Условия и решение задач
на городской астрономической олимпиаде по астрономии, астрофизике и физике космоса им. М. Т. Греховой
23 декабря 2007 г.

8–9 классы

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. а) Как определить, в южном или северном полушарии Земли Вы находитесь, наблюдая за перемещением Солнца по небу в течение дня?

б) Как определить широту места в северном полушарии, зная направление на Полярную звезду?

2. Длина тени в Нижнем Новгороде в августовский полдень близка к высоте предметов. Какова длина тени от вертикального шеста высотой 1 метр в полдень того же дня в Австралии на широте 34°. Географическая широта Нижнего Новгорода равна 56°.

3. Ближайшая к нам крупная галактика Туманность Андромеды видна невооружённым глазом как слабое пятнышко диаметром в четверть диаметра Луны. В то же время звёзды (за исключением Солнца) наблюдаются как яркие точечные объекты. Определите, что больше: расстояние между галактиками, выраженное через их диаметр, или расстояние между звёздами, выраженное через их диаметр?

4. Две звезды с массами $m_1 > m_2$ образуют двойную систему (вращаются относительно друг друга). Определите отношение кинетических энергий звёзд, связанных с их орбитальным вращением. Какая звезда обладает бóльшей кинетической энергией?

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Расстояние до Туманности Ориона было определено наиболее точно методом параллакса на радиоинтерферометре VLBA в 2007 г. Угловое смещение звёзд туманности в диаметрально противоположных точках орбиты Земли составило $\theta = \pm 0{,}00242$ угловых секунды. Определите, сколько времени идёт до нас свет от Туманности Ориона со скоростью $c = 300\,000$ км/с, если радиус орбиты Земли $R_{\mathrm{E}} = 150$ млн. км.

2. Определите радиус орбиты геостационарного спутника (спутника, который постоянно находится над одной точкой Земли), если ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 9{,}8$ м/с^2, а радиус Земли $R = 6400$ км.

3. Оцените время, за которое температура Солнца изменилась бы вдвое без термоядерного подогрева в центре. Считайте Солнце состоящим из ионизованного водорода с массой $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33}$ г и температурой $T = 7$ млн. градусов (половина от температуры в центре звезды). Молярная масса водорода $m_{\mathrm{H}} = 1$ г/моль, газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль $\cdot$ К). Плотность потока энергии солнечного излучения на орбите Земли $F = 1{,}4$ кВт/м^2, радиус орбиты Земли $R_{\mathrm{E}} = 150$ млн. км. При расчёте используйте известное выражение $S = 4\pi r^2$ для площади сферы радиуса r.

4. При наибольшем сближении с Землёй (в противостоянии) Марс имеет видимую звездную величину $m_0 = -2{,}5^{\mathrm{m}}$. Вычислите видимую звездную величину Марса через три месяца после противостояния. Расстояние от Земли до Солнца $R_{\mathrm{E}} = 150$ млн. км, расстояние от Марса до Солнца $R_{\mathrm{M}} = 230$ млн. км.

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. В настоящее время основным способом обнаружения экзопланет (планет у других звёзд) являются измерения периодических вариаций скорости звезды вдоль луча зрения. Современные методы позволяют измерять такие вариации с амплитудой до 1 м/с.

а) Можно ли таким образом обнаружить планету типа Земли на той же орбите, что и в солнечной системе?

б) Можно ли таким образом обнаружить планету типа Юпитера на орбите Земли?

Масса Солнца составляет 333 000 масс Земли, а масса Юпитера — 318 масс Земли, радиус орбиты Земли $R_{\mathrm{E}} = 150$ млн. км.

2. Спутник вращается по круговой орбите вокруг Земли. Из-за трения о верхние слои атмосферы его высота постепенно уменьшается. Как изменяется кинетическая энергия спутника, если трение совершает над ним работу минус 1 Дж?

3. Лунные морские приливы в два раза выше, чем солнечные. Оцените среднюю плотность Солнца, если средняя плотность Луны составляет 3 тонны на кубический метр.

4. Какой площади должен быть «световой» парус — полностью отражающая свет плоскость, чтобы в окрестности Земли на него действовала сила давления солнечного излучения в 1 ньютон? Плотность потока энергии солнечного излучения на орбите Земли $F = 1{,}4$ кВт/м^2. Для расчёта давления излучения используйте известное соотношение $w = pc$ между энергией w и импульсом p фотона (частицы света), где $c = 300\,000$ км/с — скорость света (фотона).

1. а) Если Солнце движется по небосводу по часовой стрелке, то Вы находитесь в северном полушарии. Если против часовой стрелки — в южном.

б) Географическая широта равна углу между направлением на Полярную звезду и плоскостью горизонта (земли). В частности, на северном полюсе географическая широта равна 90° **и Полярная звезда располагается точно над головой, а в приэкваториальных областях — низко над горизонтом.**

2. Ответ: 1 метр.

Сумма географических широт пунктов в Нижнем Новгороде и Австралии составляет $56 + 34 = 90$ градусов. Следовательно, полуденные вертикали в Нижнем Новгороде и Австралии образуют прямой угол — 90°. Из равенства длины тени и высоты предмета в Нижнем Новгороде следует, что направление на Солнце составляет угол 45° с полуденной вертикалью в Нижнем Новгороде и отклонено к югу. Таким образом, направление на Солнце является биссектрисой прямого угла между полуденными вертикалями в Нижнем Новгороде и Австралии. Точки в Нижнем Новгороде и Австралии (в соответствующие полдни) расположены зеркально симметрично относительно направления на Солнце и, следовательно, одинаковые предметы в Нижнем Новгороде и Австралии отбрасывают равные тени. В частности, шест высотой 1 метр отбрасывает тень, равную своей высоте 1 метр.

3. Ответ: больше расстояние до звёзд, выраженное через их диаметр.

Отношение диаметра D объекта к расстоянию d до него равно видимому угловому размеру объекта $\theta = D/d$ (точнее $\sin(\theta/2) = (D/2)/d$). Звёзды видны как точечные объекты, поэтому их угловой размер $\theta = D/d$ существенно меньше, чем угловой размер Туманности Андромеды. Следовательно, расстояние до звёзд, выраженное через их диаметр, — $d/D = 1/\theta$ — существенно больше, чем аналогичный параметр для Туманности Андромеды.

4. Ответ: отношение кинетических энергий звёзд обратно пропорционально отношению их масс — $W_1/W_2 = m_2/m_1$. Большей кинетической энергией обладает звезда с меньшей массой m_2.

Звёзды вращаются вокруг общего неподвижного центра масс. Поскольку центр масс неподвижен, то в любой момент времени звёзды движутся в противоположные стороны (мгновенные скорости направлены вдоль параллельных прямых в противоположные стороны), а отношение их скоростей обратно пропорционально отношению масс:

$$v_1/v_2 = m_2/m_1. \tag{1}$$

(более тяжёлая звезда с массой m_1 движется медленнее, а лёгкая — быстрее). Используя соотношение (1), находим искомое отношение кинетических энергий:

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{m_1 v_1^2/2}{m_2 v_2^2/2} = \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 = \frac{m_2}{m_1} < 1.$$

Решение задач 10 класса

1. Ответ: 1350 лет.

Пусть некоторую звезду A в туманности Ориона наблюдают из точек B и C, лежащих на концах диаметра орбиты Земли. Указанный диаметр перпендикулярен направлению от Солнца на туманность Ориона, чтобы отклонение звезды в точках B и C было максимальным. Согласно условию задачи направления BA и CA на звезду образуют угол 2θ. Тогда в равнобедренном треугольнике ABC с вершиной A на звезде основание

$$\begin{aligned} BC &= 2\,AB\,\sin(\theta) \approx 2\,AB\,\theta[\text{рад}] = \\ &= 2\,AB\,\pi/(180\cdot 60\cdot 60)\cdot\theta[\text{угл. с}] = 2\,AB\,\pi/(648\,000)\cdot\theta[\text{угл. с}], \quad (1)\end{aligned}$$

где в квадратных скобках указаны единицы измерения угла θ. Вместе с тем

$$BC = 2R_{\text{E}}. \qquad (2)$$

Приравнивая (1) и (2), находим расстояние до туманности Ориона

$$r \equiv AB = R_{\text{E}}/\theta[\text{рад}] = (648\,000/\pi)\,R_{\text{E}}/\theta[\text{угл. с}] = 1{,}3\cdot 10^{16}\ \text{км}.$$

Искомое время распространения света от туманности Ориона до Земли

$$t = r/c = 1{,}3\cdot 10^{16}\ \text{км}/(300\,000\ \text{км/с}) = 4{,}3\cdot 10^{10}\ \text{с} = 1350\ \text{лет}.$$

В последнем выражнии учтено, что 1 год $= 365\cdot 24\cdot 3600$ с $= 3{,}2\cdot 10^7$ с.

2. Ответ: 42 тыс. км.

Пусть спутник с массой m движется со скоростью v по круговой орбите искомого радиуса r. Согласно второму закону Ньютона центростремительное ускорение спутника v^2/r равно силе гравитации со стороны Земли GmM/r^2, делённой на массу спутника m:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2}, \qquad (1)$$

где G — гравитационная постоянная, M — масса Земли. Скорость спутника v равна длине его орбиты $2\pi r$, делённой на период вращения T:

$$v = \frac{2\pi r}{T}. \qquad (2)$$

Подставляем (2) в (1):

$$\frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{GM}{r^2}.$$

Выражаем радиус орбиты из последнего равенства:

$$r = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}. \qquad (3)$$

Ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = GM/R^2$, что определяет произведение

$$GM = gR^2. \qquad (4)$$

Подставляем (4) в (3):

$$r = \left(\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}. \qquad (5)$$

Для того, чтобы находиться над одной точкой Земли спутник должен двигаться с периодом, равным периоду обращения Земли

$$T = 24 \text{ ч} = 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ с} = 86\,400 \text{ с}. \qquad (6)$$

Подставляем в (5) данные из условия задачи: $g = 9{,}8$ м/с$^2 = 0{,}0098$ км/с^2, $R = 6400$ км, и указанный период (6). Получаем ответ $r = 42$ тыс. км.

3. Ответ: 30 млн. лет.

Полная ионизация водорода означает, что единственный электрон, вращавшийся в атоме водорода, больше не привязан к ядру (протону). Каждый атом водорода распадается («диссоциирует») на ядро (протон) и электрон.

Оценим тепловую кинетическую энергию частиц Солнца. Количество водорода (протонов) в молях составляет

$$\nu_{\mathrm{H}} = M_{\odot}/m_{\mathrm{H}}.$$

Таким же является количество оторванных электронов: $\nu_{\mathrm{e}} = \nu_{\mathrm{H}}$. Считая, что ядра водорода и электроны образуют одноатомные газы, находим их суммарную кинетическую энергию

$$K = (3RT/2)\,(\nu_{\mathrm{H}} + \nu_{\mathrm{e}}) = 3RT\nu_{\mathrm{H}} = 3RTM_{\odot}/m_{\mathrm{H}}. \qquad (1)$$

Механическая энергия частиц Солнца складывается из кинетической энергии K ядер водорода (протонов) и оторванных от них электронов, а также потенциальной энергии U этих частиц в гравитационном поле Солнца. На примере движения частицы массы m по круговой орбите радиуса r в поле точечной неподвижной массы M можно показать, что

$$K = -U/2. \tag{2}$$

Действительно, согласно второму закону Ньютона произведение центростремительного ускорения v^2/r на массу частицы m равно гравитационной силе GmM/r^2:

$$mv^2/r = GmM/r^2,$$

где G — гравитационная постоянная. Умножение последнего равенства на r даёт указанное соотношение между кинетической и потенциальной энергией:

$$K_m = mv^2/2 = -(-GmM/r)/2 = -U_m/2.$$

Из соотношения (2) следует, что полная механическая энергия $W = K + U$ образующих Солнце частиц отрицательна и равна кинетической энергии, взятой со знаком минус:

$$W = K + U = K + (-2K) = -K. \tag{3}$$

Солнце теряет энергию за счёт излучения. Эти потери равны потоку солнечного излучения через сферу, охватывающую орбиту Земли:

$$P = FS = 4\pi R_{\mathrm{E}}^2 F, \tag{4}$$

где $S = 4\pi R_{\mathrm{E}}^2$ — площадь указанной сферы.

Потери энергии Солнцем на излучение приводят к алгебраическому уменьшению отрицательной полной механической энергии W, что происходит за счёт увеличения абсолютной величины $|W|$, а, следовательно, и равной ей величины K (см. (3)). Таким образом, кинетическая энергия K частиц Солнца и температура T стали бы увеличиваться без термоядерного подогрева в центре. Гравитационное сжатие сопровождается нагревом: высвобождающаяся потенциальная гравитационная энергия поровну переходит в энергию излучения и тепловую энергию частиц.

Согласно (1) увеличение температуры T в два раза сопровождается таким же увеличением в два раза кинетической энергии K. Вместе с тем согласно (3) во столько же раз увеличивается абсолютная величина $|W|$ полной механической энергии. Таким образом, искомое время изменения температуры в два раза оценивается как время изменения абсолютной величины механической энергии от $|W|$ до $2\,|W|$:

$$t = \frac{2\,|W| - |W|}{P} = \frac{|W|}{P} = \frac{K}{P} = \frac{3RTM_\odot/m_\mathrm{H}}{4\pi R_\mathrm{E}^2 F}, \tag{5}$$

где подставлены выражения (1) и (4) для K и P.

Подставляем в (5) численные значения из условия задачи: $R = 8{,}3$ Дж/(моль $\cdot$ К), $T = 7 \cdot 10^6$ К, $M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$ г, $m_\mathrm{H} = 1$ г/моль, $R_\mathrm{E} = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м, $F = 1400$ Вт/м^2, что даёт

$$t = 8{,}8 \cdot 10^{14}\ \text{с} \approx 30\ \text{млн. лет.}$$

Для перевода времени t из секунд в годы использовано равенство 1 год $= 365 \cdot 24 \cdot 3600$ с $= 3{,}2 \cdot 10^7$ с.

4. Ответ: $-0{,}9^\mathrm{m}$.

Найдём отношение периодов обращения Марса T_M и Земли $T_\mathrm{E} = 12$ месяцев. Для этого рассмотрим произвольную планету с массой m, которая движется вокруг Солнца по круговой орбите радиуса R со скоростью v. Согласно второму закону Ньютона центростремительное ускорение v^2/R равно гравитационной силе со стороны Солнца $GmM_\odot/R^2$, делённой на массу планеты m:

$$\frac{v^2}{R} = G\frac{M_\odot}{R^2}, \tag{1}$$

где $M_\odot$ — масса Солнца, G — гравитационная постоянная. Скорость планеты v равна длине орбиты $2\pi R$, делённой на период обращения T:

$$v = \frac{2\pi R}{T}. \tag{2}$$

Подставляем (2) в (1):

$$\frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{GM_\odot}{R^2},$$

откуда получаем выражение для периода T через радиус орбиты R:

$$T = \left(\frac{4\pi^2 R^3}{GM_\odot}\right)^{1/2}. \tag{3}$$

Отношение выражений (3) для Марса и Земли даёт искомую величину

$$\frac{T_\mathrm{M}}{T_\mathrm{E}} = \left(\frac{R_\mathrm{M}}{R_\mathrm{E}}\right)^{3/2}. \tag{4}$$

В момент максимального сближения планет Марс находится на луче, соединяющем Солнце и Землю. Определим угол φ между радиус-векторами от Солнца на Землю и Марс через $t = 3$ месяца после противостояния. Планеты сместятся по своим орбитам на углы

$$\varphi_\mathrm{E} = 2\pi\frac{t}{T_\mathrm{E}}, \qquad \varphi_\mathrm{M} = 2\pi\frac{t}{T_\mathrm{M}}.$$

Следовательно, угол между планетами

$$\varphi = \varphi_\mathrm{E} - \varphi_\mathrm{M} = 2\pi\left(\frac{t}{T_\mathrm{E}} - \frac{t}{T_\mathrm{M}}\right) = 2\pi\frac{t}{T_\mathrm{E}}\left(1 - \frac{T_\mathrm{E}}{T_\mathrm{M}}\right) =$$
$$= 2\pi\frac{t}{T_\mathrm{E}}\left(1 - \left(\frac{R_\mathrm{E}}{R_\mathrm{M}}\right)^{3/2}\right) = 2\pi\frac{3\ \text{мес.}}{12\ \text{мес.}}\left[1 - (150/230)^{3/2}\right] = 0{,}74\ \text{рад}, \tag{5}$$

где использовано выражение (4) для отношения периодов.

Найдём квадрат расстояния R между планетами через 3 месяца после противостояния по теореме косинусов

$$R^2 = R_\mathrm{E}^2 + R_\mathrm{M}^2 - 2R_\mathrm{E}R_\mathrm{M}\cos(\varphi). \tag{6}$$

Величина (6) относится к квадрату минимального расстояния между планетами $R_\mathrm{E} - R_\mathrm{M}$ в момент противостояния как

$$\frac{R^2}{(R_\mathrm{M} - R_\mathrm{E})^2} = \frac{1 + (R_\mathrm{E}/R_\mathrm{M})^2 - 2\,(R_\mathrm{E}/R_\mathrm{M})\cos(\varphi)}{[1 - (R_\mathrm{E}/R_\mathrm{M})]^2} = 3{,}8, \tag{7}$$

где подставлено отношение $R_\mathrm{E}/R_\mathrm{M} = 150/230$ и угол (5).

