frac{kg^2}{2\Omega^3}. \quad (\text{B.32})$$

Компоненты «нулевой» гармоники не зависят от быстрого времени, и уравнения Эйлера вдоль  $Oy$  и  $Oz$  дают следующие связи:

$$(1-r)U \frac{\partial}{\partial y_0} u_{02} = 0, \quad (\text{B.33})$$

$$(1-r)U \frac{\partial}{\partial z} u_{02} = 0. \quad (\text{B.34})$$

Таким образом, с учетом завихренности, соотношения (B.33) и (B.34) вырождаются. Уравнение непрерывности для «нулевой» дает

$$\frac{\partial v_{02}}{\partial y_0} + \frac{\partial w_{02}}{\partial z} = 0. \quad (\text{B.35})$$

Кинематическое граничное условие требует

$$w_{02}|_{z=0} = 0. \quad (\text{B.36})$$

В рамках потенциальной теории уравнение (B.35), переписанное для потенциала скорости, с граничным условием на поверхности (B.36) и нулевым условием на глубине, дало бы нулевое решение для компонент  $v_{02}$  и  $w_{02}$ . Члены  $v_{02}$  и  $w_{02}$  остаются неопределенными и в следующем порядке асимптотического разложения. Поскольку ожидается, что нулевая гармоника должна соответствовать индуцированному нелинейностью течению, а рассматриваются локализованные по  $y$  захваченные моды, то логично предположить обнуление каждого из слагаемых в (B.35), а затем и

$$v_{02} = 0, \quad w_{02} = 0. \quad (\text{B.37})$$

Предположение (B.37) не ведет к возникновению противоречия в дальнейшем.

В порядке  $O(\varepsilon^2)$  условие непрерывности и кинематическое условие на поверхности не могут быть обращены в ноль одновременно. А именно, найденное решение (B.14)-(B.18) удовлетворяет кинематическому условию, а условие непрерывности оказывается пропорционально выражению

$$\left[ \frac{d^2 R}{dy_0^2} + 4(h^2 - k^2)R \right] \frac{1}{\Omega} P^2 Z^2 E^2 \quad (\text{B.38})$$

(вторая гармоника, в отличие от классической задачи для свободных потенциальных волн, не удовлетворяет уравнению непрерывности). Функция  $R(y_0, y_1)$ , зависящая от быстрой и медленной поперечной координаты, определяется выражением

$$R = -\frac{3}{4gh} Y'^2 - 5 \frac{h^2 - k^2}{4gh} Y^2. \quad (\text{B.39})$$

Непосредственным вычислением с использованием (B.12) можно показать, что

$$\frac{d}{dy} \left[ (Y^2)'' + 4(h^2 - k^2)Y^2 \right] = 2Y^2 \frac{d}{dy} h^2 = O(\mu). \quad (\text{B.40})$$

Область локализации функции  $Y(y)$  меньше или порядка области  $h(y_1)$ , а потому после интегрирования по бесконечному интервалу  $y$  левая часть (B.40) будет порядка или меньше правой части, а значит можно оценить

$$(Y^2)'' + 4(h^2 - k^2)Y^2 \sim O(\mu). \quad (\text{B.41})$$



С использованием (B.12), (B.40) и (B.41), также следует оценка

$$\frac{d^2}{dy^2} Y'^2 + 4(h^2 - k^2) Y'^2 = -2Y Y' \frac{dh^2}{dy} + (h^2 - k^2) \left[ (Y^2)'' + 4(h^2 - k^2) Y^2 \right] = O(\mu). \quad (\text{B.42})$$

Комбинируя (B.41) и (B.42), приходим к выводу, что выражение в квадратных скобках в (B.38) для функции  $R$  аномально мало, а значит, условие непрерывности можно считать выполненным в порядке  $O(\varepsilon^2)$ .

Порядок  $O(\varepsilon^3)$ .

Компоненты решения в этом порядке представляются аналогично предыдущему случаю, только теперь они включают три кратные гармоники

$$p_3 = p_{03} + (p_{13}E + p_{23}E^2 + p_{33}E^3 + c.c.), \quad (\text{B.43})$$

$$u_3 = u_{03} + (u_{13}E + u_{23}E^2 + u_{33}E^3 + c.c.), \quad (\text{B.44})$$

$$v_3 = v_{03} + (v_{13}E + v_{23}E^2 + v_{33}E^3 + c.c.), \quad (\text{B.45})$$

$$w_3 = w_{03} + (w_{13}E + w_{23}E^2 + w_{33}E^3 + c.c.), \quad (\text{B.46})$$

$$\eta_3 = \eta_{03} + (\eta_{13}E + \eta_{23}E^2 + \eta_{33}E^3 + c.c.). \quad (\text{B.47})$$

Для простоты приведем решения только для первой и «нулевой» гармоник полей

$$p_{03} = -i \frac{k}{16gh^2} \left[ (3h^2 - k^2) Y^2 - Y'^2 \right] + 2hz \left[ (h^2 + k^2) Y^2 + Y'^2 \right] P^* \frac{\partial P}{\partial x_1} Z^2, \quad (\text{B.48})$$

$$p_{13} = - \left( z \frac{h^2 - k^2}{4h^3} + z^2 \frac{k^2}{4h^2} \right) Y \frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} Z + \frac{1}{4g^2 h^2} \left[ (h^4 - k^4) Y^3 + (h^2 + k^2) Y Y'^2 \right] P |P|^2 Z^3, \quad (\text{B.49})$$

$$u_{13} = \frac{k}{4h^2 \Omega} \left( \frac{6h^2 - 5k^2}{4h^2} - z \frac{3h^2 - 2k^2}{h} - z^2 k^2 \right) Y \frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} Z + \frac{k}{16\Omega^5} \left[ (h^4 - 3k^4 - 2k^2 h^2) Y^3 + (h^2 - k^2) Y Y'^2 \right] P |P|^2 Z^3, \quad (\text{B.50})$$

$$v_{13} = \frac{i}{4h^2 \Omega} \left( \frac{2h^2 - 5k^2}{4h^2} - z \frac{h^2 - 2k^2}{h} - z^2 k^2 \right) Y' \frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} Z + \frac{1}{16\Omega^5} \left[ (h^2 - k^2) Y'^3 + (h^4 - 3k^4 - 2k^2 h^2) Y^2 Y' \right] P |P|^2 Z^3, \quad (\text{B.51})$$

$$w_{03}|_{z=0} = \frac{k}{4h\Omega^3} \left[ (h^2 + k^2) Y^2 + Y'^2 \right] P^* \frac{\partial P}{\partial x_1}, \quad (\text{B.52})$$

$$w_{13} = \frac{i}{4h\Omega} \left( - \frac{2h^2 - 3k^2}{4h^2} - zh - z^2 k^2 \right) Y \frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} Z + \frac{ih}{16\Omega^5} \left[ (h^2 - k^2) Y Y'^2 + (h^4 - 3k^4 - 2k^2 h^2) Y^3 \right] P |P|^2 Z^3, \quad (\text{B.53})$$

$$\eta_{03} = -\frac{ik}{16g^2h^3} \left( (h^2 - k^2)Y^2 - Y'^2 \right) P^* \frac{\partial P}{\partial x_1}, \quad (\text{B.54})$$

$$\eta_{13} = -\frac{1}{16g^3h^2} \left[ (2h^4 + 4k^4 - 3k^2h^2)Y^3 + (11h^2 - 4k^2)YY'^2 \right] P|P|^2. \quad (\text{B.55})$$

Эволюция первой гармоники с медленным временем  $t_2$  описывается уравнением типа НУШ, включающим неопределенную компоненту  $u_{02}$

$$iY \frac{\partial P}{\partial t_2} - \frac{\Omega(2h^2 - 3k^2)}{8h^4} Y \frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} - \frac{1}{8\Omega_3} \left( (h^2 - k^2)Y'^2 + (h^4 - 3k^4 - 2h^2k^2)Y^2 \right) P|P|^2 + kPu_{02} = 0. \quad (\text{B.56})$$

Для «нулевой» гармоники продольная компонента уравнения Эйлера дает связь

$$\frac{\partial u_{02}}{\partial t_1} + U \frac{\partial u_{02}}{\partial x_1} = 0. \quad (\text{B.57})$$

Поскольку  $u_{02}$  должна отвечать за индуцированное, связанное с волной течение, а в (B.57) она движется со скоростью течения, полагаем эту компоненту равной нулю

$$u_{02} = 0, \quad (\text{B.58})$$

и тогда соответствующее слагаемое в (B.56) исчезает. Другие компоненты уравнения Эйлера ведут к следующим соотношениям

$$(1-r)U \left[ \frac{\partial u_{03}}{\partial y_0} + \frac{dU}{dy_1} \right] = 0, \quad (\text{B.59})$$

$$(1-r)U \frac{\partial u_{03}}{\partial z} = 0, \quad (\text{B.60})$$

которые вырождаются в случае учета завихренности  $r = 1$ . В потенциальном приближении  $r = 0$  условие (B.59) ведет к появлению длинномасштабного течения, компенсирующего поперечное изменение скорости. Согласно обобщенной теории К. Диста (см. в Разделе 2.2), компонента такого типа должна оказаться значимой в следующем порядке асимптотической теории,  $O(\varepsilon^4)$ .

Условие непрерывности в порядке  $O(\varepsilon^3)$  дает

$$\frac{\partial v_{03}}{\partial y_0} + \frac{\partial w_{03}}{\partial z} = 0 \quad (\text{B.61})$$

при ненулевом граничном условии на вертикальную скорость на поверхности (B.52), потому согласно (B.52), (B.61) и условию убывания на глубине, под действием нелинейности могут возникать движения воды в плоскости, перпендикулярной направлению течения. В классической постановке проблемы для свободных потенциальных волн компонента 03 предполагается медленной функцией  $y$  и  $z$  (пространственные масштабы наведенного

течения порядка  $O(\varepsilon^{-1})$ ), и тогда уравнение на нее возникло бы в следующем порядке,  $O(\varepsilon^4)$ :  $\partial u_{03}/\partial x + \partial v_{03}/\partial y + \partial w_{03}/\partial z = 0$  с ненулевыми условиями на поверхности.

Эволюционное уравнение для амплитуды волн получается совмещением объединением уравнений на первую гармонику (B.31) и (B.56), домножением на моду  $Y$  и интегрированием по  $y$ . С помощью связи между главными членами давления и смещения поверхности (B.11) ( $gA = P + O(\varepsilon^2)$ ) уравнение может быть записано в привычной форме – в терминах комплексной амплитуды смещения поверхности  $A(x, t)$

$$i\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \bar{V} \frac{\partial A}{\partial x}\right) + \bar{\beta} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \bar{\alpha} |A|^2 A = O(\varepsilon^4) + O(\varepsilon\mu), \quad (\text{B.62})$$

$$\bar{V} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} V Y^2 dy}{\int_{-\infty}^{\infty} Y^2 dy}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \alpha Y^4 dy}{\int_{-\infty}^{\infty} Y^2 dy}, \quad \bar{\beta} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \beta Y^2 dy}{\int_{-\infty}^{\infty} Y^2 dy},$$

$$V = U + \frac{kg^2}{2\Omega^3}, \quad \alpha = \frac{\Omega(-h^4 + 5k^4 + 2h^2k^2)}{12h^2}, \quad \beta = \frac{\Omega(3k^2 - 2h^2)}{8h^4}, \quad \Omega^2 = gh.$$

Здесь  $V(y)$  и коэффициенты  $\alpha(y)$ ,  $\beta(y)$  – медленные функции поперечной координаты. При выводе (B.62) использовалось соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y'^2 Y^2 dy = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} (h^2 - k^2) Y^4 dy, \quad (\text{B.63})$$

справедливое для модовых функций захваченных волн (после однократного взятия по частям).

Коэффициенты для уравнения (B.62) разбиваются на произведение "гидродинамической" и "геометрической" частей, если медленные функции поперечной координаты могут быть вынесены за знак интегрирования (например, если течение слабо меняется по интенсивности в области локализации моды).