В противостоянии с Земли видна вся освещённая Солнцем поверхность Марса. Через три месяца с Земли видна только часть освещённой поверхности Марса. Эта доля определяется углом θ между линиями Марс—Солнце и Марс—Земля. Считаем видимую часть диска Марса равномерно освещённой (отсутствует потемнение к краю диска). От всего диска Марса видна одна полностью освещённая половина, а от второй половины лишь относительная часть, равная $\cos(\theta)$. Таким образом, освещённого доля видимого диска Марса

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\theta). \tag{8}$$

Из теоремы косинусов

$$R_{\mathrm{E}}^2 = R_{\mathrm{M}}^2 + R^2 - 2R_{\mathrm{M}}R\cos(\theta)$$

определяем

$$\cos(\theta) = \frac{R_{\mathrm{M}}^2 + R^2 - R_{\mathrm{E}}^2}{2R_{\mathrm{M}}R} = \frac{2R_{\mathrm{M}}^2 - 2R_{\mathrm{E}}R_{\mathrm{M}}\cos(\varphi)}{2R_{\mathrm{M}}R} = \frac{R_{\mathrm{M}} - R_{\mathrm{E}}\cos(\varphi)}{R} =$$
$$= \frac{1 - (R_{\mathrm{E}}/R_{\mathrm{M}})\cos(\varphi)}{\sqrt{1 + (R_{\mathrm{E}}/R_{\mathrm{M}})^2 - 2\,(R_{\mathrm{E}}/R_{\mathrm{M}})\cos(\varphi)}} = 0{,}76,$$

где использовано выражение (6) для R^2 и подставлены значения $R_{\mathrm{E}}/R_{\mathrm{M}} = 150/230$ и (5) для φ. В итоге находим численное значение параметра (8):

$$\alpha = (1 + 0{,}76)/2 = 0{,}88. \tag{9}$$

Поток принимаемого излучения от Марса пропорционален доле α освещённой части его видимого диска, а также обратно пропорционален квадрату расстояния до него. Поэтому уменьшение принимаемого потока излучения от Марса обусловлено увеличением расстояния до него и уменьшением освещённой доли видимого диска Марса. Изменение блеска составляет

$$\Delta m = 2{,}5\lg\left[\frac{R^2}{(R_{\mathrm{M}} - R_{\mathrm{E}})^2}\frac{1}{\alpha}\right] = 2{,}5\lg\left[3{,}8/0{,}88\right] = 1{,}6^{\mathrm{m}},$$

где подставлены значения (7) и (9). Искомая видимая звёздная величина

$$m = m_0 + \Delta m = -2{,}5^{\mathrm{m}} + 1{,}6^{\mathrm{m}} = -0{,}9^{\mathrm{m}}.$$

1. а) Планета типа Земли не может быть обнаружена, поскольку вызывает вариации лучевой скорости 9,0 см/с $<$ 1 м/с.

б) Напротив, планета типа Юпитера может быть обнаружена, поскольку вызывает заметные вариации лучевой скорости 29 м/с $>$ 1 м/с.

В качестве модели рассмотрим систему, состоящую из звезды и одиночной планеты с массами $M_\odot$ и m соответственно. Звезда и планета вращаются по круговым орбитам вокруг общего центра масс со скоростями $V_\odot$ и v. В силу неподвижности центра масс скорости вращения звезды и планеты обратно пропорциональны отношению их масс:

$$\frac{V_\odot}{v} = \frac{m}{M_\odot},$$

откуда вариации лучевой скорости звезды

$$V_\odot = v\frac{m}{M_\odot}. \tag{1}$$

Скорость планеты равна отношению длины орбиты $2\pi R_\mathrm{E}$ к периоду обращения T:

$$v = \frac{2\pi R_\mathrm{E}}{T}. \tag{2}$$

Подставляем (2) в (1):

$$V_\odot = \frac{2\pi R_\mathrm{E}}{T}\,\frac{m}{M_\odot}. \tag{3}$$

Подставляем в (3) параметры Земли $R_\mathrm{E} = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м, $T = 1$ год $= 365 \cdot 24 \cdot 3600$ с $= 3{,}2 \cdot 10^7$ с, $m_\mathrm{E}/M_\odot = 1/333\,000$:

$$V_{\odot\mathrm{E}} = 0{,}090 \text{ м/с} = 9{,}0 \text{ см/с}.$$

Эта величина меньше минимального обнаружимого значения 1 м/с, поэтому планета типа Земли не может быть обнаружена современными средствами.

Планета типа Юпитер вращалась бы вокруг Солнца на орбите Земли с периодом вращения Земли $T = 1$ год. Тогда для Юпитера в (3) изменяется только отношение масс $m/M_\odot$, которое в 318 раз больше. Таким образом, Юпитер вызывает в 318 раз бо́льшие вариации скорости звезды, чем Земля:

$$V_{\odot \mathrm{J}} = V_{\odot \mathrm{E}} \frac{m_\mathrm{J}}{m_\mathrm{E}} = 0{,}090 \text{ м/с} \cdot 318 = 29 \text{ м/с}.$$

Полученная скорость выше минимального обнаружимого значения 1 м/с, поэтому, в отличие от Земли, планета типа Юпитера может быть обнаружена современными средствами.

2. Ответ: Кинетическая энергия спутника увеличивается на 1 Дж.

Пусть спутник массы m движется по круговой орбите радиуса r со скоростью v. Согласно второму закону Ньютона произведение центростремительного ускорения спутника v^2/r на его массу m равно силе притяжения со стороны Земли:

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM}{r^2},$$

где M — масса Земли, G — гравитационная постоянная. Умножим последнее уравнение на $r/2$:

$$\frac{mv^2}{2} = G\frac{mM}{2r},$$

что даёт опредлённую связь между кинетической энергией спутника $K = mv^2/2$ и его потенциальной энергией в гравитационном поле Земли $U = -GmM/r$:

$$K = -U/2.$$

Тогда полная механическая энергия спутника

$$W = K + U = K + (-2K) = -K \tag{1}$$

отрицательна и равна по абсолютной величине кинетической энергии.

Работа силы трения минус 1 Дж уменьшает алгебраически полную механическую энергию W на 1 Дж. Поскольку W отрицательна, то такое уменьшение происходит за счёт увеличения её абсолютной величины $|W|$

на 1 Дж. В свою очередь согласно (1) увеличение абсолютной величины $|W|$ на 1 Дж сопровождается увеличением кинетической энергии K на 1 Дж.

Иными словами, из-за трения спутник переходит на более низкие орбиты (ближе к Земле). Известно, что тела на более низких орбитах движутся быстрее: например, Меркурий движется вокруг Солнца быстрее, чем Венера или Земля. Поэтому кинетическая энергия спутника, очевидно, увеличивается. Увеличение кинетической энергии происходит за счёт высвобождения потенциальной гравитационной энергии — положительной работы силы тяжести при смещении спутника по вертикали. Положительная работа силы тяжести ровно в 2 раза больше по абсолютной величине отрицательной работы силы трения. Поэтому суммарная работа силы тяготения и силы трения над спутником оказывается положительной и равной по абсолютной величине отрицательной работе силы трения. Таким образом, кинетическая энергия спутника увеличивается, и это увеличение совпадает по абсолютной величине с работой силы трения.

3. Ответ: 1,5 т/м^3.

В однородном гравитационном поле все части Земли, в том числе и мирового океана, двигались бы с некоторым одинаковым ускорением a_g (как в невесомости, падающем лифте), и никаких приливов не было. Небольшое отличие сил гравитации со стороны Луны или Солнца в разных точках Земли стремится придать разные ускорения разным точкам мирового океана, что деформирует его поверхность. Деформации отслеживают положение Луны и Солнца и поэтому движутся относительно поверхности Земли, что и проявляется в виде приливов.

Таким образом, амплитуда приливов пропорциональна отличию сил гравитации со стороны Луны или Солнца, например, в диаметрально противоположных точках Земли на линиях Земля—Луна или Земля—Солнце.

Пусть M_M и $M_\odot$ — массы Луны и Солнца, L_M и $L_\odot$ — расстояния от Земли до Луны и Солнца, r_E, r_M и $r_\odot$ — радиусы Земли, Луны и Солнца.

Возьмём некоторую пробную массу m, например, кубический сантиметр воды в океане.

Рассмотрим отличие сил гравитации, действующих на пробную массу в диаметрально противоположных точках Земли на линии Земля—Луна:

$$\begin{aligned} 2\,\Delta F_{\mathrm{M}\|} = \frac{GmM_\mathrm{M}}{(L_\mathrm{M}-r_\mathrm{E})^2} - \frac{GmM_\mathrm{M}}{(L_\mathrm{M}+r_\mathrm{E})^2} = \\ = GmM_\mathrm{M}\frac{(L_\mathrm{M}+r_\mathrm{E})^2-(L_\mathrm{M}-r_\mathrm{E})^2}{(L_\mathrm{M}-r_\mathrm{E})^2\,(L_\mathrm{M}+r_\mathrm{E})^2} = \\ = GmM_\mathrm{M}\frac{4L_\mathrm{M}r_\mathrm{E}}{(L_\mathrm{M}-r_\mathrm{E})^2\,(L_\mathrm{M}+r_\mathrm{E})^2} \approx GmM_\mathrm{M}\frac{4r_\mathrm{E}}{L_\mathrm{M}^3}. \end{aligned} \quad (1)$$

Масса Луны M_M равна произведению её плотности ρ_M на её объём V_M. В свою очередь объём пропорционален кубу линейных размеров тела:

$$V_\mathrm{M} = \alpha r_\mathrm{M}^3,$$

где фактор α зависит только от формы тела (в случае шара $\alpha = 4\pi/3$). Тогда масса Луны

$$M_\mathrm{M} = \rho_\mathrm{M}\alpha r_\mathrm{M}^3. \quad (2)$$

Подставляем (2) в (1):

$$2\,\Delta F_{\mathrm{M}\|} = 4\alpha Gmr_\mathrm{E}\rho_\mathrm{M}\left(\frac{r_\mathrm{M}}{L_\mathrm{M}}\right)^3. \quad (3)$$

Аналогичное выражение получаем для отличия сил гравитации со стороны Солнца:

$$2\,\Delta F_{\odot\|} = 4\alpha Gmr_\mathrm{E}\rho_\odot\left(\frac{r_\odot}{L_\odot}\right)^3. \quad (4)$$

Возьмём отношение выражений (3) и (4):

$$\frac{2\,\Delta F_{\mathrm{M}\|}}{2\,\Delta F_{\odot\|}} = \frac{\rho_\mathrm{M}\,(r_\mathrm{M}/L_\mathrm{M})^3}{\rho_\odot\,(r_\odot/L_\odot)^3}. \quad (5)$$

Луна и Солнце имеют примерно одинаковые видимые угловые размеры (что хорошо видно во время солнечных затмений), поэтому отношения линейных размеров $r_\mathrm{M}/L_\mathrm{M}$ и $r_\odot/L_\odot$ в (5) равны с высокой точностью. Тогда (5) перепишется как

$$\frac{2\,\Delta F_{\mathrm{M}\|}}{2\,\Delta F_{\odot\|}} \approx \frac{\rho_\mathrm{M}}{\rho_\odot}. \quad (6)$$

Таким образом, согласно (6) отношение плотностей Луны и Солнца равно отношению неоднородностей их сил гравитации на масштабе Земли и, следовательно, равно отношению амплитуд вызываемых ими приливов. Поскольку лунные приливы в два раза выше солнечных, то плотность Луны в два раза выше солнечной. Искомая плотность Солнца

$$\rho_\odot \approx \rho_{\mathrm{M}}/2 = 1{,}5 \text{ т/м}^3.$$

Найденное отличие сил гравитации в выбранных точках на поверхности Земли показывает, как неоднородность гравитационной силы стремиться растянуть поверхность мирового океана вдоль линий Земля—Луна или Земля—Солнце. Строго говоря, возможен, вариант, что неоднородность гравитационной силы стремиться растянуть поверхность мирового океана во всех точках Земли строго по её радиусу (от её центра наружу). Ясно, что такая неоднородность не изменила бы уровень мирового океана и не вызвала приливы.

Поэтому специально покажем, что неоднородность гравитационной силы, например, Луны, напротив, стремиться сжать поверхность мирового океана в плоскости, перпендикулярной линии Земля—Луна.

Действительно, полная гравитационная сила практически не изменяется по абсолютной величине в этой плоскости, поскольку плоскость является касательной к сфере с центром на Луне и, следовательно, точки плоскости расположены практически на одинаковом расстоянии от гравитирующего объекта — Луны. Однако гравитационная сила изменяется по направлению, поскольку направление на Луну отличаются в разных точках Земли. В результате во всех точках плоскости, отличных от центра Земли, появляется компонента силы гравитации, направленная к центру Земли. Указанная компонента — проекция полной силы гравитации на рассматриваемую плоскость:

$$F_{\mathrm{M}\perp} = -\frac{GmM_{\mathrm{M}}}{L_{\mathrm{M}}^2}\sin(\theta_{\mathrm{M}}) \approx -\frac{GmM_{\mathrm{M}}}{L_{\mathrm{M}}^2}\frac{r_{\mathrm{E}}}{L_{\mathrm{M}}} = -\Delta F_{\mathrm{M}\parallel}/2,$$

где $\theta_{\mathrm{M}} \approx r_{\mathrm{E}}/L_{\mathrm{M}}$ — угол между нормалью к плоскости (линии Земля—Луна) и направлением из выбранной точки Земли на Луну.

Таким образом, неоднородное гравитационное поле Луны или Солнца, с одной стороны, стремиться растянуть поверхность мирового океана вдоль линий Земля—Луна и Земля—Солнце с одной силой, а с другой стороны, стремиться сжать поверхность мирового океана в плоскостях, перпендикулярным этим линиям, с половинной силой.

4. Ответ: 0,11 км^2.

Рассмотрим взаимодействие фотонов с парусом за некоторое время t. До паруса долетают только те фотоны, которые находились от него в начальный момент времени на расстояниях, меньше ct. Поэтому за время t с парусом столкнутся солнечные фотоны из пространства в виде прямого цилиндра, основанием которого является парус, а его высота $h = ct$. Объём цилиндра (параллелепипеда в случае прямоугольного паруса)

$$V = Sct.$$

Пусть n — концентрация фотонов (число фотонов в 1 м^3), тогда за время t с парусом столкнутся фотоны в общем числе

$$N = nV = nSct. \tag{1}$$

При отражении от паруса каждый фотон изменяет свой импульс на противоположный и, следовательно, передаёт парусу импульс $2p$. Тогда за время t парус получит импульс от N фотонов

$$P = 2pN = 2pnSct,$$

что соответствует действующей на него силе давления излучения

$$T = \frac{P}{t} = 2pnSc. \tag{2}$$

В отсутствие паруса те же N фотонов перенесли бы через площадку S энергию

$$W = wN = wnSct, \tag{3}$$

где использовано выражение (1) для N. Согласно определению плотности потока излучения F та же энергия

$$W = FSt. \qquad (4).$$

Приравняв (3) и (4), найдём концентрацию фотонов

$$n = \frac{F}{wc}. \tag{5}$$

Подставляем концентрацию фотонов (5) в выражение (3) для силы давления излучения:

$$T = 2FS\frac{p}{w}. \tag{6}$$

Согласно специальному указанию в условии задачи отношение $p/w = 1/c$, что при подстановке в (6) определяет силу

$$T = \frac{2FS}{c}. \tag{7}$$

Из (7) искомая площадь паруса

$$S = \frac{Tc}{2F} = \frac{1\ \text{Н} \cdot (3 \cdot 10^8\ \text{м/с})}{2 \cdot 1400\ \text{Вт/м}^2} = 1{,}1 \cdot 10^5\ \text{м}^2 = 11\ \text{га} = 0{,}11\ \text{км}^2.$$

Условия и решение задач
городской олимпиады по астрономии, астрофизике
и физике космоса им. М. М. Кобрина
14 декабря 2008 г.

8–9 классы

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Вычислите время, за которое Земля проходит расстояние, равное своему диаметру, при движении вокруг Солнца. По вашей оценке, за какое время обыкновенная черепаха проходит путь, равный своему размеру? В этом смысле кто быстрее: Земля или черепаха? Диаметр Земли $D_З = 12\,800$ км, а радиус её орбиты $R = 150$ млн. км. Длина окружности радиуса r равна $2\pi r$, где $\pi \approx 3{,}14$.

2. Вследствие аварии на машине времени вас занесло на необитаемый остров, расположенный на экваторе. По движению Солнца на небосводе определите, зима или лето наступили в Нижнем Новгороде в момент вашей высадки на остров.

3. Луна вращается вокруг Земли и одновременно вместе с Землёй вращается вокруг Солнца. Есть ли на траектории движения Луны относительно Солнца точки самопересечения (в течение полугода)? Радиус орбиты Земли $R_З = 150$ млн. км, а Луна удалена от Земли на расстояние $R_Л = 380$ тыс. км и делает один оборот вокруг Земли примерно за месяц. Все орбиты считать лежащими в одной плоскости.

4. Оцените, на какую долю своего радиуса смещается Солнце при вращении системы Солнце—Юпитер вокруг своего центра масс. Отношение массы Солнца к массе Юпитера и отношение расстояния от Солнца до Юпитера к радиусу Солнца примерно равны 1000.

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. На какую максимальную высоту над горизонтом поднимается Солнце в Нижнем Новгороде в самый длинный и самый короткий дни года? Географическая широта Нижнего Новгорода 56° к северу от экватора, а северного тропика — 23°.

2. Как сильно могут отличаться периоды облёта тел Солнечной системы на соответствующих первых космических скоростях, если их плотности одинаковы по порядку величины?

3. На круговые околоземные орбиты необходимо запустить два одинаковых спутника так, чтобы их периоды отличались в 8 раз. Во сколько раз должны отличаться радиусы их орбит? У какого спутника кинетическая энергия окажется больше и во сколько раз?

4. За время термоядерного горения в Солнце выделится энергия, равная 0,7 % от энергии покоя «прогоревшего» вещества $M_{\text{г}}c^2$. Масса вещества $M_{\text{г}}$, которое вступит в термоядерные реакции, составляет около 10 % от всей массы Солнца $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг, $c = 300\,000$ км/с — скорость света. Какое время термоядерное горение сможет поддерживать на Земле поток солнечного излучения порядка современного значения $J = 1{,}4$ кВт/м^2? Радиус орбиты Земли $R_{\text{З}} = 150$ млн. км. Площадь сферы радиуса r равна $4\pi r^2$.

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. а) Оцените, чего больше: молекул воды в стакане объёмом 200 мл или звёзд во всей видимой части Вселенной, которая охватывает порядка 10 миллиардов крупных галактик, как наша, и в каждой такой галактике примерно 200 миллиардов звёзд?

б) Каков диаметр капли, содержащей столько же молекул воды, сколько звёзд в нашей Галактике — Млечный путь?

Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3, молярная масса воды $\mu = 18$ г/моль, число Авогадро $N_{\text{А}} = 6 \cdot 10^{23}$, объём сферы диаметра d равен $\pi d^3/6$.

2. Покажите, что сила притяжения Луны к Солнцу больше силы притяжения Луны к Земле. Попробуйте объяснить, почему же всё-таки Луна вращается вокруг Земли. Радиус орбиты Земли $R_{\text{З}} = 150$ млн. км, Луна удалена от Земли на расстояние $R_{\text{Л}} = 380$ тыс. км и делает один оборот вокруг Земли примерно за месяц.

3. Представьте плоскую спиральную галактику, погружённую в однородное облако невидимой тёмной материи. Центральная часть галактики представляет собой массивный светящийся шар из звёзд и газа — балдж. Звёзды, расположенные на границе балджа, и на вдвое большем удалении от центра галактики вращаются с одинаковыми поступательными скоростями вокруг центра галактики. Определите отношение плотностей масс светящейся и тёмной материй в балдже (пренебрегая массой плоской составляющей галактики).

4. Какой толщины должен быть алюминиевый «световой» парус — полностью отражающая свет плоскость, чтобы преодолеть своё притяжение к Солнцу за счёт давления солнечного света? Плотность алюминия $\rho = 2700$ кг/м^3. Плотность потока энергии солнечного излучения на орбите Земли $J = 1{,}4$ кВт/м^2. Земля обращается вокруг Солнца за один год по орбите радиусом $R_{\text{З}} = 150$ млн. км. Для расчёта давления излучения используйте известное соотношение $w = pc$ между энергией w и импульсом p фотона (частицы света), где $c = 300\,000$ км/с — скорость света (фотона).

1. При таком подходе черепаха оказывается быстрее Земли. Земля проходит расстояние, равное своему диаметру, за 7 минут. Черепаха проходит свой размер за 10–20 секунд.

Длина орбиты Земли $L = 2\pi R = 9{,}4 \cdot 10^8$ км. Планета проходит это расстояние за один год, длительность которого в секундах $T = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 3{,}2 \cdot 10^7$ с. Соответственно скорость Земли $V = L/T = 30$ км/с. Она проходит расстояние, равное своему диаметру $D_З = 12\,800$ км, за искомое время $t = D_З/V = 430$ с $= 7$ мин.

Ясно, что черепаха проползёт расстояние, равное своему размеру, быстрее, чем за 7 мин. Например, если принять диаметр черепахи 10–20 см, а её скорость 1 см/с, то время движения составит 10–20 с.

2. Если Солнце движется против часовой стрелки, то лето. Если по часовой стрелке — зима.

Если в Нижнем Новгороде лето, то на экваторе Солнце поднимается на востоке, проходит к северу от вертикали и заходит на западе — движется против часовой стрелки. Если в Нижнем Новгороде зима, то на экваторе Солнце по-прежнему поднимается на востоке, но уже проходит к югу от вертикали и заходит на западе — движется по часовой стрелке.

3. Нет.

Наличие точек самопересечения означает, что азимутальная скорость Луны относительно Солнца может менять знак. Такое возможно, только если скорость вращения Луны вокруг Земли больше скорости вращения системы Земля—Луна вокруг Солнца. Длина орбиты Земли $L_З = 2\pi R_З = 9{,}4 \cdot 10^8$ км. Планета проходит это расстояние за один год, длительность которого в секундах $T_З = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 3{,}2 \cdot 10^7$ с. Соответственно, скорость Земли $V_З = L_З/T_З = 30$ км/с. В свою очередь длина орбиты Луны вокруг Земли $L_Л = 2\pi R_Л = 2{,}4 \cdot 10^6$ км. Луна проходит это расстояние за 28 суток, длительность которых в секундах $T_Л = 28 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 2{,}4 \cdot 10^6$ с. Скорость Луны относительно Земли $V_Л = L_Л/T_Л = 1$ км/с. Скорость $V_Л < V_З$, поэтому самопересечений траектории нет.

4. Солнце смещается на расстояние порядка своего радиуса. В качестве ответа принимается как амплитуда смещения в один радиус, так и удвоенная амплитуда (размах) в два радиуса — диаметр Солнца.

Пусть $d_{\text{Ю}}$ — расстояние от Солнца до Юпитера, $M_\odot$ и $M_{\text{Ю}}$ — массы Солнца и Юпитера. Согласно своему определению, центр масс системы Солнце—Юпитер удалён от центра Солнца на расстояние

$$r = \frac{M_{\text{Ю}} d_{\text{Ю}}}{M_\odot + M_{\text{Ю}}} = \frac{d_{\text{Ю}}}{(M_\odot / M_{\text{Ю}}) + 1} = \frac{d_{\text{Ю}}}{1000 + 1} \approx \frac{d_{\text{Ю}}}{1000},$$

где использовано данное в задаче отношение масс $M_\odot / M_{\text{Ю}} = 1000$. Вместе с тем согласно условию задачи радиус Солнца равен тому же расстоянию $d_{\text{Ю}}/1000$. Следовательно, центр масс системы находится на поверхности Солнца, и Солнце вращается вокруг этого центра масс по окружности радиуса r, который совпадает с радиусом звезды. Таким образом, в своём вращении Солнце смещается от центра масс на расстояние, равное своему радиусу.

Для справки приведём численные значения масс и расстояний: $M_\odot = 2{,}0 \cdot 10^{30}$ кг, $M_{\text{Ю}} = 1{,}9 \cdot 10^{27}$ кг, $d_{\text{Ю}} = 780$ млн. км $= 5{,}2$ а. е., радиус Солнца $R_\odot = 700$ тыс. км.

Решение задач 10 класса

1. В самый длинный день Солнце поднимается на 57°, в самый короткий — на 11°.

В самый длинный день Солнце проходит через зенит над северным тропиком. Соответственно, в этот день в Нижнем Новгороде Солнце проходит от вертикали на минимальном угловом расстоянии $56^\circ - 23^\circ = 33^\circ$, и, следовательно, искомая максимальная высота над горизонтом составляет $90^\circ - 33^\circ = 57^\circ$.

В самый короткий день Солнце проходит через зенит над южным тропиком. В Нижнем Новгороде Солнце проходит от вертикали на угловом расстоянии $56^\circ + 23^\circ = 79^\circ$, и максимальная высота над горизонтом равна $90^\circ - 79^\circ = 11^\circ$.

2. Ответ: Меньше, чем на порядок.

Пусть спутник облетает на первой космической скорости v некоторое космическое тело в виде шара. Следовательно, радиус орбиты равен радиусу тела R. Спутник имеет центростремительное ускорение

$$a = \frac{v^2}{R}\,.$$

Скорость v связана с периодом обращения T формулой $v = 2\pi R/T$, что позволяет записать ускорение в виде

$$a = \frac{(2\pi R/T)^2}{R} = \frac{(2\pi)^2\,R}{T^2}\,.$$

Центростремительное ускорение обеспечивается силой притяжения со стороны космического тела $F = GmM/R^2$, где M и m — массы тела и спутника, G — гравитационная постоянная. Согласно второму закону Ньютона, приравниваем произведение ma силе F:

$$m\,\frac{(2\pi)^2\,R}{T^2} = G\,\frac{mM}{R^2}\,.$$

Из последнего равенства выражаем период обращения

$$T = \frac{2\pi}{(GM/R^3)^{1/2}}\,. \qquad (1)$$

Масса тела M пропорциональна кубу его характерного размера R, поэтому отношение M/R^3 в знаменателе (1) определяется только плотностью ρ. Действительно, объём тела

$$V = \kappa R^3,$$

где численная константа κ не зависит радиуса тела и её конкретное значение не требуется для решения задачи (для справки $\kappa = 4\pi/3$). Масса однородного тела пропорциональна его объёму и плотности:

$$M = \rho V = \kappa\rho R^3.$$

Следовательно, отношение $M/R^3 = \kappa\rho$, и период обращения (1) запишется в виде

$$T = \frac{2\pi}{(G\kappa\rho)^{1/2}}\,.$$

Таким образом, период облёта тела на первой космической скорости определяется только его плотностью. Соответственно, если плотности тел одного порядка, то периоды заведомо отличаются меньше, чем на порядок. Например, если отношение плотностей равно 10, то отношение периодов равно $\sqrt{10} \approx 3$.

3. Ответ: а) Радиусы орбит должны отличаться в 4 раза.

б) Кинетическая энергия больше в 4 раза у спутника на более низкой орбите.

в) Больше горючего потребуется для запуска спутника на более высокой орбите.

Пусть спутник движется по круговой орбите радиуса R с некоторой поступательной скоростью v. Согласно второму закону Ньютона, центростремительное ускорение спутника v^2/R равно силе тяготения, делённой на массу спутника:

$$\frac{v^2}{R} = G\,\frac{M}{R^2}\,, \tag{1}$$

где M — масса Земли, G — гравитационная постоянная. Скорость v связана с периодом обращения T соотношением $v = 2\pi R/T$, что при подстановке в (1) даёт равенство

$$\frac{(2\pi)^2\,R}{T^2} = G\,\frac{M}{R^2}\,. \tag{2}$$

Из (2) находим связь радиуса орбиты с периодом:

$$R = \left(\frac{GMT^2}{(2\pi)^2}\right)^{1/3} \propto T^{2/3}. \tag{3}$$

Согласно (3), чтобы увеличить период обращения в 8 раз, необходимо увеличить радиус орбиты в $8^{2/3} = 4$ раз.

Кинетическую энергию спутника находим, выразив из (1) квадрат скорости $v^2 = GM/R$:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{GmM}{2R}\,, \tag{4}$$

где m — масса спутника. Из (4) следует, что кинетическая энергия спутника обратно пропорциональна радиусу орбиты. Таким образом, спутник на более низкой орбите обладает в 4 раза большей кинетической энергией.

4. Ответ: 10 млрд. лет.

За время термоядерного горения в Солнце выделится энергия

$$E = 0{,}007M_{\text{г}}c^2 = 0{,}007\,(0{,}1M_{\odot}c^2) = \\ = 0{,}007 \cdot 0{,}1 \cdot (2 \cdot 10^{30}) \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \text{ Дж} = 1{,}26 \cdot 10^{44} \text{ Дж}.$$

Выделившаяся ядерная энергия уносится в космическое пространство излучением. Мощность солнечного излучения $L_{\odot}$ — светимость, равна, в частности, потоку излучения через сферу с радиусом, равным радиусу орбиты Земли:

$$L_{\odot} = JS = J\,4\pi R_{\text{З}}^2 = 1400 \cdot 4\pi \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11})^2 \text{ Вт} = 4{,}0 \cdot 10^{26} \text{ Вт}.$$

За искомое время T излучение унесёт энергию $L_{\odot}T$, равную E. Таким образом,

$$T = \frac{E}{L_{\odot}} = 3{,}2 \cdot 10^{17} \text{ с} = \frac{3{,}2 \cdot 10^{17}}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} \text{ лет} = 10 \text{ млрд. лет}.$$

Решение задач 11 класса

1. а) Молекул воды в стакане больше.

б) Ответ: 2,3 мкм.

а) Число звёзд в видимой части Вселенной $N_з = (200 \cdot 10^9) \cdot (10 \cdot 10^9) = 2 \cdot 10^{21}$. Масса воды в стакане $m_с = \rho \cdot 200$ см$^{-3}$ $= 200$ г, чему соответствует количество вещества $\nu_с = m_с/\mu = 11$ моль и число молекул

$$N_с = N_А \nu_с = N_А \frac{m_с}{\mu} = 6 \cdot 10^{23} \frac{200}{18} = 6{,}7 \cdot 10^{24}.$$

Таким образом, число молекул воды в стакане $N_с > N_з$.

б) Пусть d — искомый диаметр капли. Тогда объём капли $V = \pi d^3/6$, её масса $m_к = \rho V = \pi \rho d^3/6$, количество воды в капле $\nu_к = m_к/\mu = \pi\rho d^3/(6\mu)$, а число молекул

$$N_к = N_А \nu_к = N_А \frac{\pi \rho d^3}{6\mu}\,.$$

Приравниваем $N_к$ числу звёзд в галактике $N_г = 200$ млрд., находим требуемый радиус

$$r = \left(\frac{6\mu N_г}{\pi \rho N_А}\right)^{1/3} = \left(\frac{6 \cdot 18 \cdot (2 \cdot 10^{11})}{\pi \cdot 1 \cdot (6 \cdot 10^{23})}\right)^{1/3} \text{ см} = 2{,}3 \cdot 10^{-4} \text{ см} = 2{,}3 \text{ мкм}$$

— это диаметр наиболее мелких капель тумана. Отметим, что глаз различает лишь самые крупные капли тумана диаметром 100 мкм.

2. На орбите Земли (и Луны) Солнце создаёт ускорение свободного падения $g_\odot = 0{,}60$ см/с^2, тогда как Земля создаёт примерно в 2 раза меньшее ускорение $g_З = 0{,}26$ см/с^2 на орбите Луны. Луна вращается вокруг Земли, поскольку отклонение гравитационного поля от однородного на орбите Луны определяется именно Землёй, а не Солнцем.

Земля равномерно движется вокруг Солнца с некоторой скоростью v по круговой орбите с радиусом $R_З$. Следовательно, планета имеет центростремительное ускорение

$$a_\odot = \frac{v^2}{R_З}\,.$$

Это ускорение обеспечивается притяжением Солнца, оно одинаково для Земли, Луны, и равно ускорению свободного падения к Солнцу на орбите Земли $g_\odot = GM_\odot/R_З^2$, где G — гравитационная постоянная, $M_\odot$ — масса Солнца. Скорость v связана с периодом обращения $T_З = 1$ год соотношением $vT = 2\pi R_З$, так что ускорение $g_\odot = a_\odot$ перепишем как

$$g_\odot = \frac{(2\pi R_З/T_З)^2}{R_З} = \frac{(2\pi)^2\, R_З}{T_З^2} = \frac{(2\pi)^2 \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11})}{(365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)^2}\ \text{м/с}^2 = 0{,}60\ \text{см/с}^2.$$

Аналогичным образом вычисляем ускорение свободного падения к Земле на орбите Луны, рассматривая движение Луны по круговой орбите вокруг Земли:

$$g_З = \frac{(2\pi)^2\, R_Л}{T_Л^2} = \frac{(2\pi)^2 \cdot (3{,}8 \cdot 10^{8})}{(28 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)^2}\ \text{м/с}^2 = 0{,}26\ \text{см/с}^2,$$

где $T_Л = 28$ дней ≈ 1 месяц — период обращения Луны. Ускорение свободного падения $g_\odot$ больше $g_З$, поэтому сила притяжения Луны к Солнцу

$$F_\odot = M_Л g_\odot = \frac{GM_Л M_\odot}{R_З^2}$$

примерно в 2 раза больше силы притяжения к Земле

$$F_З = M_Л g_З = \frac{GM_Л M_З}{R_Л^2}\,,$$

где $M_Л$ и $M_З$ — массы Луны и Земли.

Тем не менее Луна вращается вокруг Земли (и одновременно вокруг Солнца). Действительно, если бы притяжение между Землёй и Луной вообще отсутствовало, то эти объекты всё равно могли двигаться рядом, например, по одной окружности вокруг Солнца (в гравитационном поле тела с разными массами движутся по одинаковым траекториям, если их начальные координаты и скорости совпадают). Чтобы Луна не уходила от Земли и вращалась вокруг неё достаточно, чтобы на орбите Луны отклонения гравитационного поля от однородного определялись Землёй, а не Солнцем. Так, в диаметрально противоположных точках лунной орбиты центрально-симметричное гравитационное поле Земли одинаково по абсолютной величине, но направлено в противоположные стороны. Так что отклонение земного поля от однородного составляет $\Delta g_З = 2g_З = 0{,}51$ см/с^2 — порядка самого $g_З$. Напротив, солнечное гравитационное поле на орбите Луны практически однородно. Его неоднородность определяются небольшим изменением расстояния между Луной и Солнцем. Разность ускорений свободного падения, обусловленных Солнцем, в наиболее близкой и удалённой от Солнца точках лунной орбиты составляет

$$\Delta g_\odot = \frac{GM_\odot}{(R_З - R_Л)^2} - \frac{GM_\odot}{(R_З + R_Л)^2} = GM_\odot \frac{4R_З R_Л}{(R_З - R_Л)^2\,(R_З + R_Л)^2} \approx$$
$$\approx \frac{4GM_\odot R_Л}{R_З^3} = g_\odot \frac{4R_Л}{R_З} = 0{,}01 g_\odot = 0{,}006 \text{ см/с}^2,$$

что примерно в 100 раз меньше $\Delta g_З$.

3. Ответ: 6.