В пределе слабого течения,  $kU/\omega = O(\gamma)$ ,  $\gamma \ll 1$ , разложение коэффициентов уравнения (B.62) в ряд по малому  $\gamma$  имеет вид

$$V = \frac{1}{2} \frac{kg^2}{\omega^3} + \frac{5}{2} U + O(\gamma^2), \quad (\text{B.64})$$

$$\alpha = \frac{1}{12} \frac{-\omega^8 + 5g^4k^4 + 2g^2k^2\omega^4}{g^2\omega^3} + \frac{3}{2} k^3 U + O(\gamma^2), \quad (\text{B.65})$$

$$\beta = \frac{1}{8} \frac{g^2(3k^2g^2 - 2\omega^4)}{\omega^7} + \frac{15}{8} \frac{U}{k} + O(\gamma^2). \quad (\text{B.66})$$

В этой записи уже использована близость частоты к частоте свободных гравитационных волн,  $\omega = \omega_g + O(\gamma)$ ,  $\omega_g^2 = gk$ . В пределе слабого течения нелинейное уравнение Шредингера для одной захваченной моды можно записать в виде

$$i \left[ \frac{\partial A}{\partial t} + \left( \frac{1}{2} \frac{kg^2}{\omega^3} + \frac{5}{2} \bar{U} \right) \frac{\partial A}{\partial x} \right] + \frac{\omega_g}{k^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + I \frac{\omega_g k^2}{2} |A|^2 A = 0, \quad (\text{B.67})$$

$$\bar{U} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} UY^2 dy}{\int_{-\infty}^{\infty} Y^2 dy}, \quad I = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} Y^4 dy}{\int_{-\infty}^{\infty} Y^2 dy}.$$

Отметим, что в выражении для скорости распространения моды осталась частота  $\omega$  – решение приближенной краевой задачи Штурма-Лиувилля (5.2.45).

В заключение приведем выражения для ротора скорости жидкости. Завихренность является следствием сдвигового течения  $dU/dy \sim \mu \sim \varepsilon^3$ . Ненулевые компоненты завихренности появляются в порядке  $O(\varepsilon^3)$ :

$$[\nabla \times \vec{v}]_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w_{03}}{\partial y_0} - \frac{\partial v_{03}}{\partial z}, \quad (\text{B.68})$$

$$[\nabla \times \vec{v}]_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u_{03}}{\partial z}, \quad (\text{B.69})$$

$$[\nabla \times \vec{v}]_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u_{03}}{\partial y_0} - \frac{dU}{dy_1}. \quad (\text{B.70})$$

Приведенный здесь вывод эволюционного уравнения для одной захваченной моды используется в Разделе 5.4 диссертации.

## ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### Монографии

- [1\*]. Kharif, C., Pelinovsky, E., Slunyaev, A. Rogue waves in the ocean. – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2009. 216 p.

### Обзор

- [2\*]. Slunyaev, A., Didenkulova, I., Pelinovsky, E. Rogue waters // Contemporary Physics. 2011. V. 52. P. 571-590.

### Статьи в научных журналах

- [3\*]. Дивинский Б.В., Левин Б.В., Лопатухин Л.И., Пелиновский Е.Н., Слюняев А.В. Аномально высокая волна в Черном море: наблюдения и моделирование // Доклады академии наук. 2004. Т. 395. С. 690-695.
- [4\*]. Пелиновский Е.Н., Слюняев А.В., Талипова Т.Г., Хариф К. Нелинейное параболическое уравнение и экстремальные волны на морской поверхности // Изв. ВУЗов: Радиофизика. 2003. Т. 46. С. 499-512.
- [5\*]. Слюняев А.В. Взаимодействие солитона огибающей с плоской волной в рамках нелинейного уравнения Шредингера // Известия АИН им. А.М. Прохорова. 2005. Т. 14. С. 41-46.
- [6\*]. Слюняев А.В. Нелинейное уравнение высокого порядка для огибающей гравитационных волн на воде конечной глубины // ЖЭТФ. 2005. Т. 128. С. 1061-1077.
- [7\*]. Слюняев А.В. Численное моделирование «предельных» солитонов огибающей гравитационных волн на глубокой воде // ЖЭТФ. 2009. Т. 136. С. 785-796.
- [8\*]. Слюняев А.В., Сергеева А.В. Стохастическое моделирование однонаправленных интенсивных волн на глубокой воде в приложении к аномальным морским волнам // Письма в ЖЭТФ. 2011. Т. 94. С. 850-858.
- [9\*]. Слюняев А.В., Сергеева А.В. Численное моделирование и анализ пространственно-временных полей аномальных морских волн // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2012. Т. 5. С. 24-36.
- [10\*]. Chabchoub, A., Hoffmann, N., Onorato, M., Slunyaev, A., Sergeeva, A., Pelinovsky, E., Akhmediev, N. Observation of a hierarchy of up to fifth-order rogue waves in a water tank // Phys. Rev. E. 2012. V. 86. Art. 056601.
- [11\*]. Didenkulova, I.I., Slunyaev, A.V., Pelinovsky, E.N., Kharif, Ch. Freak waves in 2005. Natural Hazards Earth Syst. Sci. 6, 1007-1015 (2006).

- [12\*]. Ezersky, A., Slunyaev, A., Mouazé, D., Chokchai, W. Occurrence of standing surface gravity waves modulation in shallow water // *Eur. J. Mech. B / Fluids*. 2009. V. 28. P. 521-531.
- [13\*]. Grimshaw, R., Slunyaev, A., Pelinovsky, E. Generation of solitons and breathers in the extended Korteweg-de Vries equation with positive cubic nonlinearity // *Chaos*. 2010. V. 20. Art. 013102.
- [14\*]. Ruban, V., Kodama, Y., Ruderman, M., Dudley, J., Grimshaw, R., McClintock, P., Onorato, M., Kharif, C., Pelinovsky, E., Soomere, T., Lindgren, G., Akhmediev, N., Slunyaev, A., Solli, D., Ropers, C., Jalali, B., Dias, F., Osborne, A. Rogue waves - towards a unifying concept? Discussions and debates // *Eur. Phys. J. Special Topics*. 2010. V. 185. P. 5-15.
- [15\*]. Sergeeva, A., Slunyaev, A. Rogue waves, rogue events and extreme wave kinematics in spatio-temporal fields of simulated sea states // *Nat. Hazards Earth Syst. Sci*. 2013. V. 13. P. 1759-1771.
- [16\*]. Sergeeva, A., Slunyaev, A., Pelinovsky, E., Talipova, T., Doong, D.-J. Numerical modeling of rogue waves in coastal waters // *Nat. Hazards Earth Syst. Sci*. 2014. V. 14. P. 861–870.
- [17\*]. Shemer, L., Sergeeva, A., Slunyaev, A. Applicability of envelope model equations for simulation of narrow-spectrum unidirectional random field evolution: experimental validation // *Phys. Fluids*. 2010. V. 22. Art. 016601.
- [18\*]. Shrira, V.I., Slunyaev, A.V. Nonlinear dynamics of trapped waves on jet currents and rogue waves // *Phys. Rev. E*. 2014. V. 89. Art. 041002(R).
- [19\*]. Shrira, V.I., Slunyaev, A.V. Trapped waves on jet currents: asymptotic modal approach // *J. Fluid Mech*. 2014. V. 738. P. 65-104.
- [20\*]. Slunyaev, A. Freak wave events and the wave phase coherence // *Eur. Phys. J. Special Topics*. 2010. V. 185. P. 67-80.
- [21\*]. Slunyaev, A. Nonlinear analysis and simulations of measured freak wave time series // *Eur. J. Mech. B / Fluids*. 2006. V. 25. P. 621-635.
- [22\*]. Slunyaev, A., Clauss, G.F., Klein, M., Onorato, M. Simulations and experiments of short intense envelope solitons of surface water waves // *Phys. Fluids*. 2013a. V. 25. Art. 067105.
- [23\*]. Slunyaev, A., Pelinovsky, E., Guedes Soares, C. Modeling freak waves from the North Sea // *Appl. Ocean Res*. 2005. V. 27. P. 12-22.
- [24\*]. Slunyaev, A., Pelinovsky, E., Guedes Soares, C. Reconstruction of extreme events through numerical simulations // *J. Offshore Mech. Arctic Eng*. 2014. V. 136. Art. 011302.

- [25\*]. Slunyaev, A., Pelinovsky, E., Sergeeva, A., Chabchoub, A., Hoffmann, N., Onorato, M., Akhmediev, N. Super rogue waves in simulations based on weakly nonlinear and fully nonlinear hydrodynamic equations // *Phys. Rev. E*. 2013b. V. 88. Art. 012909.
- [26\*]. Slunyaev, A., Sergeeva, A., Pelinovsky, E. Wave amplification in the framework of forced nonlinear Schrödinger equation: the rogue wave context // *Physica D*. 2015. V. 303. P. 18-27.
- [27\*]. Slunyaev, A.V., Shrira, V.I., On the highest non-breaking wave in a group: fully nonlinear water wave breathers vs weakly nonlinear theory // *J. Fluid Mech*. 2013. V. 735. P. 203-248.

#### **Статьи в трудах конференций**

- [28\*]. Диденкулова И.И., Куркин А.А., Пелиновский Е.Н., Полухина О.Е., Сергеева А.В., Слюняев А.В. «Волны-убийцы» на берегу: наблюдения и моделирование // Труды VIII Всеросс. конф. «Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф». - Кемерово: Инс-т угля и нефтехимии СО РАН. 2005. С. 147-157.
- [29\*]. Куркин А.А., Пелиновский Е.Н., Слюняев А.В. Физика волн-убийц в океане // Труды Научной школы «Нелинейные волны-2004». 2005. Н. Новгород: ИПФ РАН. С. 37-51.
- [30\*]. Слюняев А.В. Моделирование и прогноз аномальных морских волн // Ежегодник РАО "Акустика неоднородных сред". Сборник трудов школы-семинара под руководством проф. С.А. Рыбака. - Изд-во Тривант. г. Троицк. 2008. Вып. 9. С. 228-241.
- [31\*]. Pelinovsky, E., Kharif, Ch., Slunyaev, A., Talipova, T., Sergeeva, A. Freak waves: physical mechanisms and experimental data // *Proc. 2nd Int. Conf. "Frontiers of Nonlinear Physics"*. - Nizhny Novgorod, Russia. 2005. P 169-178.
- [32\*]. Pelinovsky, E., Slunyaev, A., Talipova, T., Sergeeva, A. Mechanics of Freak Waves // *Asian and Pacific Coasts 2005 / Eds: Choi, B.H., Suh, K.D., Yoon, S.B.* - Hanrimwon Publishing Co., Korea. 2005. P. 67-78.
- [33\*]. Sergeeva, A., Doong, D.-J., Pelinovsky, E., Talipova, T., Slunyaev, A. Simulations of rogue waves in coastal waters: effects of variable bathymetry // *Proc. Joint Symp. on Hydraulic and Ocean Engineering*. 2012. P. 481-498.
- [34\*]. Shemer, L., Sergeeva, A., Slunyaev, A. Experimental and numerical study of evolution of statistical properties of unidirectional narrow-banded steep wave groups // *Proc. Workshop "Rogue Waves 2008" / Eds. Olagnon, M., Prevosto, M.* - Ifremer. 2009. P. 179-189.
- [35\*]. Shemer, L., Slunyaev, A., Dorfman, B. Direct measurements of temporal wave field evolution in a laboratory tank and comparison with strongly nonlinear simulations // *Proc.*

- Workshop “Rogue Waves 2008” / Eds. Olagnon, M., Prevosto, M. - Ifremer. 2009. P. 191-198.
- [36\*]. Slunyaev A. Evidence of the wave phase coherence for freak wave events // *Nonlinear and complex dynamics: Applications in physical, biological, and financial systems* / Eds. Machado, J.A.T., Baleanu, D., Luo, A.C.J. - Springer Science+Business Media. 2011. P. 147-158.
- [37\*]. Slunyaev, A., Ezersky, A., Mouazé, D., Chokchai, W. Nonlinear modulations of standing long gravity waves in a resonator // *Proc. Workshop “Rogue Waves 2008”* / Eds. Olagnon, M., Prevosto, M. - Ifremer. 2009. P. 209-218.
- [38\*]. Slunyaev, A., Pelinovsky, E., Guedes Soares, C. Reconstruction of extreme events through numerical simulations // *Proc. 30th Int. Conf. on Ocean, Offshore and Arctic Eng. (OMAE-2011)*. 2011. OMAE2011-50314.
- [39\*]. Slunyaev, A.V., Sergeeva, A.V., Pelinovsky, E.N. Modelling of deep-water rogue waves: different frameworks // *CENTEC Anniversary Book. Marine Technology and Engineering* / Ed. Guedes Soares, C., Garbatov, Y., Fonseca, N., Teixeira, A.P. - Taylor & Francis Group, London. 2012. P. 199-216.