Движение звёзд на границе балджа и на удвоенном расстоянии определяется силами тяготения вещества, заключённого в сферах, которые охватывают рассматриваемые орбиты. Если V_1 — объём балджа, то объём V_2 шара, охватываемого второй орбитой, в $2^3 = 8$ раз больше, поскольку объём сферы пропорционален кубу её радиуса:

$$V_2 = 8V_1.$$

Пусть $\rho_с$ и $\rho_т$ — плотности светящегося и тёмного вещества. Тогда суммарная масса светящейся и тёмной материи в балдже

$$M_1 = (\rho_с + \rho_т)\, V_1, \tag{1}$$

а масса материи в объёме V_2

$$M_2 = \rho_с V_1 + \rho_т V_2 = \rho_с V_1 + \rho_т\,(8V_1) = (\rho_с + 8\rho_т)\, V_1. \tag{2}$$

Центростремительные ускорения звёзд v^2/R и $v^2/(2R)$ на рассматриваемых круговых орбитах с радиусами R и $2R$ равны соответствующим силам тяготения, делённым на массы звёзд:

$$\frac{v^2}{R} = G\,\frac{M_1}{R^2} = G\,\frac{(\rho_с + \rho_т)\, V_1}{R^2}\,, \tag{3}$$

$$\frac{v^2}{2R} = G\,\frac{M_2}{(2R)^2} = G\,\frac{(\rho_\text{с} + 8\rho_\text{т})\,V_1}{(2R)^2}\,; \tag{4}$$

v — скорость движения звёзд. Делим (3) на (4):

$$\frac{1}{1/2} = \frac{\rho_\text{с} + \rho_\text{т}}{(\rho_\text{с} + 8\rho_\text{т})/4}$$

и после ряда стандартных алгебраических преобразований: $(\rho_\text{с}+8\rho_\text{т})/4 = (\rho_\text{с} + \rho_\text{т})/2$, $\rho_\text{с} + 8\rho_\text{т} = 2\rho_\text{с} + 2\rho_\text{т}$, $\rho_\text{с} = 6\rho_\text{т}$, получаем искомое отношение

$$\frac{\rho_\text{с}}{\rho_\text{т}} = 6.$$

4. Ответ: 580 нм.

При отражении каждый фотон изменяет свой импульс на противоположный и, следовательно, передаёт парусу импульс $2p$. Пусть за некоторое время t от паруса отразились N фотонов и, следовательно, передали ему суммарный импульс (импульс силы)

$$P = 2pN.$$

Сила, действующая на парус

$$F_\text{ф} = \frac{P}{t} = 2p\,\frac{N}{t}\,. \tag{1}$$

В отсутствие паруса рассматриваемые N фотонов перенесли бы через площадь паруса S энергию

$$E = wN$$

и обеспечили указанную в условии задачи плотность потока энергии

$$J = \frac{E}{St} = \frac{w}{S}\,\frac{N}{t}\,. \tag{2}$$

Выражаем из (2) отношение $N/t = JS/w$ и подставляем в (1):

$$F_\text{ф} = 2JS\,\frac{p}{w}\,. \tag{3}$$

Согласно условию задачи $w = pc$, что при подстановке в (3) определяет силу светового давления на парус

$$F_\text{ф} = \frac{2JS}{c}\,. \tag{4}$$

Пусть d — искомая толщина паруса. Тогда объём паруса $V = Sd$, а его масса $M = \rho Sd$. На парус действует сила притяжения Солнца

$$F_{\text{т}} = Mg_{\odot} = \rho Sdg_{\odot}, \tag{5}$$

где $g_{\odot}$ — ускорение свободного падения к Солнцу на орбите Земли. Ускорение $g_{\odot}$ одинаково для всех тел на орбите Земли (в гравитационном поле все тела приобретают одинаковые ускорения). Оно равно, в частности, центростремительному ускорению Земли a при движении вокруг Солнца со скоростью v по орбите радиуса $R_{\text{З}}$:

$$g_{\odot} = a = \frac{v^2}{R_{\text{З}}}\,. \tag{6}$$

Выражаем скорость v через период обращения $T = 1$ год: $v = 2\pi R_{\text{З}}/T$, и подставляем в (6):

$$g_{\odot} = \frac{(2\pi)^2\,R_{\text{З}}}{T^2}\,. \tag{7}$$

Далее подставляем ускорение (7) в силу тяготения (5):

$$F_{\text{т}} = \rho Sd\,\frac{(2\pi)^2\,R_{\text{З}}}{T^2}\,. \tag{8}$$

Парус преодолеет собственное притяжение к Солнцу, когда сила тяготения (8) окажется меньше силы давления излучения (4). Такое соотношение сил (8) и (4) достигается при толщине паруса

$$\begin{aligned} d &< \left(\frac{2JS}{c}\right) \Big/ \left(\rho S\,\frac{(2\pi)^2\,R_{\text{З}}}{T^2}\right) = \frac{2JT^2}{(2\pi)^2\,c\rho R_{\text{З}}} = \\ &= \frac{2\cdot 1400\cdot(365\cdot 24\cdot 60\cdot 60)^2}{(2\pi)^2\cdot(3\cdot 10^8)\cdot 2700\cdot(1{,}5\cdot 10^{11})} = 5{,}8\cdot 10^{-7}\ \text{м} = 580\ \text{нм}. \end{aligned} \tag{9}$$

Комментарии. Полученная толщина паруса совпадает с длиной волны света зелёного оттенка и примерно в 30 меньше толщины «конфетной» фольги.

Отметим, что в итоговую формулу (9) входит радиус орбиты Земли $R_{\text{З}}$ и плотность потока солнечного излучения J на Земле. Тем не менее толщина паруса, на самом деле, не зависит от удаления от Солнца. Действительно, плотность потока солнечного излучения J убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от Солнца R. Следовательно, сила давления излучения (4) также убывает обратно пропорционально R^2. Сила тяготения (5) убывает по тому же закону: $F_т \propto 1/R^2$. Поэтому отношение сил светового давления и тяготения не зависит от удаления от Солнца.

К тому же выводу можно прийти формально из итоговой формулы (9). Плотность потока J связана со светимостью Солнца $L_\odot = 4 \cdot 10^{26}$ Вт соотношением $J = L_\odot/(4\pi R^2)$. Квадрат периода обращения $T^2 = (2\pi)^2 R^3/(GM_\odot)$, где $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ м$^3 \cdot$ кг$^{-1} \cdot$ с$^{-2}$ — гравитационная постоянная, $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг — масса Солнца. Подстановка последних выражений в (9) даёт ту же толщину, зависящую только от параметров Солнца $L_\odot$ и $M_\odot$, но не от R:

$$d < \frac{L_\odot}{2\pi c\rho G M_\odot} = 580 \text{ нм}.$$

Условия и решение задач
городской олимпиады по астрономии, астрофизике
и физике космоса им. Бориса Васильевича Кукаркина
06 декабря 2009 г.

8–9 классы

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. а) Где на земном шаре все звезды восходят и заходят перпендикулярно линии горизонта?

б) Где на земном шаре все звезды в течение года движутся параллельно горизонту?

2. Луна движется по небу с востока на запад, а относительно звёзд смещается в противоположном — восточном направлении. Объясните эти видимые противоположные движения.

3. а) Когда полная Луна поднимается выше всего над горизонтом: летом или зимой?

б) На какую высоту над горизонтом поднимается полная Луна в Нижнем Новгороде в июне и декабре? Географическая широта Нижнего Новгорода 56°, а северного тропика — 23° с. ш.

Примечание: на северном тропике Солнце находится в зените (вертикально вверху) в полдень летнего солнцестояния.

4. Движение планеты вокруг звёзды вызывает соответствующее периодическое колебание центра масс светила. В настоящее время астрономическая техника способна обнаруживать периодические движения звёзд с характерной скоростью 1 м/с. Какие из приводимых ниже эффектов важно учитывать при подобных измерениях:

а) периодические изменения скорости самой Земли из-за вращения вокруг Солнца;

б) периодические изменения скорости телескопа из-за суточного вращения вместе с Землёй;

в) периодические колебания скорости Земли из-за движения Луны вокруг неё.

Радиус Земли составляет 6400 км, Луна и Солнце удалены от Земли на расстояния 380 тыс. км и 150 млн. км соответственно. Луна обращается вокруг Земли за 27 суток. Масса Земли в 81 раз больше массы Луны. Длина окружности радиуса r равна $2\pi r$, где $\pi \approx 3{,}14$.

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Почему на земном экваторе день всегда чуть продолжительнее ночи?

2. Белые ночи наступают, когда Солнце не опускается под горизонт ниже 6°. Определите, в каких географических широтах они могут наблюдаться. Угол между осью собственного вращения Земли и плоскостью движения Земли вокруг Солнца составляет $66{,}5^\circ$.

3. Определите отношение массы Земли к массе Марса, если спутник Фобос удалён от Марса на 9300 км и совершает оборот вокруг планеты за 7 часов 40 минут. Расстояние от Земли до Луны 380 тыс. км. Луна совершает оборот вокруг Земли за 27 суток.

4. Представьте себе невозможное: в недрах Солнца перестало существовать газовое давление. За какое время Солнце схлопнется до размера, много меньше своего начального радиуса? Радиус Солнца $R_\odot =$ 700 тыс. км, ускорение свободного падения на поверхности Солнца $g_\odot =$ 270 м/с^2.

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. а) Докажите, что само по себе гравитационное поле Солнца не способно удержать электроны солнечной короны. Температура короны 10^6 К, вторая космическая скорость для Солнца 617 км/с, масса электрона 10^{-27} г, постоянная Больцмана $1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

б) До какого электрического потенциала должно зарядиться Солнце, чтобы остановить убегание электронов? Электрический заряд электрона $q = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

2. Два спутника движутся вокруг Земли по близким круговым орбитам в одной и той же плоскости. В некоторый момент времени спутники сближаются на минимальное возможное расстояние между их орбитами. Какой угол будет составлять отрезок, соединяющий спутники, с вертикалью (направлением на Землю с одного из спутников) через один оборот аппаратов вокруг Земли?

3. Чтобы предотвратить перегрев спутника солнечными лучами, его запускают на такую круговую орбиту вокруг Солнца за Землёй, что спутник с отключенными двигателями постоянно находится в тени Земли. На каком расстоянии от Земли находится спутник? Масса Солнца больше массы Земли в 333 000 раз. Солнце удалено от Земли на 150 млн. км.

4. Энергия E некоторого гипотетического газа прямо пропорциональна объёму V, предоставленному этому газу: $E = \varepsilon V$, где объёмная плотность энергии газа $\varepsilon > 0$ — постоянная, не зависящая от предоставленного объёма (и температуры). Таким свойством обладает так называемая «тёмная энергия» в космологии, обеспечивающая ускоренное расширение Вселенной.

а) Покажите, что давление гипотетического газа—тёмной энергии отрицательно, рассматривая расширение Вселенной как адиабатический процесс.

б) Определите отношение величин плотности энергии и давления рассматриваемого газа.

1. а) на экваторе; б) на северном и южном полюсах.

Звёзды вращаются вместе с небесной сферой вокруг оси, приближённо проходящей через наблюдателя и Полярную звезду. На экваторе Полярная звезда находится на линии горизонта, и соответствующая ось вращения лежит в горизонтальной плоскости. В результате все звёзды восходят и заходят перпендикулярно линии горизонта. На северном полюсе Полярная звезда находится в зените, и ось вращения расположена вертикально. Соответственно, все звёзды движутся параллельно горизонту. На южном полюсе ситуация аналогичная.

2. Противоположное движение объясняется одинаковыми направлениями вращения Земли вокруг своей оси и Луны вокруг Земли (в системе неподвижных звёзд).

Земля вращается вокруг своей оси существенно быстрее (за сутки), чем Луна совершает оборот вокруг Земли (примерно за месяц). Поэтому в течение суток Луна приближённо движется по небу так же, как звёзды и Солнце — с востока на запад.

Вместе с тем наблюдаемое вращение небосвода со звёздами противоположно по направлению собственному (суточному) вращению Земли в системе неподвижных звёзд. Луна обращается вокруг Земли (в системе неподвижных звёзд) в том же направлении, что и Земля вокруг своей оси. Соответственно Луна чуть отстаёт от звёзд в своём видимом движении по небу. Это отставание и выражается в медленном смещении Луны с запада на восток относительно звёзд на небе.

Если бы Луна обращалась вокруг Земли существенно быстрее, чем за сутки, то она вообще восходила на западе и заходила на востоке.

3. а) зимой; б) в июне примерно на 11°, в декабре — на 57°.

а) В полнолуние Солнце, Земля и Луна расположены примерно на одной прямой. Соответственно, Луна и Солнце находятся относительно Земли практически в диаметрально противоположных точках небесной сферы. Летом Солнце находится над северным тропиком, а полная Луна в диаметрально противоположной точке над южным тропиком. Зимой Солнце — над северным тропиком, а полная Луна — над южным. Таким образом, летом полная Луна поднимается на ту же высоту, что Солнце зимой. Аналогично, зимой полная Луна поднимается над горизонтом так же, как Солнце летом. Получаем, что зимой Луна поднимается выше над горизонтом.

б) В июне полная Луна находится в зените (вертикально вверху) на южном тропике. Соответственно, в Нижнем Новгороде Луна отклоняется от вертикали на разность широт нашего города и южного тропика — $56° + 23° = 79°$, и поднимается над горизонтом на $90° - 79° = 11°$.

Аналогично, в декабре полная Луна находится в зените над северным тропиком. В Нижнем Новгороде Луна отклоняется от вертикали на разность широт нашего города и северного тропика — $56° - 23° = 33°$, и поднимается над горизонтом на $90° - 33° = 57°$.

4. Все указанные эффекты важно учитывать, поскольку соответствующие скорости порядка или больше минимальной регистрируемой скорости 1 м/с.

Итак, существенными будут те эффекты, которые приводят к периодическим изменениям скорости Земли относительно звезды на величину порядка минимальной измеряемой скорости 1 м/с.

а) При вращении вокруг Солнца Земля проходит за год путь, равный длине её орбиты $2\pi R_{\text{З-С}}$, где $R_{\text{З-С}} = 150$ млн. км. Соответственно, Земля движется по орбите со скоростью

$$V_{\text{орб}} = \frac{2\pi R_{\text{З-С}}}{1\ \text{год}} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 150 \cdot 10^6\ \text{км}}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\ \text{с}} = 30\ \text{км/с},$$

что существенно больше 1 м/с.

б) При суточном вращении Земли телескоп проходит за сутки расстояние порядка длины экватора Земли — $2\pi R_{\text{З}}$, где $R_{\text{З}} = 6400$ км. Соответствующая скорость движения

$$V_{\text{сут}} = \frac{2\pi R_{\text{З}}}{1\ \text{сут}} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6400 \cdot 10^3\ \text{м}}{24 \cdot 60 \cdot 60\ \text{с}} = 470\ \text{м/с},$$

что также много больше 1 м/с.

в) Вращение Луны вокруг Земли означает, что система Земля—Луна вращается вокруг общего центра масс, который не совпадает с центром Земли. Таким образом, Земля вращается вокруг соответствующего центра с периодом, равным периоду вращения Луны вокруг Земли. Расстояния $R_{\text{Ц-З}}$ и $R_{\text{Ц-Л}}$ от центра масс системы до центров Земли и Луны обратно пропорциональны отношению масс небесных тел:

$$\frac{R_{\text{Ц-З}}}{R_{\text{Ц-Л}}} = \frac{M_{\text{Л}}}{M_{\text{З}}} = \frac{1}{81}. \tag{1}$$

Вместе с тем сумма расстояний $R_{\text{Ц-З}}$ и $R_{\text{Ц-Л}}$, очевидно, равна расстоянию от Земли до Луны $R_{\text{З-Л}} = 380$ тыс. км:

$$R_{\text{Ц-З}} + R_{\text{Ц-Л}} = R_{\text{З-Л}}. \tag{2}$$

Выражаем из уравнения (1) расстояние $R_{\text{Ц-Л}} = (M_{\text{З}}/M_{\text{Л}})\,R_{\text{Ц-З}}$ и подставляем в уравнение (2): $R_{\text{Ц-З}} + (M_{\text{З}}/M_{\text{Л}})\,R_{\text{Ц-З}} = R_{\text{З-Л}}$. Получаем искомый радиус орбиты Земли

$$R_{\text{Ц-З}} = \frac{R_{\text{З-Л}}}{1 + (M_{\text{З}}/M_{\text{Л}})} = \frac{380\,000 \text{ км}}{1 + 81} = 4600 \text{ км}.$$

Соответствующая скорость движения Земли

$$V_{\text{лун}} = \frac{2\pi R_{\text{Ц-З}}}{27 \text{ сут}} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 4600 \cdot 1000 \text{ м}}{27 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ с}} = 12 \text{ м/с}.$$

Последняя величина много больше 1 м/с.

Отметим, что расстояние $R_{\text{Ц-З}}$ меньше радиуса Земли 6400 км, так что центр масс системы Земля—Луна находится внутри Земли ближе к поверхности планеты, чем к её центру.

Решение задач 10 класса

1. Вследствие конечного углового размера Солнца (около половины градуса) и рефракции световых лучей в атмосфере Земли (отклонения их распространения от прямолинейного). Рефракция позволяет видеть удалённые объекты, находящиеся ниже математического горизонта примерно на полградуса (примерно на размер диска Солнца).

Днём считается интервал времени от восхода — момента появления верхнего края диска Солнца над видимым горизонтом, и закатом — моментом исчезновения всего диска Солнца за видимым горизонтом. Если бы Солнце было точечным объектом и не было земной атмосферы, то на экваторе продолжительности дня и ночи были одинаковыми. Вследствие конечного углового размера Солнца верхний край его диска появляется над горизонтом раньше, чем его центр. Угловой диаметр Солнца составляет полградуса, а радиус — четверть градуса. Полный оборот по небу в 360° Солнце совершает за 24 часа. Соответственно, утром верхний край диска появляется на $(0{,}25^\circ/360^\circ)\cdot 24\cdot 60$ мин $= 1$ минуту раньше центра. Аналогично вечером верхний край заходит на 1 минуту позднее центра. В результате продолжительность дня увеличивается на 2 минуты, а продолжительность ночи сокращается на те же 2 минуты. В итоге день оказывается длиннее ночи на 4 минуты.

По сути рефракция представляет собой преломление лучей при переходе между средами с разными показателями преломления: из вакуума (с единичным показателем преломления) в атмосферу Земли (среду с показателем преломления больше единицы). Рефракция позволяет видеть удалённые точечные объекты, находящиеся ниже математического горизонта примерно на полградуса (практически угловой диаметр Солнца). В результате мы видим верхний край Солнца, когда он ещё (или уже) находится за математическим горизонтом примерно на целый диаметр Солнца. Таким образом рефракция, даёт в два раза больший эффект, чем конечность углового размера Солнца, и увеличивает разность длительностей дня и ночи на 8 минут.

В сумме конечный угловой размер Солнца и рефракция обуславливают отличие в 12 минут между длительностями дня и ночи.

2. Севернее 60,5° с. ш. и южнее 60,5° ю. ш.

В день летнего солнцестояния Солнце касается горизонта на широте, равной углу наклона оси вращения Земли к плоскости движения Земли вокруг Солнца — 66,5° с. ш. Соответственно, Солнце зайдёт за горизонт на 6° на северной широте $66{,}5^\circ - 6^\circ = 60{,}5^\circ$. В более южных широтах (северного полушария) Солнце будет заходить за горизонт больше, чем на 6° не только в день солнцестояния, но и во все другие дни года. Напротив, севернее 60,5° наступит такой день (не обязательно совпадающий с днём солнцестояния), когда Солнце уйдёт за горизонт, но не глубже 6°. Таким образом, белые ночи можно наблюдать севернее 60,5° с. ш. и, аналогично, южнее 60,5° ю. ш. Санкт-Петербург находится на широте 60° — на границе области белых ночей.

3. Ответ: 9,5

Согласно второму закону Ньютона центростремительное ускорение Фобоса равно силе тяготения со стороны Марса, делённой на массу Фобоса:

$$\frac{V_\Phi^2}{R_\Phi} = \frac{GM_\text{М}}{R_\Phi^2}\,, \tag{1}$$

где V_Φ — скорость Фобоса, R_Φ — радиус орбиты Фобоса, $M_\text{М}$ — масса Марса, G — гравитационная постоянная. Выражаем скорость Фобоса V_Φ через радиус R_Φ и период T_Φ его обращения вокруг Марса, $V_\Phi = 2\pi R_\Phi / T_\Phi$, и подставляем в (1):

$$\frac{(2\pi)^2\, R_\Phi}{T_\Phi^2} = \frac{GM_\text{М}}{R_\Phi^2}\,. \tag{2}$$

Уравнение (2) даёт выражение для массы Марса

$$M_\text{М} = \frac{(2\pi)^2\, R_\Phi^3}{GT_\Phi^2} \tag{3}$$

через указанные в условии задачи величины R_Φ, T_Φ и фундаментальную постоянную G.

Аналогичное выражение получаем для массы Земли $M_З$ через радиус орбиты $R_Л$ и период обращения $T_Л$ Луны:

$$M_З = \frac{(2\pi)^2 R_Л^3}{GT_Л^2}\,. \tag{4}$$

Отношение формул (4) и (3) даёт искомую величину

$$\frac{M_З}{M_М} = \frac{R_Л^3 T_Ф^2}{R_Ф^3 T_Л^2} = \frac{(380\,000 \text{ км})^3 \cdot (7\,\frac{2}{3} \text{ ч})^2}{(9300 \text{ км})^3 \cdot (27 \cdot 24 \text{ ч})^2} = 9{,}5.$$

4. Ответ: за 30 минут.

Отключение давления означает остановку атомов (строго говоря, электронов и протонов) в газе Солнца. Остановленные «атомы» будут падать вертикально вниз к центру светила. При таком падении внешние части Солнца находятся в поле внутренних слоёв, масса которых постоянна и равна массе Солнца $M_\odot$. Таким образом, гравитационное поле на поверхности сжимающегося Солнца совпадает с гравитационным полем точечной массы $M_\odot$, помещённой в центр Солнца.

Согласно первому закону Кеплера в гравитационном поле точечной массы тела движутся по эллиптическим орбитам. В частности, исследуемое вертикальное падение на точечную массу $M_\odot$ происходит вдоль предельно вытянутого вдоль прямой эллипса, большая ось которого равна высоте падения — радиусу Солнца $R_\odot$. Время падения $T_{сж}$ равно половине периода обращения $T_{эл}$ по указанному эллипсу: $T_{сж} = T_{эл}/2$.

Согласно третьему закону Кеплера квадраты периодов обращения тел по эллиптическим орбитам пропорциональны большим полуосям орбит в третьей степени. Рассмотрим движение гипотетического спутника, который летит по круговой орбите вдоль поверхности Солнца. Большая полуось его эллиптической орбиты-окружности равна диаметру Солнца $2R_\odot$, что в 2 раза больше полуоси эллиптической орбиты исследуемого вертикального падения $R_\odot$. Следовательно,

$$\frac{T_{окр}^2}{T_{эл}^2} = \frac{(2R_\odot)^3}{R_\odot^3} = 8,$$

где $T_{окр}$ — период обращения гипотетического спутника. Искомое время сжатия

$$T_{\text{сж}} = \frac{T_{\text{эл}}}{2} = \frac{T_{\text{окр}}}{2\sqrt{8}}. \tag{1}$$

Центростремительное ускорение спутника $V^2/R_\odot$ на круговой орбите равно ускорению свободного падения $g_\odot$:

$$\frac{V^2}{R_\odot} = g_\odot. \tag{2}$$

Выражаем скорость спутника V через период его обращения $T_{\text{окр}}$ и радиус орбиты $R_\odot$, $V = 2\pi R_\odot / T_{\text{окр}}$, и подставляем в (2):

$$\frac{(2\pi)^2 R_\odot}{T^2_{\text{окр}}} = g_\odot. \tag{3}$$

Из последнего уравнения (3) находим период обращения

$$T_{\text{окр}} = 2\pi\sqrt{R_\odot/g_\odot}\,.$$

Согласно (1) и (3), определяем время сжатия:

$$T_{\text{сж}} = \frac{2\pi\sqrt{R_\odot/g_\odot}}{2\sqrt{8}} = \frac{\pi\sqrt{(700\,000 \cdot 10^3\ \text{м})/(270\ \text{м/с}^2)}}{\sqrt{8}} =$$
$$= 1800\ \text{с} = 30\ \text{мин}.$$

Решение задач 11 класса

1. а) Скорость теплового движения электронов примерно в десять раз превышает вторую космическую скорость, поэтому удержать электроны одним лишь гравитационным полем нельзя.

б) Ответ: 130 В.

а) Характерная тепловая кинетическая энергия электрона

$$\frac{mv_T^2}{2} = \frac{3}{2}\,kT, \tag{1}$$

где m — масса электрона, v_T — характерная скорость теплового движения электронов, T — температура короны, k — постоянная Больцмана. Из формулы (1) находим, что тепловая скорость частиц

$$v_T = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 10^6\ \text{Дж}}{10^{-27} \cdot 10^{-3}\ \text{кг}}} = 6{,}4 \cdot 10^6\ \text{м/с} = 6400\ \text{км/с}$$

примерно в 10 раз больше второй космической скорости. Таким образом, электроны покидали бы Солнце, если существовало только гравитационное поле.

б) Электроны несут на себе электрический заряд, поэтому их убегание приведёт к зарядке светила зарядом противоположного знака. Возникающее электрическое поле будет тормозить (притягивать) электроны к Солнцу.

Кинетическая энергия $mv^2/2$ убежавших электронов вдали от Солнца равна начальной механической энергии частиц на поверхности Солнца. Последняя складывается из кинетической энергии теплового движения (1) и потенциальной энергии qU, где U — электрический потенциал Солнца. Таким образом,

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}\,kT + qU. \tag{2}$$

Убегание электронов прекратится, когда скорость электронов вдали от Солнца обратится в нуль. Согласно (2), электрическое поле остановит электроны при искомом потенциале

$$U = -\frac{3kT}{2q} = -\frac{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 10^6\ \text{Дж}}{2 \cdot (-1{,}6 \cdot 10^{-19})\ \text{Кл}} = 130\ \text{В}.$$

При тепловом движении электроны движутся не с одной определённой скоростью, а с разными скоростями. Поэтому всегда найдутся частицы, которые имеют достаточно большую скорость, чтобы преодолеть электрическое притяжение Солнца. При найденном потенциале, строго говоря, происходит лишь существенное замедление убегания электронов.

2. $\boldsymbol{\operatorname{arctg}(3\pi) = 1{,}47}$ **рад** $\boldsymbol{= 84^\circ}$**.**

Пусть спутники движутся со скоростями v_1 и v_2 по круговым орбитам с радиусами r_1 и r_2. Их центростремительные ускорения v_1^2/r_1 и v_2^2/r_2 равны силе тяготения со стороны Земли, делённой на массы спутников:

$$\frac{v_1^2}{r_1} = \frac{GM}{r_1^2}\,, \qquad \frac{v_2^2}{r_2} = \frac{GM}{r_2^2}\,, \tag{1}$$

где M — масса Земли, G — гравитационная постоянная. Находим из (1) выражения для скоростей спутников через радиусы их орбит:

$$v_1 = \sqrt{GM/r_1}\,, \qquad v_2 = \sqrt{GM/r_2}\,. \tag{2}$$

Пусть первый спутник совершил полный оборот, что произошло за время

$$T_1 = \frac{2\pi r_1}{v_1}\,. \tag{3}$$

За это время второй спутник пройдёт по своей орбите расстояние

$$L_2 = v_2 T_1 = 2\pi r_1 \frac{v_2}{v_1}\,, \tag{4}$$

где использовано выражение (3) для времени T_1. Расстояние (4) отличается от длины орбиты второго спутника $2\pi r_2$, поэтому он не попадает в исходную точку отправления в момент T_1 и будет отстоять от исходной точки отправления на расстоянии

$$L_{21} = L_2 - 2\pi r_2 = 2\pi r_1 \frac{v_2}{v_1} - 2\pi r_2 = \frac{2\pi\,(r_1 v_2 - r_2 v_1)}{v_1}\,, \tag{5}$$

где использовано выражение (4) для L_2. Подставляем в (5) скорости спутников v_1 и v_2, выраженные через r_1 и r_2 согласно (2):

$$L_{21} = \frac{2\pi\,(r_1/\sqrt{r_2} - r_2/\sqrt{r_1})}{1/\sqrt{r_1}} = \frac{2\pi\,(r_1^{3/2} - r_2^{3/2})}{\sqrt{r_2}}\,. \tag{6}$$

Тангенс искомого угла θ между отрезком, соединяющим спутники, и вертикалью равен отношению возникшего смещения между спутниками $|L_{21}|$ вдоль близких орбит и разности высот спутников $|r_2 - r_1|$:

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{2\pi\left(r_1^{3/2} - r_2^{3/2}\right)}{\sqrt{r_2}\,(r_2 - r_1)}\right|. \tag{9}$$

Умножим числитель и знаменатель в (9) на $r_1^{3/2} + r_2^{3/2}$, используем формулу для разности квадратов $(\sqrt{x} - \sqrt{y})\,(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y$:

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{2\pi\left(r_1^3 - r_2^3\right)}{\sqrt{r_2}\,(r_2 - r_1)\left(r_1^{3/2} + r_2^{3/2}\right)}\right|,$$

применим формулу для разности кубов $x^3 - y^3 = (x - y)\,(x^2 + xy + y^2)$ и сократим малые разности $r_2 - r_1$ в числителе и знаменателе:

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{2\pi\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)}{\sqrt{r_2}\left(r_1^{3/2} + r_2^{3/2}\right)}\right| = \left|\frac{2\pi\left[(r_1/r_2)^2 + (r_1/r_2) + 1\right]}{(r_1/r_2)^{3/2} + 1}\right|.$$

В последнем выражении можно пренебречь отличием высот спутников и считать $r_1/r_2 = 1$, что даёт

$$\operatorname{tg}\theta = 3\pi.$$

Искомый угол $\theta = \operatorname{arctg}(3\pi) = 1{,}47$ рад $= 84°$.

3. Ответ: 1,5 млн. км.

Центростремительное ускорение Земли $V_З^2/R_З$ при движении вокруг Солнца создаётся гравитационным полем Солнца:

$$\frac{V_З^2}{R_З} = \frac{GM_\odot}{R_З^2}\,, \tag{1}$$

где $V_З$ — орбитальная скорость Земли, $R_З$ — радиус орбиты Земли, $M_\odot$ — масса Солнца, G — гравитационная постоянная. Выражаем из (1) скорость Земли $V_З = \sqrt{GM_\odot/R_З}$ и находим период обращения планеты:

$$T_З = \frac{2\pi R_З}{V_З} = \frac{2\pi R_З^{3/2}}{\sqrt{GM_\odot}}\,. \tag{2}$$

Центростремительное ускорение спутника $V_{\text{С}}^2/(R_{\text{З}}+H)$ создаётся не только Солнцем, но и гравитационным полем Земли:

$$\frac{V_{\text{С}}^2}{R_{\text{З}}+H} = \frac{GM_\odot}{(R_{\text{З}}+H)^2} + \frac{GM_{\text{З}}}{H^2}\,, \tag{3}$$

где $V_{\text{С}}$ — скорость орбитального движения спутника вокруг Солнца, H — расстояние от Земли до спутника (соответственно, $R_{\text{З}}+H$ — расстояние от Солнца до спутника), $M_{\text{З}}$ — масса Земли. Выражаем из (3) скорость спутника

$$V_{\text{С}} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{R_{\text{З}}+H} + \frac{GM_{\text{З}}\,(R_{\text{З}}+H)}{H^2}} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{R_{\text{З}}+H}}\sqrt{1+\frac{M_{\text{З}}}{M_\odot}\,\frac{(R_{\text{З}}+H)^2}{H^2}}$$

и находим период обращения спутника вокруг Солнца

$$T_{\text{С}} = \frac{2\pi\,(R_{\text{З}}+H)}{V_{\text{С}}} = \frac{2\pi\,(R_{\text{З}}+H)^{3/2}}{\sqrt{GM_\odot}}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{M_{\text{З}}}{M_\odot}\,\frac{(R_{\text{З}}+H)^2}{H^2}}}\,. \tag{4}$$

Спутник будет постоянно находиться в тени Земли, если его период обращения (4) совпадает с периодом обращения Земли (2), что даёт уравнение на искомую высоту H:

$$\frac{(R_{\text{З}}+H)^{3/2}}{\sqrt{1+\frac{M_{\text{З}}}{M_\odot}\,\frac{(R_{\text{З}}+H)^2}{H^2}}} = R_{\text{З}}^{3/2}. \tag{5}$$

Возведём уравнение (5) в квадрат и перегруппируем множители между левой и правой частями уравнения:

$$(1+H/R_{\text{З}})^3 = 1+\frac{M_{\text{З}}}{M_\odot}\,\frac{(R_{\text{З}}+H)^2}{H^2}. \tag{6}$$

Раскроем куб в левой части (6) по формуле

$$(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3 = 1+3x\,(1+x+x^2/3)$$

и сократим единицы в левой и правой частях равенства (6):

$$3\,\frac{H}{R_{\text{З}}}\left[1+\frac{H}{R_{\text{З}}}+\frac{1}{3}\left(\frac{H}{R_{\text{З}}}\right)^2\right] = \frac{M_{\text{З}}}{M_\odot}\,\frac{(1+H/R_{\text{З}})^2}{(H/R_{\text{З}})^2}\,. \tag{7}$$

Перегруппируем множители между левой и правой частями равенства (7):

$$3\left(\frac{H}{R_З}\right)^3 \frac{1+(H/R_З)+(H/R_З)^2/3}{(1+H/R_З)^2}=\frac{M_З}{M_\odot}\,. \tag{8}$$

Левая часть уравнения (8) является монотонно растущей функцией параметра $x = H/R_З$, поэтому решение (8) единственно для произвольного отношения $M_З/M_\odot$. Поскольку отношение $M_З/M_\odot \ll 1$, то и величина $H/R_З \ll 1$ и ей можно пренебречь по сравнению с единицами в числителе и знаменателе дроби в левой части (8). Получаем

$$3\left(\frac{H}{R_З}\right)^3=\frac{M_З}{M_\odot}\,.$$

Искомая высота спутника

$$H = R_З\,\left(\frac{M_З}{3M_\odot}\right)^{1/3} = 150\cdot 10^6\left(\frac{1}{3\cdot 333000}\right)^{1/3}\ \text{км} = 1{,}5\ \text{млн. км}.$$

4. а) У «обычного» газа энергия уменьшается при адиабатическом расширении. Энергия гипотетического газа, напротив, увеличивается, что указывает на отрицательное давление.

б) Ответ: −1.

а) При расширении некоторого начального объёма гипотетического газа его энергия увеличивается (в силу положительной величины плотности энергии ε). В адиабатическом процессе (без подвода тепла) энергия увеличивается за счёт работы над выделенным элементом газа окружающих его других частей газа. Для совершения положительной работы окружающий газ должен тянуть на себя выделенный элемент объёма, что и соответствует отрицательному давлению. При положительном давлении окружающий газ, напротив, сопротивлялся бы расширению и совершал отрицательную работу.