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- [1]. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. - М.: Мир. 1987. 480 с.
- [2]. Агафонцев Д.С. Бифуркации и устойчивость поверхностных солитонов огибающих для жидкости конечной глубины // Письма в ЖЭТФ. 2008. Т. 87. С. 225-229.
- [3]. Ахмедиев Н.Н., Анкевич А., Солитоны. Нелинейные импульсы и пучки. М.: Физматлит. 2003.
- [4]. Ахмедиев Н.Н., Елеонский В.М., Кулагин Н.Е. Генерация периодической последовательности пикосекундных импульсов в оптическом волокне. Точные решения // ЖЭТФ. 1985. Т.89. С. 1542-1551.
- [5]. Ахмедиев Н.Н., Елеонский В.М., Кулагин Н.Е. Точные решения первого порядка нелинейного уравнения Шредингера // ТМФ. 1987. Т. 72. С. 183-196.
- [6]. Ахмедиев Н.Н., Корнеев В.И. Модуляционная неустойчивость и периодические решения нелинейного уравнения Шредингера. ТМФ. 1986. Т. 69. С. 189-194
- [7]. Бадулин, С., Иванов, А., Островский, А. Влияние гигантских волн на безопасность морской добычи и транспортировки углеводородов // Технологии ТЭК. 2005. №1. С. 56-62.
- [8]. Басович А.Я., Таланов В.И. О трансформации коротких поверхностных волн на неоднородных течениях // Изв. АН. ФАО. 1977. Т. 13. С. 766-773.
- [9]. Басович А.Я. Взаимодействие высокочастотных волн с низкочастотными волнами и неоднородными потоками // Дисс. д.ф.-м.н. 1981. г. Горький, ИПФ АН.
- [10]. Беспалов В.И., Таланов В.И. О нитевидной структуре пучков света в нелинейной жидкости // Письма в ЖЭТФ. 1966. Т. 3. С. 471.
- [11]. Власов С.Н., Таланов В.И. Самофокусировка волн. Н.Новгород: ИПФ РАН. 1997. 220 с.
- [12]. Горский, Н.Н., Тайны океана. М.: Наука. 1968. 273 с.
- [13]. Горшков К.А., Островский Л.А., Папко В.В. Взаимодействия и связанные состояния солитонов как классических частиц // ЖЭТФ. 1976. Т. 71. С. 585-593.

- [14]. Григорьева В.Г., Гулев С.К. Аномальные ветровые волны в Мировом океане по данным попутных судовых наблюдений // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2011. Т. 4. С. 18-26.
- [15]. Громов Е.М., Таланов В.И. Нелинейная динамика коротких цугов волн в диспергирующих средах // *ЖЭТФ*. 1996. Т. 110. С. 137-149.
- [16]. Давидан И.Н., Лопатухин Л.И. На встречу со штормами. Л.: Гидрометеиздат. 1982. 136 с.
- [17]. Доценко С.Ф., Иванов В.А. Волны-убийцы. Севастополь, МГИ НАН. 2006. 44 с.
- [18]. Дубинина В.А., Куркин А.А., Пелиновский Е.Н., Полухина О.Е. Резонансные трехволновые взаимодействия краевых волн Стокса // *Изв. РАН. ФАО*. 2006. Т.42. С. 1-8.
- [19]. Дубинина В.А., Куркин А.А., Полухина О.Е. Нелинейная динамика краевых волн над линейно наклонным дном // *Изв. РАН. ФАО*. 2005. Т.41. С. 124-128.
- [20]. Дьяченко А.И. О динамике идеальной жидкости со свободной поверхностью // *Доклады академии наук*. 2001. Т. 376. С. 27-29.
- [21]. Дьяченко А.И., Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. Нелинейная динамика свободной поверхности идеальной жидкости // *Физика плазмы*. 1996. Т. 22. С. 916-928.
- [22]. Дьяченко, А.И., Захаров, В.Е., Шамин, Р.В., Бадулин С.И. Волны-убийцы и задачи их исследований // *Мировой океан* / под ред. Нигматулина Р.И., Лобковского Л.И. - М.: Наука. 2011.
- [23]. Зайцев А.И., Малашенко А.Е., Пелиновский Е.Н. Аномально большие волны вблизи южного побережья о. Сахалин // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2011. Т. 4. С. 35-42.
- [24]. Захаров В.Е. Устойчивость периодических волн на поверхности глубокой жидкости // *Ж. прикл. механики и техн. физики*. 1968. Т. 9. С. 86-94.
- [25]. Захаров В.Е. Шабат А.Б. О взаимодействии солитонов в устойчивой среде // *ЖЭТФ*. 1973. Т. 64. С. 1627-1639.
- [26]. Захаров В.Е. Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // *ЖЭТФ*. 1971. Т. 61. С. 118-134.
- [27]. Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. Оптические солитоны и квазисолитоны // *ЖЭТФ*. 1998. Т. 113. С. 1892-1914.

- [28]. Захаров В.Е., Манаков С.В. К теории резонансного взаимодействия волновых пакетов в нелинейных средах, ЖЭТФ, 69 (5), 1654-1673 (1975).
- [29]. Захаров В.Е., Манаков С.В. О резонансном взаимодействии волновых пакетов в нелинейных средах // Письма в ЖЭТФ. 1973. Т. 18. С. 413-417.
- [30]. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. - М.: Наука. 1980. 319 с.
- [31]. Захаров В.Е., Шамин Р.В. О вероятности возникновения волн-убийц // Письма в ЖЭТФ. 2010. Т. 91. С. 68-71.
- [32]. Захаров В.Е., Шамин Р.В. Статистика волн-убийц в вычислительных экспериментах // Письма в ЖЭТФ. 2012. Т. 96. С. 68-71.
- [33]. Ивонин Д.В., Телегин В.А., Чернышов П.В., Мысленков С.А., Куклев С.Б. Возможности радиолокационных навигационных систем X -диапазона для мониторинга прибрежного ветрового волнения // Океанология. 2015. ( в печати).
- [34]. Калоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны. - М.: Мир, 1985. 473 с.
- [35]. Кузнецов Е.А. О солитонах и параметрически неустойчивой плазме // Доклады академии наук. 1977. Т. 236. С. 575-577.
- [36]. Кузнецов К.И., Зайцев А.И., Костенко И.С., Куркин А.А., Пелиновский Е.Н. Наблюдения волн-убийц в прибрежной зоне о. Сахалин // Экологические системы и приборы. 2014. Т. 2. С. 33-39.
- [37]. Кузнецов С.Ю., Сапрыкина Я.В., Косьян Р.Д., Пушкарев О.В. Механизм образования экстремальных штормовых волн на Черном море // Доклады академии наук. 2006. Т. 408. С. 108-112.
- [38]. Кузнецов С.Ю., Сапрыкина Я.В., Экспериментальные исследования возникновения волн-убийц при эволюции узкого спектра крутых волн // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2012. Т. 5. С. 52-64.
- [39]. Куркин А.А., Пелиновский Е.Н. Волны-убийцы: факты, теория и моделирование. - Нижний Новгород. 2004. 158 с.
- [40]. Лавренов И.В. Математическое моделирование ветрового волнения в пространственно-неоднородном океане (под ред. Давидана И.Н.). - СПб: Гидрометеиздат. 1998. 500 с.

- [41]. Лаврова О.Ю. О поперечной неустойчивости волн на поверхности жидкости конечной глубины // Изв. АН. ФАО. 1983. Т. 19. С. 1068-1074.
- [42]. Ландау, Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Гидродинамика. т.6. - М.: Наука. 1988. 731 с.
- [43]. Ландау, Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Квантовая механика. т.3. - М.: Наука, 1989. 767 с.
- [44]. Лопатухин Л.И. Ветровое волнение. Учеб. пособие. 2-е изд., доп. - СПб: ВВМ. 2012. 165 с.
- [45]. Лопатухин Л.И., Бухановский А.В., Дивинский Б.В., Рожков В.А. О необычных волнах в океанах и морях // Научно-технический сборник Российского морского регистра судоходства. 2003. Вып. 26. С. 65-73.
- [46]. Островский Л.А. Распространение волновых пакетов и пространственно-временная самофокусировка в нелинейной среде // ЖЭТФ. 1966. Т. 51. С. 1189-1194.
- [47]. Островский Л.А., Потапов А.И. Модулированные волны в линейных средах с дисперсией. - Горький: ГГУ. 1990. 96 с.
- [48]. Пелиновский Е., Слюняев А. Волны-убийцы // Газета «Физика». 2006. №2. С. 29-32; №4. С. 35-39.
- [49]. Пелиновский Е.Н. Нелинейная динамика волн цунами. - г. Горький, ИПФ АН. 1982. 226 с.
- [50]. Пелиновский Е.Н., Слюняев А.В. «Фрики» – морские волны-убийцы // «Природа». 2007. №3. С. 14-23.
- [51]. Пелиновский Е.Н., Слюняев А.В. Волны-убийцы: какие они? // Сб. научно-популярных статей – победителей конкурса РФФИ 2008 года / под ред. Желтикова А.М. 2009. Вып. 12. Ч. II. С. 97-110.
- [52]. Пелиновский Е.Н., Фридман В.Е., Энгельбрехт Ю.К. Нелинейные эволюционные уравнения. Таллин: Валгус. 1984. 154 с.
- [53]. Питаевский Л.П. Вихревые нити в неидеальном Бозе-газе // ЖЭТФ. 1961. Т. 40. С. 646-651.
- [54]. Полников В.Г. Нелинейная теория случайного поля волн на воде. - М.: ЛЕНАНД. 2007. 408с.
- [55]. Рабинович А.Б. Длинные гравитационные волны в океане: Захват, резонанс, излучение. СПб: Гидрометеиздат. 1993. 325 с.

- [56]. Реутов В.П., Троицкая Ю.И. Нелинейный инкремент ветровых волн на воде и их возбуждение вблизи порога устойчивости // Изв. ВУЗов - Радиофизика. 1995. Т.38. С. 206-210.
- [57]. Рубан В.П. Аномальные волны при низких индексах Бенджамина-Фейра: численное исследование роли нелинейности // Письма в ЖЭТФ. 2013. Т. 97. С. 788-792.
- [58]. Рубан В.П. О нелинейном уравнении Шредингера для волн на неоднородном течении // Письма в ЖЭТФ. 2012. Т. 95. С. 550-556.
- [59]. Рубан В.П. Об оптимальных условиях фокусировки гигантских морских волн // Письма в ЖЭТФ. 2014. Т. 100. С. 853-857.
- [60]. Рубан В.П., Гигантские волны в слабо-скрещенных состояниях морской поверхности // ЖЭТФ. 2010. Т. 137. С. 599-607.
- [61]. Салин Б.М., Салин М.Б. Комбинированный метод измерения трёхмерных спектров волнения. II. Примеры использования основных схем измерений и анализ полученных результатов // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 2015. Т.58. №3. (в печати).
- [62]. Сапрыкина Я.В., Кузнецов С.Ю., Шуган И.В., Хванг Х.-Х., Ши, Т.-В., Янг Р.-Й., Дискретная эволюция спектра поверхностных волн на неоднородном встречном течении. Доклады академии наук. 2015. (в печати).
- [63]. Седлецкий Ю.В., Нелинейное уравнение Шредингера четвертого порядка для огибающей Стоксовых волн на поверхности жидкости конечной глубины // ЖЭТФ. 2003. Т. 124. С. 200-2013.
- [64]. Слюняев А.В. Динамика внутренних и поверхностных волн большой амплитуды в океане // Дисс. к.ф.-м.н. Н. Новгород. 2002.
- [65]. Старобор А.В. Интерпретация данных обратной задачи рассеяния при анализе групп волн на поверхности воды // Дипломная работа на соискание степени бакалавра студента IV курса ВШОПФ ННГУ им. Н.И. Лобачевского. Под руководством А.В. Слюняева. 2009.
- [66]. Степанянц Ю.А., Фабрикант А.Л. Распространение волн в сдвиговых потоках. - М.: Наука. Физматлит. 1996. 229 с.
- [67]. Таланов В.И. О самофокусировке волновых пучков в нелинейных средах // Письма в ЖЭТФ. 1965. Т. 2. С. 218.
- [68]. Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н. Моделирование «волны Лавренова» на поверхности неглубокого моря // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2009. Т. 2. С. 30-36.

- [69]. Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н., Хариф К. Модуляционная неустойчивость длинных внутренних волн умеренной амплитуды в стратифицированном горизонтально неоднородном океане // Письма в ЖЭТФ. 2011. Т. 94. С. 199-203.
- [70]. Троицкая Ю.И. Эволюционное уравнение для слабонелинейных ветровых волн на поверхности жидкости конечной глубины // Изв. РАН. ФАО. 1997. Т.33. С. 364-376.
- [71]. Уизем Дж., Линейные и нелинейные волны. М.: Мир. 1977. 624 с.
- [72]. Фабрикант А.Л. Нелинейная динамика волновых пакетов в диссипативной среде // ЖЭТФ. 1984. Т. 86. С. 470-478.
- [73]. Чаликов Д.В. Портрет волны-убийцы // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2012. Т. 5. С. 5-13.
- [74]. Чаликов Д.В. Статистика экстремальных ветровых волн // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2009. Т. 3. С. 4-24.
- [75]. Чаликов Д.В. Численное моделирование трехмерных потенциальных волн // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2014. Т. 7. С. 7-31.
- [76]. Шамин Р.В, Захаров В.Е., Юдин А.В. Типичные профили волн-убийц // Доклады академии наук. 2015. Т. 462. С. 100–102.
- [77]. Шамин Р.В, Захаров В.Е., Юдин А.В. Энергетический портрет волн-убийц // Письма в ЖЭТФ. 2014. Т. 99. С. 597–600.
- [78]. Шамин Р.В. О существовании гладких решений уравнений Дьяченко, описывающих неустановившиеся течения идеальной жидкости со свободной поверхностью // Доклады академии наук. 2006. Т. 406. С. 112–113.
- [79]. Шамин Р.В. Об оценке времени существования решений уравнения, описывающего поверхностные волны // Доклады академии наук. 2008. Т. 418. С. 603-604.
- [80]. Шамин Р.В. Разрешимость уравнений, описывающих волны минимальной гладкости // Доклады академии наук. 2010. Т. 432. С. 458-460.
- [81]. Шамин Р.В., Юдин А.В. Моделирование пространственно-временного распространения волн-убийц // Доклады академии наук. 2013. Т. 448. С. 592-594.
- [82]. Ablowitz, M.J., Kaup, D.J., Newell, A.C., Segur, H. The inverse scattering transform – Fourier analysis for nonlinear problems // Stud. Appl. Math. 1974. V. 53. P. 249-315.
- [83]. Abrashkin, A., Soloviev, A. Vortical freak waves in water under external pressure action. Phys. Rev. Lett. 2013. V. 110. Art. 014501.

- [84]. Adcock, T.A.A., Taylor, P.H. Energy input amplifies nonlinear dynamics of deep water wave groups // *Int. J. Offshore and Polar Eng.* 2011. V. 21. P. 8-12.
- [85]. Akhmediev, N., Ankiewicz, A., Soto-Crespo, J.M. Rogue waves and rational solutions of the nonlinear Schrödinger equation // *Phys. Rev.* 2009. V. 80. Art. 026601.
- [86]. Akhmediev, N., Ankiewicz, A., Soto-Crespo, J.M., Dudley, J.M. Rogue wave early warning through spectral measurements? // *Phys. Lett. A.* 2011a. V. 375. P. 541-544.
- [87]. Akhmediev, N., Soto-Crespo, J.M., Ankiewicz, A. How to excite a rogue wave // *Phys. Rev. A.* 2009. V. 80. Art. 043818.
- [88]. Akhmediev, N., Soto-Crespo, J.M., Ankiewicz, A., Devine, N. Early detection of rogue waves in a chaotic wave field // *Phys. Lett. A.* 2011b. V. 375. P. 2999-3001.
- [89]. Alber, I.E. The effects of randomness on the stability of two-dimensional surface wavetrain // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* 1978. V. 363. P. 525-546.
- [90]. Ankiewicz, A., Devine, N., Akhmediev N. Are rogue waves robust against perturbations? // *Phys. Lett. A.* 2009. V. 373. P. 3997–4000.
- [91]. Annenkov, S.Y., Shrira, V.I. “Fast” nonlinear evolution in wave turbulence // *Phys. Rev. Lett.* 2009b. V. 102. Art. 024502.
- [92]. Annenkov, S.Y., Shrira, V.I. Direct numerical simulation of downshift and inverse cascade for water wave turbulence // *Phys. Rev. Lett.* 2006a. V. 96. Art. 204501.
- [93]. Annenkov, S.Y., Shrira, V.I. Evolution of kurtosis for wind waves // *Geophys. Res. Lett.* 2009a. V. 36, Art. L13603.
- [94]. Annenkov, S.Y., Shrira, V.I. Role of non-resonant interactions in the evolution of nonlinear random water wave fields // *J. Fluid Mech.* 2006b. V. 561. P. 181-207.
- [95]. Babanin, A. *Breaking and dissipation of ocean surface waves.* - Cambridge Univ. Press. 2011.
- [96]. Bakhanov V.V., Okomel'kova I.A., Pozdnjakova V.I., Shereshevskii I.A. On the diffraction of the long surface wave on the inhomogeneous stream // *Abstracts, Day on Diffraction, Saint Petersburg, May 30-June 3, 1994.* 1994. P. 7-8.
- [97]. Banner, M.L., Barthelemy, X., Fedele, F., Allis, M., Benetazzo, F., Dias, F., Peirson, W.L. Linking reduced breaking crest speeds to unsteady nonlinear water wave group behavior // *Phys. Rev. Lett.* 2014. V. 112. Art. 114502.
- [98]. Benjamin T.B., Feir J.E. The disintegration of wave trains on deep water. Part 1. Theory // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 27. P. 417-430.

- [99]. Benney, D.J. Non-linear gravity wave interactions // *J. Fluid Mech.* 1962. V. 14. P. 577-584.
- [100]. Benney, D.J., Newell, A.C. Propagation of nonlinear wave envelopes // *J. Math. Phys.* (Stud. Appl. Math.). 1967. V. 46. P. 133-139.
- [101]. Benney, D.J., Roskes, G.J. Wave instabilities // *Stud. Appl. Math.* 1969. V. 48. P. 377-385.
- [102]. Bitner-Gregersen, E.M., Magnusson, A.K. Extreme events in field data and in a second order wave model // *Rogue Waves 2004 / Eds. Olagnon, M., Prevosto, M. - Ifremer, France.* 2005.
- [103]. Brinch-Nielsen, U., Jonsson, I.G. Fourth order evolution equations and stability analysis for Stokes waves on arbitrary water depth // *Wave Motion.* 1986. V. 8. P. 455-472.
- [104]. Brunetti, M., Marchiando, N., Berti, N., Kasparian, J. Nonlinear fast growth of water waves under wind forcing // *Phys. Lett. A.* 2014. V. 378. P. 1025-1030.
- [105]. Calini, A., Schober, C.M. Homoclinic chaos increases the likelihood of rogue wave formation // *Phys. Lett. A.* 2002. V. 298. P. 335–349.
- [106]. Cardone, V.J., Callahan, B.T., Chen, H., Cox, A.T., Morronea, M.A., Swail, V.R. Global distribution and risk to shipping of very extreme sea states (VESS) // *Int. J. Climatol.* 2014. V. 35. P. 69-84.
- [107]. Cavaleri, L., Wave modeling: Where to go in the future // *Bull. Amer. Meteor. Soc.* 2006. V. 87. P. 207-214.
- [108]. Chabchoub, A., Hoffmann, N., Branger, H., Kharif, C., Akhmediev, N. Experiments on wind-perturbed rogue wave hydrodynamics using the Peregrine breather model // *Phys. Fluids.* 2013a. V. 25. Art. 101704.
- [109]. Chabchoub, A., Hoffmann, N., Onorato, M., Akhmediev, N. Super rogue waves: observation of a higher-order breather in water waves // *Phys. Rev. X.* 2012. V. 2. Art. 011015.
- [110]. Chabchoub, A., Hoffmann, N., Onorato, M., Genty, G., Dudley, J.M., Akhmediev, N. Hydrodynamic Supercontinuum // *Phys. Rev. Lett.* 2013b. V. 111. Art. 054104.
- [111]. Chabchoub, A., Hoffmann, N.P., Akhmediev, N. Rogue wave observation in a water wave tank // *Phys. Rev. Lett.* 2011. V. 106. Art. 204502.
- [112]. Chalikov, D. Freak waves: Their occurrence and probability // *Phys. Fluids.* 2009. V. 21. Art. 076602.
- [113]. Chalikov, D. Numerical simulation of the Benjamin-Feir instability and its consequences // *Phys. Fluids.* 2007. V. 19. Art. 016602.



- [114]. Chalikov, D. Statistical properties of nonlinear one-dimensional wave fields // *Nonlin. Proc. Geophys.* 2005. V. 12. P. 671-689.
- [115]. Chalikov, D., Sheinin, D. Direct modeling of one-dimensional nonlinear potential waves // *Nonlinear Ocean Waves, Advances in Fluid Mechanics* / Ed. Perrie, W. 1998. V. 17. P. 207-222.
- [116]. Chalikov, D., Sheinin, D. Modeling extreme waves based on equations of potential flow with a free surface // *J. Comp. Phys.* 2005. V.210. P.247–273.
- [117]. Cherneva, Z., Guedes Soares, C. Non-linearity and non-stationarity of the New Year abnormal wave // *Appl. Ocean Res.* 2008. V. 30. P. 215–220.
- [118]. Chien, H., Kao, C.-C., Chuang, L.Z.H. On the characteristics of observed coastal freak waves // *Coast. Eng. J.* 2002. V. 44. P. 301–319.
- [119]. Christou, M., Ewans, K. Examining a comprehensive dataset containing thousands of freak wave events. Part 1 – description of the data and quality control procedure // *Proc. 30th Int. Conf. Ocean, Offshore and Arctic Engineering (OMAE-2011)*. 2011. Art. OMAE2011-50168.
- [120]. Christou, M., Ewans, K. Field measurements of rogue water waves // *J. Phys. Oceanogr.* 2014. V. 44. P. 2317–2335.
- [121]. Clamond, D., Francius, M., Grue, J., Kharif, C. Long time interaction of envelope solitons and freak wave formations // *Eur. J. Mech. B / Fluids*. 2006. V. 25. P. 536-553.
- [122]. Clamond, D., Grue, J. A fast method for fully nonlinear water-wave computations // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 447. P. 337-355.
- [123]. Clauss, G.F., Klein, M. The New Year Wave: Spatial evolution of an extreme sea state // *J. Offshore Mech. Arctic Eng.* 2009. V. 131. Art. 041001.
- [124]. Clauss, G.F., Klein, M., Dudek, M., Onorato, M. Application of breather solutions for the investigation of wave/structure interaction in high steep waves // *Proc. 31th Int. Conf. Ocean, Offshore and Arctic Engineering (OMAE-2012)*. 2012. Art. OMAE 83244.
- [125]. Crawford, D.R., Saffman, P.G., Yuen, H.C. Evolution of a random inhomogeneous field of nonlinear deep-water gravity waves // *Wave Motion*. 1980. V. 2. P. 1-16.
- [126]. Creamer, D.B., Henyey, F., Schult, R., Wright, L. Improved linear representation of ocean surface waves // *J. Fluid Mech.* 1989. V. 205. P. 135-161.
- [127]. Dalzell, J.F. A note on finite depth second-order wave-wave interactions // *Appl. Ocean Res.* 1999. V. 21. P. 105-111.