б) Запишем уравнение изменения энергии в адиабатическом процессе

$$\Delta E = p\,(-\Delta V),$$

где ΔE — изменение энергии газа при увеличении занятого им объёма на величину ΔV, p — давление. Для гипотетического газа $\Delta E = \varepsilon\,\Delta V$, что приводит к равенству

$$\varepsilon = -p.$$

Искомое отношение $\varepsilon/p = -1$.

Условия и решение задач
Открытой городской олимпиады по астрономии, астрофизике
и физике космоса им. Владимира Вячеславовича Радзиевского
30 января 2011 г.

8–9 классы

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Первый искусственный спутник Земли запущен:
   1) 4 октября 1957 года в СССР,
   2) 7 октября 1959 года в США,
   3) 12 апреля 1961 года в СССР.

б) Первый человек, вступивший на Луну 21 июля 1969 года:
   1) Юрий Гагарин,
   2) Нил Армстронг,
   3) Эдвин Олдрин.

в) Солнце можно увидеть в северном направлении:
   1) только из южного полушария,
   2) на экваторе в зимнее время,
   3) на части России летом.

г) Туманность Ориона видна на небе:
   1) зимой в Нижегородской области,
   2) летом в Нижегородской области,
   3) лишь в южном полушарии.

д) Диаметр Солнца больше диаметра Земли:
   1) в 100 раз,
   2) в 1 000 раз,
   3) в 10 000 раз.

е) Свет проходит расстояние от Земли до Луны и обратно:
   1) за 3 миллисекунды,
   2) за 3 секунды,
   3) за 3 минуты.

ж) Искусственные спутники Земли энергетически выгоднее запускать:
   1) на юг,   2) на запад,   3) на восток.

2. Предположим, Вы находитесь в закрытом помещении без окон (например, в пещере). К потолку подвешен груз на нити. Как по качанию груза определить, в каком полушарии Вы находитесь: в северном или южном? Считайте, что колебания груза не затухают.

3. Во время лунного затмения диаметр тени от Земли на Луне примерно в 2,5 раза больше диаметра Луны. Вместе с тем во время солнечного затмения края Луны и Солнца практически совпадают. Исходя из этих данных определите, во сколько раз диаметр Земли больше диаметра Луны.

4. Вращение Венеры и Земли вокруг Солнца происходит практически в резонансе. Периоды обращения планет вокруг Солнца соотносятся как 8 : 13 (с относительной точностью около 0,0003).

а) Определите время (период), через которое конфигурация системы Солнце—Венера—Земля возвращается в исходное состояние относительно неподвижных звёзд.

б) Сколько раз за это время Земля и Венера сближаются на минимальное расстояние.

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Солнце можно увидеть в северном направлении:
   1) только из южного полушария,
   2) на экваторе в зимнее время,
   3) на части России летом.

б) Туманность Ориона видна на небе:
   1) зимой в Нижегородской области,
   2) летом в Нижегородской области,
   3) лишь в южном полушарии.

в) На экваторе Земли ночь всегда:
   1) длится половину суток,
   2) короче половины суток,
   3) длиннее половины суток.

г) Масса Солнца больше массы Земли:
   1) в 330 000 раз,
   2) в 3 300 раз,
   3) в 330 раз.

д) Свет проходит расстояние от ближайшей звезды до Солнца:
   1) за 2 года,
   2) за 3 года,
   3) за 4 года.

е) Искусственные спутники Земли энергетически выгоднее запускать:
   1) на юг,
   2) на запад,
   3) на восток.

ж) Чтобы покинуть Солнечную систему, телу на Земле необходимо придать минимальную скорость:
   1) 7,9 км/с, 2) 16,6 км/с, 3) 44,7 км/с.

2. Каким станет период обращения Земли вокруг Солнца, если масса Земли увеличится до массы Солнца и объекты продолжат вращение с прежним расстоянием между ними по круговым орбитам?

3. Оцените, сколько метров воды в год испарялось бы с поверхности Тихого океана в районе экватора, если бы вся энергия падающего солнечного излучения расходовалась на испарение. Плотность потока энергии солнечного излучения на орбите Земли составляет 1,4 кВт/м^2, удельная теплота парообразования воды 2,3 МДж/кг.

4. Предположим, что в Антарктиде прокопали шахту до центра Земли. С какой скоростью следует запускать пушечное ядро со дна шахты, чтобы ядро не вернулось на Землю? Ускорение свободного падения на поверхности Земли 10 м/с^2, радиус Земли 6 400 км, трением о воздух пренебречь. Считайте известным, что гравитационное поле внутри однородной сферической оболочки равно нулю.

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Солнце можно увидеть в северном направлении:
1) только из южного полушария,
2) на экваторе в зимнее время,
3) на части России летом.

б) Земля находится ближе всего к Солнцу, когда в России:
1) зима,
2) лето.
3) Расстояние от Земли до Солнца всегда одинаково.

в) На экваторе Земли ночь всегда:
1) длится половину суток,
2) короче половины суток,
3) длиннее половины суток.

г) Количество звёзд в нашей Галактике:
1) больше 100 млрд.,
2) примерно 1 млрд.,
3) меньше 1 млн.

д) Свет проходит расстояние от самой далёкой из обнаруженных галактик до Солнца:
1) за 2 млн. лет, 2) за 13 млрд. лет, 3) за 85 трлн. лет.

е) Если бы Земля завращалась вокруг своей оси с той же скоростью в противоположном направлении относительно неподвижных звёзд, то солнечные сутки:
1) стали бы короче, 2) стали бы длиннее, 3) остались бы теми же.

ж) Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия Солнце—Земля примерно равна по абсолютной величине:
1) половине кинетической энергии движения Земли вокруг Солнца,
2) кинетической энергии движения Земли вокруг Солнца,
3) удвоенной кинетической энергии движения Земли вокруг Солнца.

2. Пусть чёрная дыра представляет собой точечный объект, гравитационное поле которого будем описывать классическим ньютоновым законом тяготения. На чёрную дыру с массой $M = 1$ млн. масс Солнца свободно падает ракета с отключенными двигателями. Сможет ли космонавт перенести перегрузки на расстоянии так называемого горизонта событий $r = 2GM/c^2$? Здесь $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг $\cdot$ с^2) — гравитационная постоянная, $c = 300$ тыс. км/с —скорость света, масса Солнца $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг.

3. Какой должна быть мощность излучения фотонной ракеты с массой 1 тонна, чтобы оторваться от стартовой площадки на поверхности Земли? Энергия фотона E связана с его импульсом p соотношением $E = pc$, где $c = 300$ тыс. км/с — скорость света. Ускорение свободного падения на поверхности Земли 10 м/с^2.

4. Посередине между Землёй и далёким квазаром оказалась массивная эллиптическая галактика (все три объекта находятся на одной прямой). Своим гравитационным полем галактика отклоняет лучи света от квазара, проходящие мимо неё. В результате наблюдаемое изображение галактики окружено кольцом с диаметром 6 угловых секунд (кольцо образуют лучи от квазара, отклонённые эллиптической галактикой). Оцените массу эллиптической галактики в единицах массы Солнца, если Солнце способно отклонить лучи на 1,75 угловых секунды. Радиус Солнца 700 000 км, радиус эллиптической галактики 50 кпк, 1 пк $= 3 \cdot 10^{13}$ км.

1. а) 1) 4 октября 1957 года в СССР.

б) 2) Нил Армстронг.

в) 3) На части России летом. За северным полярным кругом Солнце не заходит за горизонт и в «полночь» летнего полярного дня находится в северном направлении.

г) 1) Зимой в Нижегородской области.

д) 1) Примерно в 100 раз.

е) 2) Примерно за 3 секунды.

ж) 3) На восток. Спутник следует запускать в сторону вращения Земли.

2. Если точки максимального отклонения маятника медленно вращаются по часовой стрелке (если смотреть на них сверху), то находимся в северном полушарии. Если против часовой стрелки — в южном.

Строго на северном или южном полюсе вертикальная плоскость качания маятника остаётся неподвижной относительно звёзд и Солнца (а Земля вращается под маятником). На промежуточных широтах плоскость качания маятника смещается относительно звёзд, но в северном полушарии направление её вращения относительно земли остаётся таким же, как на северном полюсе (в южном полушарии — как на южном полюсе). Таким образом, в северном полушарии точки максимального отклонения маятника вращаются в том же направлении, что и Солнце (или вершина тени от шеста) — по часовой стрелке, если смотреть на них сверху. В южном полушарии — против часовой стрелки.

3. В 3,5 раза.

Земля затеняет в космическом пространстве область в виде конуса. Боковая поверхность конуса образована лучами, распространяющими от края Солнца и проходящими по краю освещённой области на поверхности Земли. Поскольку Солнце много больше Земли, то вершина конуса находится практически сразу же за Землёй (по сравнению с расстоянием до Солнца). Угол раскрыва конуса в точности равен угловому размеру Солнца, видимого из вершины конуса, что практически совпадает с видимым угловым размером Солнца на Земле $\theta \ll 1$. Диаметр поперечного сечения конуса монотонно уменьшается с удалением от Солнца за орбиту Земли как $D_З - \theta L$, где $D_З$ — диаметр Земли, L — расстояние от Земли. Следовательно, на орбите Луны диаметр земной тени достигает величины $D_З - \theta L_{З\text{-}Л}$, где $L_{З\text{-}Л}$ — расстояние от Земли до Луны. Однако видимый угловой размер Луны $D_Л/L_{З\text{-}Л}$ совпадает с угловым размером Солнца θ (о чём свидетельствует совпадение краёв тел во время солнечного затмения); $D_Л$ — диаметр Луны. Тогда произведение $\theta L_{З\text{-}Л} = D_Л$, и радиус тени на орбите Луны равен $D_З - D_Л$, что составляет $2{,}5D_Л$ согласно наблюдениям во время лунного затмения. Из равенства $D_З - D_Л = 2{,}5D_Л$ находим $D_З = 3{,}5D_Л$.

4. а) 8 лет, б) 5 раз.

а) Поскольку Земля должна вернуться в исходную точку своей орбиты, то искомый период равен целому числу N земных лет. По условию задачи период обращения Венеры вокруг Солнца составляет 8/13 земного года. Поэтому за время N земных лет Венера совершит $N/(8/13)$ оборотов, которое должно быть некоторым целым числом K. Получаем уравнение $8/13 = N/K$ на целые числа N и K. Решения этого уравнения $N = 8m$ и $K = 13m$ (где $m = 1, 2, 3, \ldots$) определяют интервалы времени в земных и венерианских годах, через которые система возвращается в исходное состояние. Искомый период соответствует минимальному решению с $m = 1$ и равен 8 земным годам.

б) Минимальное расстояние между планетами достигается в моменты, когда Венера пересекает отрезок Солнце—Земля. Пусть после очередного сближения планет Земля совершила Q оборотов (не обязательно полных). За то же время Венера совершает $Q/(8/13)$ оборотов. Чтобы Венера вновь попала на отрезок Солнце—Земля, число оборотов Венеры $Q/(8/13)$ должно отличаться от числа оборотов Земли Q на некоторое целое число p. Получаем уравнение $Q/(8/13) - Q \equiv 5Q/8 = p$ на целое число p и не обязательно целое число оборотов Земли Q. Это уравнение определяет время в виде числа оборотов Земли $Q = 8p/5$ (где $p = 1, 2, 3, \ldots$), когда Венера вновь оказывается на минимальном расстоянии от Земли. Сближения планет происходят через каждые 8/5 оборота Земли — через 8/5 лет. Тогда за период 8 лет, найденный в первой части задачи, планеты сблизятся на минимальное расстояние (8 лет)/(8/5 года) = 5 раз.

Пятиконечную звезду (пентакл) иногда называют звездой Венеры (см., например, книгу Дэна Брауна «Код да Винчи»). Эта связь обусловлена пятью медленно перемещающимися в пространстве (и на небесной сфере) точками, в которых Венера подходит на минимальное расстояние к Земле, — так называемыми точками внутреннего соединения планет. См. рисунки точек сближения на страницах:

en.wikipedia.org/wiki/File:Venus_pentagram.png

www.lunarplanner.com/HCpages/Venus.html

или анимацию

www.youtube.com/watch?v=4nI3Ky8mhj8.

Моменты сближения (и максимального удаления) планет приближённо соответствуют моментам, когда видимое угловое расстояние между Солнцем и Венерой минимально. Ближайшее внутреннее соединение планет произойдёт 6 июня 2012 года и будет сопровождаться прохождением Венеры по диску Солнца. Следующее прохождение Венеры по диску Солнца произойдёт более чем через 100 лет.

Решение задач 10 класса

1. а) 3) На части России летом. За северным полярным кругом Солнце не заходит за горизонт и в «полночь» летнего полярного дня находится в северном направлении.

б) 1) Зимой в Нижегородской области.

в) 2) Короче половины суток. Ночь занимает время, когда Солнце полностью находится за горизонтом (его не видно). На экваторе центр Солнца находится под горизонтом половину суток (даже чуть меньше из-за преломления лучей в атмосфере, как в стекле). Естественно, вечером верхний край Солнца заходит за горизонт позднее, чем центр Солнца. В свою очередь, утром верхний край Солнце появляется над горизонтом раньше, чем центр светила. В результате Солнце целиком находится за горизонтом меньшее время, чем его центр, — меньше половины суток.

г) 1) В 330 000 раз.

д) 3) За 4 года.

е) 3) На восток. Спутник следует запускать в сторону вращения Земли.

ж) 2) 16,6 км/с. Тело необходимо запускать в сторону движения Земли вокруг Солнца.

2. (1 год)/$\sqrt{2} \approx$ 8,5 месяцев.

Объекты продолжат вращение вокруг общего центра масс, который уже будет находиться не в Солнце, а посередине между Солнцем и Землёй. Соответственно, радиус орбиты Земли (измеряемый от центра вращения) уменьшится в два раза. В свою очередь, центростремительное ускорение Земли останется прежним: сила гравитационного притяжения к Солнцу увеличится пропорционально гравитационной массе Земли, однако инерционная масса Земли увеличится во столько же раз.

Земля совершает оборот по окружности радиуса r со скоростью v за время $T = 2\pi r/v$. В свою очередь, центростремительное ускорение Земли $a = v^2/r$, что даёт выражение для скорости $v = \sqrt{ar}$. Подставляем его в выражение для периода: $T = 2\pi\sqrt{r/a}$. Видно, что уменьшение радиуса вращения в два раза при сохранении величины центростремительного ускорения приводит к уменьшению периода вращения в $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ раз. Период обращения Земли станет равным (1 год)/$\sqrt{2} \approx 8{,}5$ месяцев.

3. Ответ: 9,6 м.

В полдень на участок площади S за время t падает излучение с энергией $E = JSt$, где $J = 1{,}4$ кВт/м^2. Ночью Солнце заходит за горизонт и мощность падающего излучения падает до нуля. Поэтому энергия падающего излучения, усреднённая за $t = 1$ год по дням и ночам, составляет величину порядка $\langle E\rangle = JSt/2$ (более строго JSt/π).

Объём столба воды высотой h, испарившейся с той же площадки, составит $V = Sh$, а его масса $m = \rho V = \rho Sh$, где $\rho = 1\,000$ кг/м^3 — плотность воды. Для испарения воды потребуется энергия $Q = \lambda m = \lambda\rho Sh$, где $\lambda = 2{,}3$ МДж/кг.

Приравнивая, $Q = \lambda\rho Sh$ и $\langle E\rangle = JSt/2$ находим высоту столба $h = Jt/(2\lambda\rho) = 1\,400\,\cdot$

$(365 \cdot 24 \cdot 3600)/(2 \cdot 2\,300\,000 \cdot 1000)$ м $\approx 9{,}6$ м.

4. Больше 14 км/с.

Ускорение свободного падения на расстоянии r от центра Земли определяется веществом, находящимся внутри сферы радиуса r (согласно указанию в задаче, гравитационное притяжение от внешних слоёв взаимно компенсируется и равно нулю). Объём шара радиуса r пропорционален r^3. Полагаем плотность Земли однородной. Тогда масса M вещества в сфере радиуса r внутри Земли также пропорциональна r^3 — $M = \alpha r^3$, где α — некоторая постоянная.

Согласно ньютонову закону тяготения, ускорение свободного падения a на расстоянии r пропорционально массе $M = \alpha r^3$ и обратно пропорционально r^2 — $a = GM/r^2 = \alpha G r$, где G — гравитационная постоянная. На поверхности Земли (при $r = R_З$) ускорение свободного падения $a = \alpha G r$ достигает известной величины $g = 10$ м/с^2, что определяет фактор $\alpha G = g/R_З$, где $R_З = 6\,400$ км — радиус Земли. Таким образом, внутри Земли $a = gr/R_З$, и на ядро массы m действует сила притяжения $F = ma = mgr/R_З$. Эта сила пропорциональна удалению r от центра Земли и поэтому эквивалента силе $F = kr$ пружины с коэффициентом жёсткости $k = mg/R_З$.

Таким образом, при движении ядра от центра Земли до поверхности планеты сила тяготения совершает работу A_1 над ядром, равную работе эквивалентной пружины при её растяжении из невозмущённого состояния до длины $r = R_З$ — $A_1 = -kR_З^2/2 = -mgR_З/2$.

При дальнейшем полёте ядра с поверхности планеты на бесконечное расстояние гравитация совершает над ним работу A_2, равную потенциальной энергии ядра на поверхности Земли $U = -GmM_З/R_З$ (которая совпадает с энергией взаимодействия двух точечных масс на расстоянии $r = R_З$). Здесь $M_З$ — масса Земли. Вместе с тем ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = GM_З/R_З^2$, что даёт фактор $GM_З = gR_З^2$. Подставляем его в выражение для работы $A_2 = -GmM_З/R_З = -mgR_З$.