- [128]. Davey, A, Stewartson, K. On the three-dimensional packets of surface waves // Proc. R. Soc. Lond. A. 1974. V. 338. P. 101-110.
- [129]. Davey, A. The propagation of a weakly nonlinear wave // J. Fluid Mech. 1972. V. 53. P. 769-781.
- [130]. Debsarma, S., Das, K.P. A higher-order nonlinear evolution equation for broader bandwidth gravity waves in deep water // Phys Fluids. 2005. V. 17. Art. 104101.
- [131]. Didenkulova, I. Shapes of freak waves in the coastal zone of the Baltic Sea (Tallinn Bay) // Boreal Env. Res. 2011. 16 (suppl. A). P. 138-148.
- [132]. Didenkulova, I., Anderson, C. Freak waves of different types in the coastal zone of the Baltic Sea // Nat. Hazards Earth Syst. Sci. 2010. V. 10. P. 2021-2029.
- [133]. Didenkulova, I.I., Nikolkina, I.F., Pelinovsky, E.N. Rogue waves in the basin of intermediate depth and the possibility of their formation due to the modulational instability // Письма в ЖЭТФ. 2013. Т. 97. С. 221-225.
- [134]. Djordjevic, V.D., Redekopp, L.G. On the development of packets of surface gravity waves moving over an uneven bottom // J. Appl. Math. Phys. 1978. V. 29. P. 950-962.
- [135]. Dommermuth, D. The initialization of nonlinear waves using an adjustment scheme // Wave Motion. 2000. V. 32. P. 307-317.
- [136]. Dommermuth, D., Yue, D.K.P. A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves // J. Fluid Mech. 1987. V. 184. P. 267-288.
- [137]. Draper, L. 'Freak' ocean waves // Oceanus. 1964. V. 10. P. 13-15.
- [138]. Drazin P.G., Johnson R.S. Solitons: An introduction. - Cambridge Univ. Press. 1996. 226 p.
- [139]. Dubard, P., Gaillard, P., Klein, C., Matveev, V.B. On multi-rogue wave solutions of the KdV equation // Eur. Phys. J. Special Topics. 2010. V. 185. P. 247-258.
- [140]. Dubard, P., Matveev, V. Multi-rogue waves solutions: from the NLS to the KP-I equation // Nonlinearity. 2013. V. 26. P. R93-R125.
- [141]. Ducrozet, G., Bonnefoy, F., Touze, D. Le, Ferrant, P. 3-D HOS simulations of extreme waves in open seas // Nat. Hazards Earth Syst. Sci. 2007. V. 7. P. 109-122.
- [142]. Dudley, J.M., Dias, F., Erkintalo, M., Genty G. Instabilities, breathers and rogue waves in optics // Nature Photonics. 2014. V. 8. P. 755-764.
- [143]. Dyachenko, A.I., Kachulin, D.I., Zakharov, V.E. Collisions of two breathers at the surface of deep water // Nat. Hazards Earth Syst. Sci. 2013a. V. 13. P. 3205-3210.

- [144]. Dyachenko, A.I., Kachulin, D.I., Zakharov, V.E. On the nonintegrability of the free surface hydrodynamics // Письма в ЖЭТФ. 2013b. Т. 98. С. 48-52.
- [145]. Dyachenko, A.I., Kuznetsov, E.A., Spector, M.D., Zakharov, V.E. Analytical description of the free surface dynamics of an ideal fluid (canonical formalism and conformal mapping) // Phys. Lett. A. 1996. V. 221. P. 73-79.
- [146]. Dyachenko, A.I., Zakharov, V.E. Modulation instability of Stokes Wave  $\rightarrow$  Freak Wave // Письма в ЖЭТФ. 2005. Т. 81. С. 318-322.
- [147]. Dyachenko, A.I., Zakharov, V.E. On the formation of Freak Waves on the surface of deep water // Письма в ЖЭТФ. 2008. Т. 88. С. 356-359.
- [148]. Dysthe, K., Krogstad, H.E., Muller, P. Oceanic rogue waves // Annu. Rev. Fluid. Mech. 2008. V. 40. P. 287-310.
- [149]. Dysthe, K.B. Note on a modification to the nonlinear Schrödinger equation for application to deep water waves // Proc. Roy. Soc. London A. 1979. V. 369. P. 105-114.
- [150]. Dysthe, K.B., Trulsen, K. Note on breather type solutions of the NLS as a model for freak-waves // Physica Scripta. 1999. V. T82. P. 48-52.
- [151]. Dysthe, K.B., Trulsen, K., Krogstad, H.E., Socquet-Juglard, H. Evolution of a narrow-band spectrum of random surface waves // J. Fluid Mech. 2003. V. 478. P. 1-10.
- [152]. Fabrikant, A.L. On nonlinear water waves under a light wind and Landau type equations near the stability threshold // Wave Motion. 1980. V. 2. P. 355-360.
- [153]. Faulkner, D. Rogue waves – defining their characteristics for marine design // Rogue Waves 2000 / Eds. Olagnon, M., Athanassoulis, G.A. - Ifremer, France. 2001. P. 3-18.
- [154]. Fernandez, L., Onorato, M., Monbaliu, J., Toffoli, A. Modulational instability and wave amplification in finite water depth // Nat. Hazards Earth Syst. Sci. 2014. V. 14 P. 705–711.
- [155]. Forristall, G.Z. Understanding rogue waves: Are new physics really necessary? // Proc. 14<sup>th</sup> Aha Huliko‘a Winter Workshop, Honolulu, Hawaii. 2005.
- [156]. Gaillard, P. Higher order Peregrine breathers, their deformations and multi-rogue waves // J. Physics: Conf. Series. 2014. V. 482. Art. 012016.
- [157]. Gaillard, P. Wronskian representation of solutions of the NLS equation and higher Peregrine breathers // J. Math. Sci.: Adv. Appl. 2012. V. 13. P. 71-153.
- [158]. Gandzha, I.S., Sedletsky, Yu.V., Dutykh, D.S. High-order nonlinear Schrodinger equation for the envelope of slowly modulated gravity waves on the surface of finite-depth fluid and its quasi-soliton solutions // Ukr. J. Phys. 2014. V. 59. P. 1-16.

- [159]. Ganshin, A.N., Efimov, V.B., Kolmakov, G.V., Mezhev-Deglin, L.P., McClintock, P.V.E. Observation of an inverse energy cascade in developed acoustic turbulence in superfluid helium // *Phys. Rev. Lett.* 2008. V. 101. Art. 065303.
- [160]. Garrett, C., Gemmrich, J. R. Rogue waves // *Physics Today*. 2009. Iss. 62(6). P. 62-63.
- [161]. Gelash, A.A., Zakharov, V.E., Superregular solitonic solutions: a novel scenario for the nonlinear stage of modulation instability // *Nonlinearity*. 2014. V. 27. P. R1–R39.
- [162]. Gramstad, O., Trulsen, K. Influence of crest and group length on the occurrence of freak waves // *J. Fluid Mech.* 2007. V. 582. P. 463–472.
- [163]. Gramstad, O., Trulsen, K., Hamiltonian form of the modified nonlinear Schrodinger equation for gravity waves on arbitrary depth // *J. Fluid Mech.* 2011. V. 670. P. 404-426.
- [164]. Gramstad, O., Zeng, H., Trulsen, K., Pedersen, G.K. Freak waves in weakly nonlinear unidirectional wave trains over a sloping bottom in shallow water // *Phys. Fluids*. 2013. V. 25. Art. 122103.
- [165]. Grimshaw, R.H.J., Annenkov, S.Y. Water wave packets over variable depth // *Stud. Appl. Math.* 2011. V. 126. P. 409-427.
- [166]. Hasimoto, H., Ono, H. Nonlinear modulation of gravity waves // *J. Phys. Soc. Japan*. 1972. V. 33. P. 805-811.
- [167]. Hasselmann, K. On the nonlinear energy transfer in a gravity wave spectrum. Part 1. General theory // *J. Fluid Mech.* 1962. V. 12. P. 481-500.
- [168]. Hasselmann, K., Barnett, T.P., Bouws, E., Carlson, H., Cartwright, D.E., Enke, K., Ewing, J.A., Gienapp, H., Hasselmann, D.E., Kruseman, P., Meerburg, A., Miller, P., Olbers, D.J., Richter, K., Sell, W., Walden, H. Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP) // *Ergänzungsheft zur Deutschen Hydrographischen Zeitschrift Reihe A(8) (Nr. 12)*. 1973. 95 p.
- [169]. Haver, S. A possible freak wave event measured at the Draupner jacket January 1 1995 // *Rogue Waves 2004 / Ed. Oglanon, M., Prevosto, M., - Ifremer, France*. 2005.
- [170]. Haver, S., Andersen, O.J. Freak waves – rare realizations of a typical extreme wave population or typical realizations of a rare extreme wave population? // *Proc. 10th Int. Offshore and Polar Eng. Conf. ISOPE, Seattle, USA*. 2000. P. 123–130.
- [171]. Heller, E.J., Kaplan, L., Dahlen, A. Refraction of a Gaussian seaway // *J. Geophys. Res.* 2008. V. 113. Art. C09023.

- [172]. Henderson, D.M., Segur, H., Carter, J.D. Experimental evidence of stable wave patterns on deep water // *J. Fluid Mech.* 2010. V. 658. P. 247-278.
- [173]. Henderson, K.L., Peregrine, D.H., Dold, J.W. Unsteady water wave modulations: fully nonlinear solutions and comparison with the nonlinear Schrodinger equation // *Wave Motion.* 1999. V. 29. P. 341-361.
- [174]. Hjelmervik, K.B., Trulsen, K. Freak wave statistics on collinear currents // *J. Fluid. Mech.* 2009. V. 637. P. 267–284.
- [175]. Holliday, N.P., Yelland, M.J., Pascal, R., Swail, V.R., Taylor, P.K., Griffiths, C.R., Kent, E. Were extreme waves in the Rockall Trough the largest ever recorded? // *Geophys. Res. Lett.* 2006. V. 33. Art. L05613.
- [176]. Holthuijsen, L.H. *Waves in oceanic and coastal waters.* - Cambridge University Press. 2007. 387 p.
- [177]. Hopkin, M. Sea snapshots will map frequency of freak waves // *Nature.* 2004. V. 430. P. 492.
- [178]. Irvine, D.E., Tilley, D.G. Ocean wave directional spectra and wave–current interaction in the Agulhas from the Shuttle Imaging Radar-B synthetic aperture radar // *J. Geophys. Res.* 1988. V. 93(C12). P. 15389–15401.
- [179]. Islas, A.L., Schober, C.M. Predicting rogue waves in random oceanic sea states // *Phys. Fluids.* 2005. V. 17. P. 031701.
- [180]. Janssen, P. *The Interaction of Surface Waves and Wind.* - Cambridge Univ. Press. 2004. 312 p.
- [181]. Janssen, P.A.E.M. Nonlinear four-wave interactions and freak waves // *J. Phys. Oceanogr.* 2003. V. 33. P. 863–884.
- [182]. Janssen, P.A.E.M., Onorato, M. The intermediate water depth limit of the Zakharov equation and consequences for wave prediction // *J. Phys. Oceanogr.* 2007. V. 37. P. 2389-2400.
- [183]. Janssen, T.T., Herbers, T.H.C. Nonlinear wave statistics in a focal zone // *J. Phys. Oceanogr.* 2009. V. 39. P. 1948-1964.
- [184]. Janssen, T.T., Herbers, T.H.C., Battjes, J.A. Generalized evolution equations for nonlinear surface gravity waves over two-dimensional topography // *J. Fluid Mech.* 2006. V. 552. P. 393-418.

- [185]. Jeffreys, H. On the formation of wave by wind // Proc. R. Soc. Lond. A. 1925. V. 107. P. 189-206.
- [186]. Johnson, R.S. A modern introduction to the mathematical theory of water waves. - Cambridge Univ. Press. 1997. 464 p.
- [187]. Johnson, R.S. On the modulation of water waves in the neighbourhood of  $kh \approx 1.363$  // Proc. R. Soc. London A. 1977. V. 357. P. 131-141.
- [188]. Jonsson, I.G. Wave–current interactions // The Sea, 9A: Ocean Engineering Science / Ed. Mehaute, B. le, Hanes, D.M. - Wiley Interscience .1990. P. 65–120.
- [189]. Kakutani, T., Michihiro, K. Marginal state of modulational instability-mode of Benjamin Feir instability // J. Phys. Soc. Japan. 1983. V. 52. P. 4129-4137.
- [190]. Karjanto, N., van Groesen, E. Qualitative comparisons of experimental results on deterministic freak wave generation based on modulational instability // J. Hydro-environ. Res. 2010. V. 3. P. 186–192.
- [191]. Kartashova, E. Nonlinear Resonance Analysis. - Cambridge Univ. Press. 2010. 223 p.
- [192]. Karunakaran, D., Bærheim, M., Leira, B.J. Measured and simulated dynamic response of a jacket platform // Proc. 16th Symp. OMAE 1997. 1997. V. II. P. 157–164.
- [193]. Kaup, D.J., Newell, A.C. Solitons as particles, oscillators, and in slowly changing media: a singular perturbation theory // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1978. V. 361. P. 413-446.
- [194]. Kaup, D.J., Reiman, A., Bers, A. Space-time evolution of nonlinear three-wave interactions. I. Interaction in a homogeneous medium // Rev. Modern Phys. 1979. V. 51. P. 275-309.
- [195]. Kedziora, D.J., Ankiewicz, A., Akhmediev, N. Classifying the hierarchy of nonlinear-Schrodinger-equation rogue-wave solutions // Phys. Rev. E. 2013. V. 88. Art. 013207.
- [196]. Kelley, P.L. Self-focusing of optical beams // Phys. Rev. Lett. 1965. V. 15. P. 1005-1007.
- [197]. Kenyon, K.E. Wave refraction in ocean currents // Deep-Sea Res. 1971. V. 18. P. 1023-1034.
- [198]. Kharif, C., Giovanangeli, J.-P., Touboul, J., Grare, L., Pelinovsky, E. Influence of wind on extreme wave events: experimental and numerical approaches // J. Fluid Mech. 2008. V. 594. P. 209-247.
- [199]. Kharif, C., Kraenkel, R.A., Manna, M.A., Thomas, R. The modulational instability in deep water under the action of wind and dissipation // J. Fluid Mech. 2010. V. 664. P. 138–149.
- [200]. Kharif, C., Pelinovsky, E. Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon // Eur. J. Mech./B – Fluid. 2003. V. 22. P. 603–634.

- [201]. Kharif, C., Pelinovsky, E., Talipova, T., Slunyaev, A. Focusing of nonlinear wave groups in deep water // Письма в ЖЭТФ. 2001. Т. 73. С. 190-195.
- [202]. Kibler, B., Fatome, J., Finot, C., Millot, G., Dias, F., Genty, G., Akhmediev, N., Dudley, J.M. The Peregrine soliton in nonlinear fibre optics // Nature Physics. 2010. V. 6. P. 790-795.
- [203]. Kjeldsen, P. A Sudden Disaster – in Extreme waves // Proc. “Rogue waves 2000” / Ed. Olagnon, M., Athanassoulis, G.A. - Ifremer, France. 2001. P.19-36.
- [204]. Komen, G.J., Cavaleri, L., Donelan, M., Hasselmann, K., Hasselmann, S., Janssen, P.A.E.M. Dynamics and modelling of ocean waves. - Cambridge University Press. 1996. 556 p.
- [205]. Krasitskii, V.P. On reduced equations in the Hamiltonian theory of weakly nonlinear surface waves // J. Fluid Mech. 1994. V. 272. P. 1–20.
- [206]. Krogstad, H.E., Barstow, S.F., Mathiesen, L.P., Lønseth, L., Magnusson, A.K., Donelan, M.A. Extreme waves in the long-term wave Measurements at Ekofisk // Proc. "Rogue Waves 2008" / Ed. Olagnon, M, Prevosto, M. - Ifremer, France. 2009. P. 23-33.
- [207]. Krogstad, H.E., Trulsen, K. Interpretations and observations of ocean wave spectra // Ocean Dynamics. 2010. V. 60 P. 973–991.
- [208]. Kudryavtsev, V.N., Grodsky, S.A., Dulov, V.A., Bol'shakov, A.N. Observations of wind waves in the Gulf Stream frontal zone // J. Geophys. Res. 1995. V. 100 (C10). P. 20715–20727.
- [209]. Lautrup, B. Stokes waves // Physics of Continuous Matter, Second Edition: Exotic and Everyday Phenomena in the Macroscopic World. - CRC Press. 2011.
- [210]. Lavrenov, I. The wave energy concentration at the Agulhas current of South Africa // Nat. Hazards. 1998. V. 17. P. 117-127.
- [211]. Lavrenov, I.V. Wind waves in ocean: Dynamics and numerical simulations. - Springer. 2003. 376 p.
- [212]. Lavrenov, I.V., Porubov, A.V. Three reasons for freak wave generation in the non-uniform current // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2006. V. 25. P. 574-585.
- [213]. Lawton, G. Monsters of the deep (The Perfect Wave) // New Scientist. 2001. Iss. 170. No 2297. P/ 28–32.
- [214]. Leblanc, S. Amplification of nonlinear surface waves by wind // Phys. Fluids. 2007. V. 19. Art. 101705.

- [215]. Lehner, S.H. Extreme wave statistics from radar data sets // Proc. 14th Aha Huliko`a Winter Workshop, Honolulu, Hawaii. 2005.
- [216]. Leon, Ponce de, S., Soares, Guedes, C. Extreme wave parameters under North Atlantic extratropical cyclones // *Ocean Modelling*. 2014. V. 81. P. 78–88.
- [217]. Lighthill, M.J. (Ed.) A discussion on nonlinear theory of wave propagation in dispersive systems // *Proc. Roy. Soc. London A*. 1967. V. 299. P. 2-145.
- [218]. Liu, P.C., Bouchard, R., Rogers, W.E., Babanin, A.V., Wang, D.W. Brief Communication: Is there a wind connection to freak wave occurrences? // *Nat. Hazards Earth Syst. Sci. Discuss*. 2015. V. 3. P. 319-335.
- [219]. Liu, P.C., Chen, H.S., Doong, D.-J., Kao, C.C., Hsu, Y.-J.G. Monstrous ocean waves during typhoon Krosa // *Ann. Geophys*. 2008. V. 26. P. 1327–1329.
- [220]. Liu, P.C., MacHutchon, K.R. Are there different kinds of rogue waves? // *Proc. 25th Int. Conf. OMAE 2006*. 2006. Art. OMAE2006-92619.
- [221]. Longuet-Higgins, M.S. On the statistical distribution of the heights of sea waves // *J. Marine Research*. 1952. V. 11. P. 1245-1266.
- [222]. Longuet-Higgins, M.S. The instabilities of gravity waves of finite amplitude in deep water. II. Subharmonics // *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1978. V. 360. P. 489–505.
- [223]. Lutjeharms, J.R.E. *The Agulhas Current*. - Springer. 2006. 330 p.
- [224]. Ma, Y.-Ch. The perturbed plane-wave solutions of the cubic Schrodinger equation // *Stud. Appl. Math*. 1979. V. 60. P. 43-58.
- [225]. Magnusson, A.K., Donelan, M.A., The Andrea wave characteristics of a measured North Sea rogue wave // *J. Offshore Mech. Arct. Eng*. 2013. V. 135. Art. 031108.
- [226]. Mai, S., Wihelmi, J., Barjenbruch, U. Wave height distributions in shallow waters // *Proc. 32nd Int. Conf. on Coastal Engineering (ICCE)*. 2010.
- [227]. Mallory, J.K. Abnormal waves on the south-east of South Africa // *Int. Hydrog. Rev*. 1974. V. 51. P. 99-129.
- [228]. Massel, S.R. *Ocean surface waves: Their physics and prediction*. - World Scientific Publ., Singapore. 1996. 491 p.
- [229]. McKee, W.D. Waves on a shearing current: a uniformly valid asymptotic solution // *Proc. Camb. Phil. Soc*. 1974. V. 75. P. 295-301.
- [230]. McLean, J.W. Instabilities of finite-amplitude gravity waves on water of finite depth // *J. Fluid Mech*. 1982a. V. 114. P. 331-341.



- [231]. McLean, J.W. Instabilities of finite-amplitude water waves // *J. Fluid Mech.* 1982b. V. 114. P. 315–330.
- [232]. Melville, W.K., Romero, L., Kleiss, J.M. Extreme wave events in the Gulf of Tehuantepec // *Proc. 14th Aha Huliko`a Winter Workshop, Honolulu, Hawaii.* 2005.
- [233]. Miles, J.W. On the generation of surface waves by shear flows // *J. Fluid Mech.* 1957. V. 3. P. 185-204.
- [234]. Miles, J.W. On the generation of surface waves by turbulent shear flows // *J. Fluid Mech.* 1960. V. 7. P. 469-478.
- [235]. Mollenauer, L.F., Smith, K. Demonstration of soliton transmission over more than 4000 km in fiber with loss periodically compensated by Raman gain // *Optics Lett.* 1988. V. 13. P. 675-677.
- [236]. Moreau, F., translated by Olagnon, M., Chase, G.A. *The Glorious Three // Rogue Waves 2004* / Eds. Olagnon, M., Prevosto, M. - Ifremer, France. 2005.
- [237]. Moreira, R.M., Peregrine, D.H., Nonlinear interactions between deep-water waves and currents // *J. Fluid Mech.* 2012. V. 691. P. 1-25.
- [238]. Mori, N. Occurrence probability of a freak wave in a nonlinear wave field // *Ocean Eng.* 2004. V. 31. P. 165-175.
- [239]. Mori, N., Janssen, P.A.E.M. On kurtosis and occurrence probability of freak waves // *J. Phys. Oceanogr.* 2006. V. 36. P. 1471–1483.
- [240]. Mori, N., Liu, P.C., Yasuda, T. Analysis of freak wave measurements in the Sea of Japan // *Ocean. Eng.* 2002. V. 29. P. 1399–1414.
- [241]. Mori, N., Onorato, M., Janssen, P.A.E.M. On the Estimation of the Kurtosis in Directional Sea States for Freak Wave Forecasting // *J. Phys. Oceanogr.* 2011. V. 41. P. 1484-1497.
- [242]. Mori, N., Onorato, M., Janssen, P.A.E.M., Osborne, A.R., Serio, M. On the extreme statistics of long-crested deep water waves: Theory and experiments // *J. Geophys. Res.* 2007. V. 112. Art. C09011.
- [243]. Nepf, H.M., Wu, C.H., Chan, E.S. A comparison of two- and three-dimensional wave breaking // *J. Phys. Oceanogr.* 1998. V. 28. P. 1496-1510.
- [244]. Niclasen, B.A., Simonsen, K., Magnusson, A.K. Wave forecasts and small-vessel safety: A review of operational warning parameters // *Marine Structures.* 2010. V. 23. P. 1–21.
- [245]. Nikolkina, I., Didenkulova, I. Rogue waves in 2006 – 2010 // *Nat. Hazards Earth Sys. Sci.* 2011. V. 11. P. 2913–2924.