В итоге при движении ядра из центра Земли на бесконечное удаление от планеты гравитация совершает над ядром работу $A = A_1 + A_2 = -mgR_З/2 - mgR_З = -3mgR_З/2$, и кинетическая энергия ядра уменьшается до величины $K = mv_0^2 + A = mv_0^2/2 - 3mgR_З/2$, где v_0 — искомая начальная скорость ядра в центре Земли. Кинетическая энергия K должна быть положительной, что ограничивает снизу начальную скорость ядра: $v_0 > \sqrt{3gR_З} = \sqrt{3 \cdot 10 \cdot 6\,400 \cdot 1\,000}$ м/с ≈ 14 км/с.

Решение задач 11 класса

1. а) 3) На части России летом. За северным полярным кругом Солнце не заходит за горизонт и в «полночь» летнего полярного дня находится в северном направлении.

б) 1) Зима.

в) 2) Короче половины суток. Ночь занимает время, когда Солнце полностью находится за горизонтом (его не видно). На экваторе центр Солнца находится под горизонтом половину суток (даже чуть меньше из-за преломления лучей в атмосфере, как в стекле). Естественно, вечером верхний край Солнца заходит за горизонт позднее, чем центр Солнца. В свою очередь, утром верхний край Солнце появляется над горизонтом раньше, чем центр светила. В результате Солнце целиком находится за горизонтом меньшее время, чем его центр, — меньше половины суток.

г) 1) Больше 100 млрд.

д) 2) За 13 млрд. лет.

е) 1) Стали бы короче.

ж) 3) Удвоенной кинетической энергии движения Земли вокруг Солнца. По второму закону Ньютона $M_З a = GM_З M_\odot/r^2$, где G — гравитационная постоянная, $M_З$ — масса Земли, $M_\odot$ — масса Солнца, r — радиус орбиты Земли. Центростремительное ускорение Земли на круговой орбите $a = v^2/r$, где v — скорость движения Земли. Получаем $M_З v^2/r = GM_З M_\odot/r^2$, и, следовательно, потенциальная энергия $GM_З M_\odot/r = 2\,(M_З v^2/2)$.

2. Сможет.

Если бы ускорение свободного падения было однородным в пространстве, то все части тела космонавта падали бы с одинаковым ускорением, и он не испытывал каких-либо перегрузок (или растяжений). Сила гравитационного притяжения к чёрной дыре неоднородна в пространстве, поэтому разные части тела космонавта стремятся падать с разным ускорением. Поэтому соединительные элементы (кости, связки и пр.) должны создавать внутренние силы, которые заставят разные части тела падать с одинаковым ускорением. Максимальное возможное растяжение космонавта определяется разностью ускорений свободного падения на характерной высоте человека $L = 2$ м — $\Delta g = GM/r^2 - GM/(r+L)^2 = GM\,[(r+L)^2 - r^2]/[r^2\,(r+L)^2] = GM\,L\,(2r+L)/[r^2\,(r+L)^2] \approx 2GML/r^3$, где r — расстояние до чёрной дыры, $M = 10^6 M_\odot$ — масса чёрной дыры, $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг — масса Солнца, G — гравитационная постоянная. На расстоянии $r = 2GM/c^2$ горизонта событий ($c = 300$ тыс. км/с —скорость света) рассматриваемая разность ускорений $\Delta g = 2GML/(2GM/c^2)^3 = c^6 L/(GM)^2 = (300\,000 \cdot 1000)^6 \cdot 2/[6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot (10^6 \cdot 2 \cdot 10^{30})]^2 = 0{,}08$ м/с. Такое растяжение по порядку величины в 100 раз меньше, чем если бы космонавт повис на турнике. Ясно, что такую малую «перегрузку» космонавт перенесёт.

Обратим внимание, что растяжение космонавта на горизонте событий увеличивается с уменьшением массы чёрной дыры: $\Delta g \propto 1/M^2$. Перегрузки будут невыносимы при падении на чёрную дыру звёздной массы ($M \sim M_\odot$).

3. Больше $3 \cdot 10^{12}$ Вт = 3 ТВт.

Пусть двигатель испустил N фотонов за время t. Фотоны уносят импульс $P = pN$ и придают ракете соответствующий импульс $P_\uparrow = pN$, направленный вверх (p — импульс одного фотона). В свою очередь, земное притяжение сообщает ракете импульс $P_\downarrow = mgt$, направленный вниз ($m = 1$ т — масса ракеты, $g = 10$ м/с^2 — ускорение свободного падения на поверхности Земли). Чтобы ракета оторвалась от стартовой площадки, импульс тяги $P_\uparrow = pN$ должен превысить импульс $P_\downarrow = mgt$, что налагает ограничение снизу на силу тяги $F = pN/t > mg$. Умножаем последнее неравенство на скорость света c, что даёт искомую мощность излучения ракеты $W = pcN/t = EN/t$ в левой части неравенства, где $E = pc$ — энергия одного фотона, и ограничение $W > mgc = 1000 \cdot 10 \cdot (300\,000 \cdot 1000)$ Вт $=$ $3 \cdot 10^{12}$ Вт $= 3$ ТВт.

Требуемая мощность фотонного двигателя превышает мощность (22 ГВт) наиболее крупной в мире электростанции «Три ущелья» в Китае. Вместе с тем, наиболее мощные лазеры (например, в Институте прикладной физики РАН) создают короткие импульсы излучения с существенно большей мощностью порядка 1 ПВт $= 10^{15}$ Вт, однако длительность импульсов ничтожна.

Огромная мощность фотонной ракеты по сравнению с «традиционной» жидкостной или твердотельной обусловлена тем, что при одинаковом силе тяги F (одинаковом импульсе $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t = F$ выбрасываемого «вещества» (газов или фотонов) в единицу времени) кинетическая энергия выбрасываемого вещества K и мощность ракеты W увеличиваются примерно пропорционально скорости v вещества: $K = Pv/2 \sim Pv$ при $v \ll c$ и $K \approx Pv$ при $v \approx c$; $W = \mathrm{d}K/\mathrm{d}t \sim Fv$. В обычной ракете скорость v выбрасываемого вещества существенно меньше, чем в фотонной ракете.

4. Ответ: $7 \cdot 10^{12}$.

Пусть галактика преломляет лучи на угол θ. Тогда лучи, образующие кольцо, выходят от квазара под углом $\theta/2$ к оси Земля—квазар, около эллиптической галактики преломляются на угол θ и далее подходят к наблюдателю под углом $\theta/2$ к направлению Земля—квазар. Диаметр кольца равен $2 \cdot (\theta/2) = \theta$ и по условию задачи составляет $6''$.

При рассматриваемых малых углах отклонения (много меньше 90°) свет распространяется практически по прямой в гравитационных полях галактики и Солнца. В свою очередь, полагаем гравитационные поля эллиптической галактики и Солнца совпадающими с полям точечных масс (на трассах распространения света, касающихся внешних границ этих объектов). Тогда гравитационные поля, проходимые светом вблизи галактики и Солнца взаимно подобны.

Будем рассматривать излучение как поток некоторых частиц — фотонов, имеющих импульс p. В силу подобия гравитационных полей изменение Δp импульса фотона для каждого объекта пропорционально ускорению свободного падения в точке максимального сближения с притягивающим телом $g = Gm/r^2$ и характерному времени прохождения области гравитационного поля $\tau = r/c$: $\Delta p = \alpha g \tau = \alpha Gm/(rc)$, где α — некоторая константа, G — гравитационная постоянная, c — скорость света, m — масса притягивающего тела, r — радиус тела. При малых углах отклонения изменение импульса направлено практически перпендикулярно начальному импульсу фотона, так что угол отклонения $\vartheta = \Delta p/p \propto m/r$.

Получаем, что отношение углов $\theta = 6''$ и $\theta_\odot = 1{,}75''$ отклонения света в полях галактики и Солнца пропорционально отношению масс M и $M_\odot$ этих объектов и обратно пропорционально отношению их радиусов $R = 100$ кпк и $R_\odot = 700\,000$ км: $\theta/\theta_\odot = (M/M_\odot)\,(R_\odot/R)$. Отсюда находим искомую массу галактики в единицах массы Солнца: $M/M_\odot = (\theta/\theta_\odot)\,(R/R_\odot) = [6/1{,}75]\,[(50 \cdot 1000 \cdot 3 \cdot 10^{13})/(700\,000)] = 7 \cdot 10^{12}$.

Условия и решение задач
Открытой городской олимпиады по астрономии, астрофизике
и физике космоса им. СамуилаАроновича Каплана
18 декабря 2011 г.

8–9 классы

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Наша Галактика называется:
   1) Солнечная система,
   2) Млечный путь,
   3) Туманность Ориона.

б) Названия Фобос и Деймос спутников Марса означают:
   1) мужественный и решительный,
   2) щит и меч,
   3) страх и ужас.

в) Раз в году Солнце проходит через созвездие:
   1) Орион,
   2) Персей,
   3) Стрелец.

г) Первый телескоп изобрёл:
   1) Архимед,
   2) Галилей,
   3) Ломоносов.

д) Первый искусственный спутник Земли запущен:
   1) 4 октября 1957 года в СССР,
   2) 7 октября 1959 года в США,
   3) 12 апреля 1961 года в СССР.

е) Высота полёта Международной космической станции примерно равна:
   1) 120 км,
   2) 350 км,
   3) 680 км.

ж) Скорость движения Луны как спутника Земли:
   1) меньше, 2) равна, 3) больше,
   первой космической скорости на Земле.

2. При наблюдении в телескоп можно разглядеть всё более мелкие детали на поверхности планет (горы, впадины). Тогда зачем наблюдать в телескоп звёзды, если они всё равно остаются точками?

3. Города Сиена и Александрия лежат на одном меридиане. В один из полдней солнце в Сиене находится точно в зените. В этот момент в Александрии солнечные часы высотой 10 м отбрасывают тень длиной 120 см. Определите радиус Земли, если расстояние между Сиеной и Александрией 750 км.

4. Пусть солнечное затмение происходит примерно в полдень. Как по движению Луны по диску Солнца определить, в каком полушарии Земли Вы находитесь: северном или южном? Радиус Земли 6 400 км, расстояние до Луны 380 000 км.

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Ярчайшая звезда неба Сириус видна:
   1) зимой в Нижегородской области,
   2) летом в Нижегородской области,
   3) только в южной части России.

б) Солнце расположено примерно:
   1) около центра Галактики,
   2) посередине от центра к краю Галактики,
   3) на окраине Галактики.

в) Пояс астероидов находится:
   1) между Землёй и Луной,
   2) между Марсом и Юпитером,
   3) за Плутоном.

г) Вокруг своей оси в противоположную сторону по сравнению с Землёй вращается:
   1) Меркурий,
   2) Венера,
   3) Нептун.

д) Солнечные лучи освещают:
   1) меньше половины,
   2) ровно половину,
   3) больше половины,
   поверхности Земли.

е) Свет распространяется от Солнца до Земли примерно:
   1) за 2 секунды,
   2) за 8 минут,
   3) за полчаса.

ж) Скорость Международной космической станции превышает скорость звука у поверхности Земли примерно:
   1) в 25 раз, 2) в 250 раз, 3) в 2 500 раз.

2. Во сколько раз бо́льший груз могла бы перевезти одна и та же баржа на Луне, чем на Земле (если бы на Луне была жидкая вода)? Ускорение свободного падения на Луне в 6 раз меньше, чем на Земле.

3. Оцените, во сколько раз тепловыделение на Солнце (от термоядерных реакций) отличается от тепловыделения человека в расчёте на 1 кг вещества. Для поддержания своей температуры человеку с массой 70 кг необходимо потреблять в сутки пищу с энергетическим содержанием около 2000 килокалорий (1 калория = 4,2 Дж). На Земле на 1 м^2 падает поток солнечного излучения 1,4 кВт, расстояние от Земли до Солнца 150 млн. км, масса Солнца $2 \cdot 10^{27}$ тонн. Площадь сферы радиуса r равна $4\pi r^2$.

4. Активная галактика выбрасывает сгусток вещества со скоростью 0,9 от скорости света c под углом 45° к направлению на Землю. С какой скоростью необходимо запустить из той же галактики второй сгусток перпендикулярно к направлению на Землю, чтобы видимые на Земле изображения обоих сгустков совпадали в любой момент времени? При каких условиях может существовать второй сгусток с требуемой скоростью?

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) По современным представлениям Вселенная расширяется:
   1) с замедлением,
   2) с постоянным темпом,
   3) с ускорением.

б) Центр нашей Галактики находится в направлении созвездия:
   1) Волосы Вероники,
   2) Стрелец,
   3) Дева.

в) В будущем Солнце станет:
   1) белым карликом,
   2) нейтронной звездой,
   3) чёрной дырой.

г) Наиболее горячие звёзды:
   1) белые,
   2) красные,
   3) голубые.

д) Размер нейтронной звезды порядка:
   1) Нижнего Новгорода,
   2) Земли,
   3) Солнца.

е) Видимая поверхность Юпитера:
   1) твёрдая,
   2) жидкая,
   3) газообразная.

ж) Международная космическая станция совершает за сутки вокруг Земли примерно:
   1) 4 оборота, 2) 16 оборотов, 3) 64 оборота.

2. Космический корабль должен изменить направление своего движения на противоположное. Как следует выполнять такой манёвр, чтобы минимизировать расход горючего:

а) развернуть корабль по полуокружности с постоянной скоростью,

б) остановить корабль и затем разогнать его в противоположном направлении до прежней скорости?

Считать, что в обоих случаях расход топлива составит много меньше массы корабля, а двигатели работают в одинаковом режиме (масса выбрасываемых газов в единицу времени и их скорость относительно корабля постоянны).

3. Простейший телескоп (Галилея) представляет собой две фокусирующие линзы с некоторыми фокусными расстояниями f_1 и f_2. Линзы располагают в трубе на расстоянии $d = f_1 + f_2$ (конфокальная конфигурация). Чему равно угловое увеличение телескопа, которое показывает, во сколько раз увеличивается видимый в телескоп угол между двумя объектами по сравнению с истинным угловым расстоянием между объектами на небе?

4. В настоящее время космический аппарат Вояджер покинул Солнечную систему и находится от нас на расстоянии примерно 100 астрономических единиц. Определите, где светлее: в полнолуние на Земле или на аппарате Вояджер, освещаемом Солнцем, и во сколько раз? Считать блеск Луны в полнолуние равным $-12{,}7^{\mathrm{m}}$, а блеск Солнца на Земле $-26{,}7^{\mathrm{m}}$.

1. а) 2) Млечный путь.

б) 3) Страх и ужас. Известно слово «фобия» — страх, боязнь.

в) 3) Стрелец. Одно из созвездий зодиака.

г) 2) Галилей. 2009 год астрономии был посвящён 400-летию первого телескопа.

д) 1) 4 октября 1957 года в СССР.

е) 2) 350 км.

ж) 1) Меньше. С первой космической скоростью летают спутники около поверхности Земли. По мере увеличения расстояния до Земли скорость спутников уменьшается (по аналогии с планетами в Солнечной системе).

2. Чтобы разглядеть звёзды, не видимые невооружённым глазом, а также разрешить кратные звезды.

Телескоп собирает свет с бóльшей площади, чем глаз, и тем самым увеличивает принимаемый световой поток. Это позволяет человеку увидеть более слабые звёзды, не видимые невооружённым глазом. Вместе с тем телескоп увеличивает видимое угловое расстояние между небесными объектами, поэтому становится возможным различить отдельные звёзды в кратных звёздных системах.

3. 6 300 км.

Вертикаль в Александрии (линия центр Земли—Александрия) отклоняется от направления на Солнце на угол $\alpha = \operatorname{arctg}(l/h)$, где $l = 120$ см — длина тени от солнечных часов высотой $h = 10$ м. В свою очередь, направление на Солнце совпадает с направлением линии центр Земли—Сиена. Таким образом угол между линиями центр Земли—Александрия и центр Земли—Сиена совпадает с углом α. Тогда расстояние 750 км между городами совпадает с длиной дуги окружности вдоль поверхности Земли $D = \alpha R_З$. Следовательно, искомый радиус Земли $R_З = D/\alpha = D/\operatorname{arctg}(l/h) \underset{l \ll h}{\approx} Dh/l = 750 \cdot 10/1{,}2 = 6\,300$ км.

4. Если тень движется справа налево, то в северном полушарии. Если слева направо — в южном.

Если бы Земля не вращалась вокруг своей оси, то в полдень лунная тень бежала по поверхности Земли в сторону вращения Луны вокруг Земли — преимущественно с запада на восток со скоростью, равной скорости движения Луны по орбите $v_Л = 2\pi R_Л/T_Л$, где $R_Л = 380\,000$ км — радиус орбиты Луны, $T_Л = 28$ суток — период обращения Луны вокруг Земли.

Земля вращается вокруг своей оси также с запада на восток. Скорость вращения на экваторе составляет $v_З = 2\pi R_З/T_З$, где $R_З = 6\,400$ км — радиус Земли, $T_З = 1$ сутки — период вращения Земли. При смещении от экватора скорость суточного вращения уменьшается из-за приближения точки наблюдения к оси земного вращения.

Таким образом, на экваторе отношение скоростей

$$v_{\text{Л}}/v_{\text{З}} = (R_{\text{Л}}/R_{\text{З}}) \cdot (T_{\text{З}}/T_{\text{Л}}) = (380\,000/6\,400) \cdot (1/28) \approx 2 > 1$$

и может только увеличиваться при смещении от экватора. Следовательно, земное вращение не мешает лунной тени смещаться с запада на восток в любой точке наблюдения.