- [246]. Nikolkina, I., Didenkulova, I. Catalogue of rogue waves reported in media in 2006–2010 // *Natural Hazards*. 2012. V. 61. P. 989-1006.
- [247]. Olagnon, M., Athanassoulis, G.A. (eds.) *Rogue Waves 2000*. - Ifremer, France. 2001.
- [248]. Olagnon, M., Magnusson, A.K. Sensitivity study of sea state parameters in correlation to extreme wave occurrences // *Proc. 14th Int. Offshore and Polar Eng. Conf. ISOPE*. 2004. P. 18–25.
- [249]. Olagnon, M., Prevosto, M. (eds.) *Rogue Waves 2004*. - Ifremer, France. 2005.
- [250]. Olagnon, M., Prevosto, M. (eds.) *Rogue Waves 2008*. - Ifremer, France. 2009.
- [251]. Onorato, M., Osborne, A. R., Serio, M. Modulational instability in crossing sea states: a possible mechanism for the formation of freak waves // *Phys. Rev. Lett.* 2006. V. 96. Art. 014503.
- [252]. Onorato, M., Osborne, A.R., Serio, M. Extreme wave events in directional, random oceanic sea states // *Phys. Fluids*. 2002. V. 14. P. L25–L28.
- [253]. Onorato, M., Osborne, A.R., Serio, M., Bertone, S. Freak waves in random oceanic sea states // *Phys. Rev. Lett.* 2001. V. 86. P. 5831–5834.
- [254]. Onorato, M., Proment, D. Approximate rogue wave solutions of the forced and damped nonlinear Schrödinger equation for water waves // *Phys. Lett. A*. 2012. V. 376. P. 3057-3059.
- [255]. Onorato, M., Proment, D., Clauss, G., Klein, M. Rogue waves: From nonlinear Schrodinger breather solutions to sea-keeping test // *PLOS One*. 2013a. V. 8. Art. e54629.
- [256]. Onorato, M., Proment, D., Toffoli, A. Triggering rogue waves in opposing currents // *Phys. Rev. Lett.* 2011. V. 107. Art. 184502.
- [257]. Onorato, M., Residori S., Bortolozzo U., Montinad A., Arecchi F. T. Rogue waves and their generating mechanisms in different physical contexts // *Phys. Rep.* 2013b. V. 528. P. 47-89.
- [258]. Onorato, M., Waseda, T., Toffoli, A., Cavaleri, L., Gramstad, O., Janssen, P. A., Kinoshita, T., Monbaliu, J., Mori, N., Osborne, A.R., Serio, M., Stansberg, C.T., Tamura, H., Trulsen, K. Statistical properties of directional ocean waves: the role of the modulational instability in the formation of extreme events // *Phys. Rev. Lett.* 2009. V. 102. Art. 114502.
- [259]. Osborne, A.R. Advances in nonlinear waves with emphasis on aspects for ship design and wave forensics // *Proc. ASME 2013 32nd Int. Conf. Ocean, Offshore and Arctic Eng. OMAE2013*. 2013.

- [260]. Osborne, A.R. Nonlinear ocean waves and the Inverse Scattering Transform. - Academic Press. 2010. 944 p.
- [261]. Osborne, A.R., Onorato, M., Serio, M. Nonlinear Fourier analysis of deep-water, random surface waves: Theoretical formulation and experimental observations of rogue waves // Proc. 14<sup>th</sup> Aha Huliko‘a Winter Workshop, Honolulu, Hawaii. 2005.
- [262]. Osborne, A.R., Petti, M. Laboratory-generated, shallow-water surface waves: Analysis using the periodic, inverse scattering transform // Phys. Fluids. 1994. V. 6. P. 1727–1744.
- [263]. Paprota, M., Przewłócki, J., Sulisz, W., Swerpel, B.E. Extreme waves and wave events in the Baltic Sea // Rogue Waves: Forecast and Impact on Marine Structures. - GKSS Research Center, Geesthacht, Germany. 2003.
- [264]. Parkes, E.J. The modulation of weakly nonlinear dispersive waves near the marginal state of instability // J. Phys. A: Math. Gen. 1987. V. 20. P. 2025-2036.
- [265]. Pelinovsky E., Kharif C. Simplified Model of the Freak Wave Formation from the Random Wave Field // Proc. 15th Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Caesaria, Israel. 2000. P. 142-145.
- [266]. Pelinovsky, E., Kharif, C., Extreme Ocean Waves. - Springer. 2008.
- [267]. Pelinovsky, E., Kokorina, A. The applicability of the Korteweg–de Vries equation for description of the statistics of the freak waves // J. Korean Soc. Coastal Ocean Engn. 2002. V. 14. P. 308-318.
- [268]. Pelinovsky, E., Polukhina, O., Kurkin, A. Rogue edge waves in the ocean // Eur. Phys. J. Special Topics. 2010. V. 185. P. 35–44.
- [269]. Pelinovsky, E., Sergeeva, A. Numerical modeling of the KdV random wave field // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2006. V. 25. P. 425–434.
- [270]. Pelinovsky, E., Talipova, T., Kharif, C. Nonlinear-dispersive mechanism of the freak wave formation in shallow water // Physica D. 2000. V. 147. P. 83-94.
- [271]. Peregrine D.H. Interaction of water waves and currents // Adv. Appl. Mech. 1976. V. 16. P. 9-117.
- [272]. Peregrine, D.H. Water waves, nonlinear Schrodinger equations and their solutions // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. 1983. V. 25. P. 16-43.
- [273]. Peregrine, D.H., Bredmose, H., Bullock, G., Obhrai, C., Muller, G., Wolters, G. Violent water wave impact on a wall // Proc. 14th Aha Huliko‘a Winter Workshop, Honolulu, Hawaii. 2005.

- [274]. Peregrine, D.H., Smith, R. Nonlinear effects upon waves near caustics // *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A.* 1979. V. 292. P. 341–370.
- [275]. Peregrine, D.H., Smith, R. Stationary gravity waves on non-uniform free streams: jet-like streams // *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 1975. V. 77. P. 415–438.
- [276]. Peregrine, D.H., Thomas, G.P. Finite-amplitude deep-water waves on currents // *Phil. Trans. Royal. Soc. London A.* 1979. V. 292. P. 371-390.
- [277]. Peterson, P., Soomere, T., Engelbrecht, J., van Groesen, E. Interaction solitons as a possible model for extreme waves in shallow water // *Nonlin. Proc. Geophys.* 2003. V. 10. P. 503-510.
- [278]. Petrova, P.G., Arena, F., Guedes Soares, C. Space-time evolution of random wave groups with high waves based on the quasi-determinism theory // *Ocean Engineering.* 2011. V. 38. P. 1640-1648.
- [279]. Phillips, O.M. On the generation of waves by turbulent wind // *J. Fluid Mech.* 1957 V. 2. P. 417-445.
- [280]. Pinho, U.F., Liu, P.C., Ribeiro, C.E.P. Freak Waves at Campos Basin, Brazil // *Geofizika.* 2004. V. 21. P. 53-67.
- [281]. Porubov, A.V., Tsuji, H., Lavrenov, I.V., Oikawa, M. Formation of the rogue wave due to nonlinear two-dimensional waves interaction // *Wave Motion.* 2005. V. 42. P. 202–210.
- [282]. Pugh, D.T. Tides, surges, and mean sea level. - John Wiley & Sons, New York. 1987. 472 p.
- [283]. Ridgway, A. Killer waves // *BBC Focus.* 2010. December. P. 51-55.
- [284]. Rosenthal, W., Lehner, S. Rogue waves: Results of the MaxWave Project // *J. Offshore Mech. Arctic Eng.* 2008. V. 130. Art. 021006.
- [285]. Rosenthal, W., Lehner, S., Dankert, H., Guenther, H., Hessner, K., Horstmann, J., Niedermeier, A., Nieto-Borge, J.C., Schulz-Stellenfleth, J., Reichert, K. Detection of extreme single waves and wave statistics // *RogueWaves: Forecast and Impact on Marine Structures.* - GKSS Research Center, Geesthacht, Germany. 2003.
- [286]. Roskes, G.J. Nonlinear multiphase deep-water wavetrains // *Phys. Fluids.* 1976. V. 19. P. 1253–1254.
- [287]. Ruban, V.P. Nonlinear stage of the Benjamin - Feir in-stability: three-dimensional coherent structures and rogue waves // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V. 99. Art. 044502.
- [288]. Ruban, V.P. Quasiplanar steep water waves // *Phys. Rev. E.* 2005. V.71. Art. 055303(R).

- [289]. Ruban, V.P. Two different kinds of rogue waves in weakly crossing sea states // *Phys. Rev. E*. 2009. V. 79. Art. 065304.
- [290]. Sanina, E. Statistics of wave kinematics in random directional wave fields // PhD Dissertation. Swinburne University of Technology, Melbourne. 2014.
- [291]. Schober, C.M. Melnikov analysis and inverse spectral analysis of rogue waves in deep water // *Eur. J. Mech. B/Fluids*. 2006. V. 25. P. 602–620.
- [292]. Schober, C.M., Calini, A. Rogue waves in higher-order nonlinear Schrodinger models // *Extreme Waves* / Ed. Pelinovsky, E., Kharif, C. - Springer. 2008. P. 31–52.
- [293]. Sedletsky, Yu.V. The modulational instability of Stokes waves on the surface of finite-depth fluid // *Phys. Lett. A*. 2005. V. 343. P. 293–299.
- [294]. Segur, H., Henderson, D., Carter, J., Hammack, J., Li, C., Phei, D., Socha, K. Stabilizing the Benjamin-Feir instability // *J. Fluid Mech*. 2005. V. 539. P. 229–272.
- [295]. Sergeeva, A., Pelinovsky, E., Talipova, T. Nonlinear random wave field in shallow water: variable Korteweg-de Vries framework // *Nat. Hazards Earth Syst. Sci*. 2011. V. 11. P. 323–330.
- [296]. Serio, M., Onorato, M, Osborne, A.R., Janssen, P.A.E.M. On the computation of the Benjamin-Feir Index // *Il Nuovo Cimento*. 2005. V. 28. P. 893-903.
- [297]. Shemer, L., Alperovich, L. Peregrine breather revisited // *Phys. Fluids*. 2013. V. 25. Art. 051701.
- [298]. Shemer, L., Kit, E., Jiao, H. An experimental and numerical study of the spatial evolution of unidirectional nonlinear water-wave groups // *Phys. Fluids*. 2002. V. 14. P. 3380-3390.
- [299]. Shemer, L., Sergeeva, A. An experimental study of spatial evolution of statistical parameters in a unidirectional narrow-banded random wavefield // *J. Geophys. Res. Oceans*. 2009. V. 114. Art. C01015.
- [300]. Shemer, L., Sergeeva, A., Liberzon, D. Effect of the initial spectral shape on spatial evolution of the statistics of unidirectional nonlinear random waves // *J. Geophys. Res*. 2010. V. 115. Art. 12039.
- [301]. Shrira, V.I., Geogjaev, V.V. What makes the Peregrine soliton so special as a prototype of freak waves? // *J. Eng. Math*. 2010. V. 67. P. 11–22.
- [302]. Simon, B. The bound state of weakly coupled Schrodinger operators in one and two dimensions // *Ann. Phys*. 1976. V. 97. P. 279–288.

- [303]. Slunyaev A., Kharif C., Pelinovsky E., Talipova T. Nonlinear wave focusing on water of finite depth // *Physica D*. 2002. V. 173. P. 77-96.
- [304]. Smith, R. Asymptotic solutions for high-frequency trapped wave propagation // *Phil. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A*. 1970. V. 268. P. 289–324.
- [305]. Smith, R. Giant waves // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 77. P. 417–431.
- [306]. Smith, R. The reflection of short gravity waves on a non-uniform current // *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 1975. V. 78. P. 517–525.
- [307]. Socquet-Juglard, H., Dysthe, K., Trulsen, K., Krogstad, H.E., Liu, J.-D. Probability distributions of surface gravity waves during spectral changes // *J. Fluid Mech.* 2005. V. 542. P. 195-216.
- [308]. Solli, D.R., Ropers, C., Koonath, P., Jalali, B. Optical rogue waves // *Nature*. 2007. V. 450. P. 1054-1057.
- [309]. Stansell, P. Distributions of extreme wave, crest and trough heights measured in the North Sea // *Ocean Eng.* 2005. V. 32. P. 1015–1036.
- [310]. Stansell, P. Distributions of freak wave heights measured in the North Sea // *Appl. Ocean Res.* 2004. V. 26. P. 35–48.
- [311]. Stiassnie, M., Shemer, L. On the interaction of four water-waves // *Wave Motion*. 2005. V. 41. P. 307-328.
- [312]. Stocker, J.D., Peregrine, D.H. The current-modified nonlinear Schrodinger equation // *J. Fluid Mech.* 1999. V. 399. P. 335-353.
- [313]. Su, M.Y., Green, A.W. Coupled two-dimensional and 3-dimensional instabilities of surface gravity-waves // *Phys. Fluids*. 1984. V. 27. P. 2595–2597.
- [314]. Tajiri, M., Watanabe, Y. Breather solutions to the focusing nonlinear Schrodinger equation // *Phys. Rev. E*. 1998. V. 57. P. 3510 – 3519.
- [315]. Taklo, T.M.A., Trulsen, K., Gramstad, O., Krogstad, H.E., Jensen, A. Measurement of the dispersion relation for random surface gravity waves // *J. Fluid Mech.* 2015. V. 766. P. 326-336.
- [316]. Tanaka, M. A method of studying nonlinear random field of surface gravity waves by direct numerical simulation // *Fluid Dyn. Res.* 2001. V. 28. P. 41-60.
- [317]. Tanaka, M. Maximum amplitude of modulated wavetrain // *Wave Motion*. 1990. V. 12. P. 559-568.

- [318]. Tanaka, M. On the role of resonant interactions in the short-term evolution of deep-water ocean spectra // *J. Phys. Oceanogr.* 2007. V. 37. P. 1022-1036.
- [319]. Tayfun, M.A., Fedele, F. Wave height distributions and nonlinear effects // *Ocean Eng.* 2007. V. 34. P. 1631-1649.
- [320]. Taylor, P.H., Ohl, C.O.G., Sauvee, J. Focussed wave groups I: Local structure, kinematics, and the Creamer transform // *Proc. OMAE* 1999. 1999. Art. OMAE99/S&R-6461.
- [321]. Thomas, G.P. Wave-current interactions: an experimental and numerical study: Part II: nonlinear waves // *J. Fluid Mech.* 1990. V. 216. P. 505–536.
- [322]. Thomas, G.P. Wave-current interactions: an experimental and numerical study. Part 1. Linear waves // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 110. P. 457–474.
- [323]. Thomas, G.P., Klopman, G. Wave-current interactions in the near-shore region // *Advances in Fluid Mechanics. - Computational Mechanics Publications.* 1997. P. 255–319.
- [324]. Thomas, R., Kharif, C., Manna, M. A nonlinear Schrödinger equation for water waves on finite depth with constant vorticity // *Phys. Fluids.* 2012. V. 24. Art. 127102.
- [325]. Toffoli, A., Fernandez, L., Monbaliu, J., Benoit, M., Gagnaire-Renou, E., Lefevre, J.M., Cavaleri, L., Proment, D., Pakozdi, C., Stansberg, C.T., Waseda, T., Onorato, M. Experimental evidence of the modulation of a plane wave to oblique perturbations and generation of rogue waves in finite water depth // *Phys. Fluids.* 2013. V. 25. Art. 091701.
- [326]. Toffoli, A., Lefevre, J.M., Bitner-Gregersen, E., Monbaliu, J. Towards the identification of warning criteria: Analysis of a ship accident database // *Appl. Ocean Res.* 2005. V. 27. P. 281–291.
- [327]. Toole, J.M., Raymer, M.E. Heat and fresh water budgets of the Indian Ocean // *Deep-Sea Res. A.* 1985. V. 32. P. 917–928.
- [328]. Torum, A., Gudmestad, O.T. (eds.) *Water Wave Kinematics.* - Kluwer, Dordrecht. 1990.
- [329]. Touboul, J. On the influence of wind on extreme wave events // *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* 2007. V. 7. P. 123–128.
- [330]. Touboul, J., Giovanangeli, J.P., Kharif, C., Pelinovsky, E. Freak waves under the action of wind: experiments and simulations // *Eur. J. Mech. B/Fluids.* 2006. V. 25. P. 662–676.
- [331]. Touboul, J., Kharif, C. Nonlinear evolution of the modulational instability under weak forcing and damping // *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* 2010. V. 10. P. 2589–2597.

- [332]. Trulsen, K. Simulating the spatial evolution of a measured time series of a freak wave // Proc. Workshop “Rogue Waves 2000” / Ed. Olagnon, M., Athanassoulis, G.A. - Ifremer, France. 2001. P. 265-274.
- [333]. Trulsen, K. Weakly nonlinear and stochastic properties of ocean wave fields: application to an extreme wave event // Waves in geophysical fluids: Tsunamis, Rogue waves, Internal waves and Internal tides / Eds. Grue, J., Trulsen, K. - CISM Courses and Lectures No. 489. New York, Springer Wein. 2006.
- [334]. Trulsen, K., Dysthe, K.B. A modified nonlinear Schrödinger equation for broader bandwidth gravity waves on deep water // Wave Motion. 1996. V. 24. P. 281–289.
- [335]. Trulsen, K., Dysthe, K.B. Freak waves—a three-dimensional wave simulation // Proc. 21<sup>st</sup> Symp. on Naval Hydrodynamics. National Academy Press, USA. 1997. P. 550–560.
- [336]. Trulsen, K., Gudmestad, O.T., Velarde, M.G. The nonlinear Schrödinger method for water wave kinematics on finite depth // Wave Motion. 2001. V. 33. P. 379-395.
- [337]. Trulsen, K., Kliakhandler, I., Dysthe, K.B., Velarde, M.G. On weakly nonlinear modulation of waves on deep water // Phys. Fluids. 2000. V. 12. P. 2432-2437.
- [338]. Trulsen, K., Raustøl, A., Rye, L.B. Freak waves in nonlinear unidirectional wave trains over a sloping bottom // Geophys. Res. Abstracts. 2015. V. 17. Art. EGU2015-11975-1.
- [339]. Trulsen, K., Stansberg, C.T. Spatial evolution of water waves: numerical simulation and experiment of bichromatic waves // Proc. Conf. ISOPE 2001. 2001. P. 71–77.
- [340]. Trulsen, K., Zeng, H., Gramstad, O. Laboratory evidence of freak waves provoked by non-uniform bathymetry // Phys. Fluids. 2012. V. 24. Art. 097101.
- [341]. Turpin, F.-M., Benmoussa, C., Mei, C.C. Effects of slowly varying depth and current on the evolution of a Stokes wavepacket // J. Fluid Mech. 1983. V. 132. P. 1–23.
- [342]. Turton, J., Fenna, P. Observations of extreme wave conditions in the north-east Atlantic during December 2007 // Weather. 2008. V. 63(12). P. 352-355.
- [343]. Veltcheva, D., Cavaco, P., Guedes Soares, C. Comparison of methods for calculation of the wave envelope // Ocean Eng. 2003. V. 30. P. 937-948.
- [344]. Veltcheva, D., Guedes Soares, C. Analysis of Abnormal Wave Records by the Hilbert Huang Transform Method // J. Atm. Oceanic Tech. 2007. V. 24(9). P. 1678–1689.
- [345]. Viotti, C., Dias, F. Extreme waves induced by strong depth transitions: Fully nonlinear results // Phys. Fluids. 2014. V. 26. Art. 051705.



- [346]. Viotti, C., Dutykh, D., Dudley, J.M., Dias, F. Emergence of coherent wave groups in deep-water random sea // *Phys. Rev. E*. 2013. V. 87. Art. 063001.
- [347]. Voronovich, V.V., Shrira, V.I., Thomas, G. Can bottom friction suppress ‘freak wave’ formation? // *J. Fluid Mech.* 2008. V. 604. P. 263–296.
- [348]. Waseda, T. Experimental investigation and applications of the modulational wave train // *Proc. Workshop on Rogue Waves*, 12–15 December 2005, ICMS, Edinburgh. 2005.
- [349]. Waseda, T., Kinoshita, T., Tamura, H. Evolution of a random directional wave and freak wave occurrence // *J. Phys. Oceanogr.* 2009. V. 39. P. 621-639.
- [350]. West, B.J., Brueckner, K.A., Janda, R.S., Milder, D.M., Milton, R.L. A new numerical method for surface hydrodynamics // *J. Geophys. Res.* 1987. V. 92. P. 11803-11824.
- [351]. White, B.S., Fornberg, B. On the chance of freak waves at the sea // *J. Fluid Mech.* 1998. V. 255. P. 113–138.
- [352]. Wu, G., Liu, Y., Yue, D.K.P. A note on stabilizing the Benjamin – Feir instability // *J. Fluid Mech.* 2006. V. 556. P. 45-54.
- [353]. Xiao, W., Liu, Y., Wu, G., Yue, D.K.P. Rogue wave occurrence and dynamics by direct simulations of nonlinear wave-field evolution // *J. Fluid Mech.* 2013. V. 720. P. 357-392.
- [354]. Yan, S., Ma, Q.W. Numerical simulation of interaction between wind and 2-D freak waves // *Eur. J. Mech. B/Fluids*. 2010. V. 29. P. 18–31.
- [355]. Yeom D.-II., Eggleton B.J. Rogue waves surface in light // *Nature*. 2007. V. 450. P. 953-954.
- [356]. Yuen, H.C., Lake, B.M. Nonlinear deep water waves: Theory and experiment // *Phys. Fluids*. 1975. V. 18. P. 956-960.
- [357]. Yuen, H.C., Lake, B.M. Nonlinear dynamics of deep-water gravity waves // *Adv. Appl. Mech.* 1982. V. 22. P. 67-229.
- [358]. Zakharov V.E. (Ed.) *What is integrability?* Springer Series in Nonlinear Dynamics. - Berlin: Springer-Verlag. XIV. 1991. 321 p.
- [359]. Zakharov V.E., Gelash A.A. Nonlinear stage of modulation instability // *Phys. Rev. Lett.* 2013. V. 111. Art. 054101.
- [360]. Zakharov, V. Statistical theory of gravity and capillary waves on the surface of a finite-depth fluid // *Eur. J. Mech. B / Fluids*. 1999. V. 18. P. 327-344.
- [361]. Zakharov, V.E., Dyachenko, A.I., Prokofiev, A.O. Freak waves as nonlinear stage of Stokes wave modulation instability // *Eur. J. Mech. B / Fluids*. 2006. V. 25. P. 677-692.

- [362]. Zakharov, V.E., Dyachenko, A.I., Vasilyev, O.A. New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // *Eur. J. Mech. B / Fluids*. 2002. V. 21. P. 283–291.
- [363]. Zakharov, V.E., Ostrovsky, L.A. Modulation instability: the beginning // *Physica D*. 2009. V. 238. P. 540–548.
- [364]. Zeng, H., Trulsen, K. Evolution of skewness and kurtosis of weakly nonlinear unidirectional waves over a sloping bottom // *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* 2012. V. 12. P. 631–638.
- [365]. Zhang, H.D., Soares, C.G., Cherneva, Z., Onorato, M. Modeling extreme wave heights from laboratory experiments with the nonlinear Schrodinger equation // *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* 2014. V. 14. P. 959–968.