Тогда, если солнечное затмение происходит около полудня, то Луна проходит по Солнцу с запада на восток. Такое движение соответствует перемещению Луны по диску Солнца справа налево в северном полушарии, где Солнце находится на юге. В южном полушарии Луна движется слева направо.

Решение задач 10 класса

1. а) 1) Зимой в Нижегородской области.

б) 2) Посередине от центра к краю. Радиус Галактики 15 килопарсек, расстояние от Солнца до центра Галактики 8 килопарсек.

в) 2) Между Марсом и Юпитером.

г) 2) Венера. Противоположное вращение вызвано взаимодействием с Землёй. После максимального сближения планет Венера как бы «оглядывается» на Землю, которая отстаёт в своём орбитальном движении вокруг Солнца.

д) 3) Больше половины. Траектории солнечных лучей преломляются в земной атмосфере и освещают часть поверхности, которая была бы тёмной в отсутствие атмосферы.

е) 2) За 8 минут. Расстояние до Солнца 150 млн. км, скорость света 300 тыс. км/с.

ж) 1) В 25 раз. Скорость станции примерно равна первой космической скорости 7,9 км/с, а скорость звука 330 м/с.

2. Масса максимального перевозимого груза одинакова на Земле и Луне.

Сила тяжести, действующая на баржу и груз, компенсируется силой давления жидкости — силой Архимеда. В свою очередь, сила давления жидкости равна силе тяжести вытесненной баржой воды. Таким образом, масса баржи с грузом равна массе вытесненной воды. Максимальная масса вытесняемой воды определяется формой баржи и не зависит от силы тяжести, т. е. одинакова на Земле и Луне. Следовательно, максимальная возможная масса перевозимого груза одинакова на Земле и Луне.

3. Ответ: в 7 000 раз меньше.

Мощность тепловыделения человека с массой $m = 70$ кг на единицу массы составляет $\eta_{\text{ч}} = (Q_{\text{ч}}/m)/1$ сут $= [4{,}2 \cdot (2 \cdot 10^6)/70]/(24 \cdot 3\,600)$ Вт/кг $\approx 1{,}4$ Вт/кг, где $Q_{\text{ч}} = 2\,000$ ккал $= 4{,}2 \cdot (2 \cdot 10^6)$ Дж — энергия, которую потребляет человек с пищей и в итоге расходует на тепловыделение, 1 сут $= 24 \cdot 3\,600$ с — время, в течение которого расходуется указанная энергия.

Выделяемая в Солнце энергия из-за термоядерных реакций в итоге расходуется на излучение. Поток энергии излучения равен, например, потоку через сферу с радиусом орбиты Земли $r = 150$ млн. км и площадью $S = 4\pi r^2$ — $P_\odot = JS = J \cdot (4\pi r^2) = 4 \cdot 10^{26}$ Вт. Тогда мощность тепловыделения от термоядерных реакций на единицу массы составляет $\eta_\odot = P_\odot/M_\odot = 4\pi r^2 J/M_\odot = 2 \cdot 10^{-4}$ Вт/кг, что в 7 000 раз меньше, чем удельное тепловыделение человека.

4. Ответ: 1,75c, такой сгусток не существует из-за превышения скорости света.

Изображения сгустков совпадут, если излучаемый вторым сгустком луч в направлении на Землю постоянно проходит сквозь первый сгусток.

Пусть некоторый импульс света от второго сгустка проходит сквозь первый сгусток на расстоянии L от центра галактики. Тогда импульс света прошёл между двумя траекториями расстояние $L\cos\theta$, где $\theta = 45^\circ$ — наклон траектории первого сгустка к линии галактика—Земля. Время распространения от второй до первой траектории составит $t_{\text{распр}} = L\cos(\theta)/c$. В свою очередь, свет вышел с траектории второго сгустка на расстоянии $L\sin\theta$ и, следовательно, был излучён в момент времени $t_{\text{изл}} = L\sin(\theta)/v_2$ после выброса сгустков, где v_2 — скорость второго сгустка. Таким образом, свет второго сгустка пересекает траекторию первого сгустка в момент $t = t_{\text{изл}} + t_{\text{распр}} = L\left[c^{-1}\cos(\theta) + v_2^{-1}\sin(\theta)\right]$.

Первый сгусток окажется в точке пересечения в тот же момент t, если $v_1 t = L$, где $v_1 = \eta c$ — скорость первого сгустка (по условию задачи $\eta = 0{,}9$). Необходимое равенство $v_1 L\left[c^{-1}\cos(\theta) + v_2^{-1}\sin(\theta)\right] = L$ не зависит от расстояния L и определяет искомую скорость $v_2 = \{[v_1^{-1} - c^{-1}\cos(\theta)]/\sin(\theta)\}^{-1} = v_1\sin(\theta)/[1 - v_1\cos(\theta)/c] = c\eta\sin(\theta)/[1 - \eta\cos(\theta)] = c \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}707/[1 - 0{,}9 \cdot 0{,}707] = 1{,}75c$. Требуемая скорость v_2 превышает скорость света, поэтому второй сгусток не может существовать ни при каких условиях.

Таким образом, изображение первого сгустка, выброшенного под углом к направлению на Землю с досветовой скоростью, эквивалентно изображению сверхсветового сгустка, движущегося перпендикулярно к лучу зрения. Такой явление называют сверхсветовым разлётом. Оно наблюдается в релятивистских джетах (струях) активных ядер галактик.

Решение задач 11 класса

1. а) 3) С ускорением. Всё более быстрое расширение обусловлено «антигравитацией», вызванной тёмной энергией.

б) 2) Стрелец.

в) 1) Белым карликом.

г) 3) Голубые. С увеличением температуры максимум излучения звезды смещается от длинных волн (красных) к более коротким (синим).

д) 1) Нижнего Новгорода.

е) 3) Газообразная. Юпитер не имеет твёрдой поверхности в отличие от планет земной группы.

ж) 2) 16 оборотов. Период обращения станции 92 минуты, искомое число оборотов за сутки $24 \cdot 60$ мин$/92$ мин ≈ 16.

2. Способом б) — затормозить и затем разогнать корабль.

Поскольку двигатели работают в одинаковом режиме, то в обоих случаях они создают одинаковую силу F, не зависящую от времени. В случае а) сила направлена перпендикулярно скорости корабля и создаёт центростремительное ускорение $a = F/m$. В свою очередь, центростремительное ускорение связано с радиусом окружности r соотношением $a = v^2/r$, что позволяет выразить радиус окружности как $r = v^2/a = mv^2/F$. Время движения по полуокружности длины πr составит $t_{\text{окр}} = \pi r/v = \pi mv/F$.

В случае б) сила направлена против начального движения корабля, и корабль движется равнозамедленно с ускорением $a = F/m$, где m — масса корабля. Корабль затормозит от начальной скорости v до остановки за время $v/a = mv/F$. Точно такое же время корабль будет ускоряться до начальной скорости, и общее время манёвра составит $t_{\text{прям}} = 2mv/F$.

Таким образом, манёвр а) требует в $t_{\text{окр}}/t_{\text{прям}} = \pi/2 \approx 1{,}5$ раза бóльшее время, чем манёвр б). Следовательно, более короткий манёвр б) обеспечивает меньший расход топлива.

3. Ответ: $\boldsymbol{f_1/f_2}$.

Почти параллельный пучок лучей от звезды, распространяющийся под углом α к оптической оси телескопа, собирается в фокальной плоскости входной (первой) линзы на расстоянии $h = f_1 \operatorname{tg}\alpha \underset{\alpha \ll 1}{\approx} \alpha f_1$ от той же оптической оси. Выходная (вторая) линза преобразует полученное в фокальной плоскости изображение в параллельный пучок лучей, идущих под углом $\beta = \operatorname{arctg}(h/f_2) \underset{h/f_2 \ll 1}{\approx} h/f_2 = \alpha f_1/f_2$ к оптической оси телескопа. Таким образом, на выходе из телескопа лучи от звёзд распространяются под f_1/f_2 раза бóльшими углами к оптической оси по сравнению с исходными лучами до телескопа. Во столько же раз увеличиваются и видимые углы между звёздами.

4. Светлее на Вояджере в 40 раз.

Поток через сферу, окружающую Солнце, не зависит от радиуса сферы. Поэтому солнечный поток, проходящий через единицу поверхности сферы (например 1 м^2), обратно пропорционален площади сферы, которая, в свою очередь, пропорциональна квадрату радиуса сферы. Тогда освещённость — солнечный поток через единицу поверхности на Вояджере в $100^2 = 10^4$ раз меньше, чем на Земле. Уменьшение поверхностной плотности потока в 10 раз соответствует увеличению видимой звёздной величины на 2,5. Соответственно, видимая звёздная величина Солнца на Вояджере составит $-26{,}7^{\mathrm{m}} + 4 \cdot 2{,}5 = -16{,}7^{\mathrm{m}}$. Таким образом, Солнце на Вояджере выглядит на 4 звёздных величины ярче, чем Луна на Земле в полнолуние. Указанное отличие в 4 звёздных величины соответствует отличию освещённостей в $10^{(4/2{,}5)} = 10^{1{,}6} \approx 40$ раз.

Условия и решение задач
Открытой городской олимпиады по астрономии, астрофизике
и физике космоса им. Всеволода Сергеевича Троицкого
27 января 2013 г.

8–9 классы

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Небесное тело Плутон назвали в честь:
   1) древнегреческого философа;
   2) древнегреческого героя;
   3) римского бога;
   4) химического элемента, обнаруженного на планете.

б) Спутники Юпитера впервые увидел:
   1) Аристотель;
   2) Галилей;
   3) Кеплер;
   4) Ньютон.

в) Первым в открытый космос вышел:
   1) Нил Армстронг;
   2) Юрий Гагарин;
   3) Алексей Леонов;
   4) Эдвин Олдрин.

г) Созвездие Стрельца можно наблюдать в Нижегородской области:
   1) летом в южной части неба;
   2) летом в северной части неба;
   3) зимой в южной части неба;
   4) зимой в северной части неба.

д) Астрономическая единица равна:
   1) расстоянию от Земли до Солнца;
   2) угловому размеру Солнца;
   3) видимой звёздной величине Солнца;
   4) плотности потока солнечного излучения на орбите Земли.

е) Если бы земную ось отклонили настолько, что она оказалась в плоскости движения Земли вокруг Солнца, то сезонные изменения стали:
   1) мягче;
   2) сильнее;
   3) значительных изменений не произойдёт.

ж) Сутки на Луне (время между двумя восходами Солнца) составляют:
   1) приблизительно земные сутки; 2) приблизительно неделю;
   3) приблизительно месяц; 4) Солнце не заходит на Луне.

2. Сколько длится восход Солнца в Санкт-Петербурге (географические координаты 60° с. ш., 33° в. д.) в день весеннего равноденствия? Видимый угловой диаметр Солнца 0,5°.

3. Космическая станция вращается вокруг Земли на экваториальной орбите на высоте 300 км. Сколько необходимо наземных станций, чтобы обеспечить непрерывную связь с космонавтами? Радиус Земли 6 400 км. При расчёте используйте известное выражение $L = 2\pi R$ для длины окружности радиуса R.

4. Оцените амплитуду колебаний скорости центра Земли, вызванного вращением Луны вокруг Земли. Расстояние от Земли до Луны 380 тыс. км, период обращения Луны вокруг Земли 28 дней, масса Земли в 80 раз больше массы Луны.

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Точка наименьшего расстояния между планетой и Солнцем называется:
1) перигей;
2) перигелий;
3) периселений;
4) периастр.

б) Растущая Луна в первой четверти восходит в Нижнем Новгороде:
1) в 6 утра;
2) в полдень;
3) в 6 вечера.
4) в полночь.

в) Центр нашей Галактики не виден невооружённым глазом, потому что:
1) находится слишком далеко;
2) его излучение поглощает чёрная дыра в центре;
3) закрыт пылью от нас;
4) там находится лишь тёмная материя.

г) Во время солнечного затмения центры дисков Луны и Солнца совпали. Может ли край диска Солнце остаться открытым?
1) может;
2) не может;
3) теоретически может, но такой случай пока не наблюдался.

д) Цефеидами называют:
1) метеорный поток;
2) крупные астероиды;
3) переменные звёзды;
4) активные ядра галактик.

е) Один парсек примерно равен:
1) расстоянию от Земли до Солнца;
2) радиусу Солнечной системы;
3) расстоянию до ближайшей к Солнцу звезды;
4) трём световым годам.

ж) Современный григорианский календарь отличается от юлианского тем, что:
1) введены високосные года; 2) все сотые года стали невисокосными;
3) сотые года стали невисокосными через один;
4) сотые года стали невисокосными, кроме тех, что делятся на 400.

2. По древнегреческому мифу наковальня бога Вулкана падала с неба 9 дней. В таком случае с какой высоты она свалилась? Для расчёта используйте то обстоятельство, что Луна обращается вокруг Земли по орбите с радиусом 380 тыс. км за 28 дней.

3. За какое минимальное время звезда (или планета) со средней плотностью ρ может совершать оборот вокруг своей оси, чтобы на ней сила тяготения ещё удерживала вещество против центробежной силы? а) Приведите оценку для планет земного типа со средней плотностью $\rho = 5$ кг/дм^3. б) Оцените минимальную допустимую плотность вещества пульсара (нейтронной звезды) с периодом вращения 1 мс. Гравитационная постоянная $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг $\cdot$ с^2). При расчёте используйте известное выражение $V = 4\pi R^3/3$ для объёма шара радиуса R.

4. Сверхновая достигает абсолютной звёздной величины $M = -21$ в максимуме блеска (абсолютная звёздная величина — звёздная величина объекта, если бы он располагался на расстоянии 10 парсек от наблюдателя). Как часто будут регистрироваться вспышки сверхновых, если наблюдение ведётся по всему небу до предельной величины $m = 14$? Считайте, что в типичной галактике сверхновая вспыхивает один раз в 100 лет, а во Вселенной в среднем одна галактика приходится на 10 кубических мегапарсек. Звёздная величина m связана с принимаемым световым потоком F соотношением $m = -2{,}5 \lg F + \mathrm{const}$.

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Более тяжёлые звёзды живут:
   1) дольше;
   2) меньше;
   3) время жизни звезды слабо зависит от её массы.

б) Первый радиотелескоп построил:
   1) Генрих Герц;
   2) Джеймс Максвелл;
   3) Гульельмо Маркони;
   4) Карл Янский.

в) Атмосферное давление больше на:
   1) Венере;
   2) Земле;
   3) Марсе.

г) Бозон Хиггса:
   1) имеет нулевую массу покоя, как и фотон;
   2) легче протона;
   3) тяжелее протона.

д) Наиболее распространённые ядра во Вселенной:
   1) водорода;
   2) гелия;
   3) кислорода;
   4) кремния;
   5) железа.

е) Приливы на Земле самые слабые:
   1) в новолуние;
   2) когда Луна находится в первой четверти;
   3) в полнолуние.

ж) Пусть в полнолуние Луна занимает наиболее высокое возможное положение на небе. Тогда лунное или солнечное затмения можно ожидать примерно через:
   1) две недели; 2) три месяца; 3) полгода; 4) год.

2. Три звезды с произвольными массами m_1, m_2 и m_3 находятся в вершинах правильного треугольника со стороной R. а) С какой угловой скоростью необходимо закрутить систему, чтобы расстояния между звёздами сохранялись при дальнейшем движении (6 баллов)? б) Приведите подобный пример расположения тел в Солнечной системе (1 балл).

3. Зоной обитаемости условно называют область в космосе, где вода на планете земного типа может находиться в жидком состоянии. Оцените зону обитаемости в Солнечной системе, если средняя температура на Земле 14 °C. Считайте, что подогрев гипотетической планеты солнечным излучением компенсируется её охлаждением за счёт собственного теплового излучения, поток J которого с единицы поверхности пропорционален абсолютной температуре планеты T в 4-й степени: $J = \text{const} \cdot T^4$. Попадают ли в зону обитаемости орбиты Венеры или Марса с радиусами 0,7 а. е. и 1,5 а. е. соответственно?

4. По современным представлениям основную долю энергии Вселенной составляют так называемые холодное тёмное вещество и тёмная энергия. Частицы тёмного вещества не появляются и не исчезают, а их энергия в основном определяется энергией покоя mc^2. В свою очередь, тёмная энергия отличается тем, что её пространственная плотность остаётся постоянной при расширении Вселенной. В настоящее время возраст Вселенной примерно 14 млрд. лет, а тёмное вещество и тёмная энергия составляют соответственно 25 % и 75 % от всей энергии Вселенной. Оцените, каким был возраст Вселенной, когда относительное содержание тёмного вещества и тёмной энергии было по 50 %. Считайте, что «радиус» Вселенной увеличивался с постоянной скоростью.

Решение задач 8–9 классов

1. а) 3) римского бога.
б) 2) Галилей.
в) 3) Алексей Леонов.
г) 1) Летом в южной части неба.
д) 1) Расстоянию от Земли до Солнца.
е) 2) Сильнее.
ж) 3) Приблизительно месяц.

2. 4 мин.

В день весеннего равноденствия Солнце находится на небесном экваторе: восходит строго на востоке и в течение суток движется в плоскости, строго перпендикулярной направлению на Полярную звезду. Направление на Полярную звезду составляет с плоскостью горизонта угол φ, равный широте места наблюдения 60°. Соответственно, Солнце восходит к линии горизонта под углом

$$\vartheta = 90^\circ - \varphi = 30^\circ.$$

Темп подъёма Солнца над горизонтом определяется вертикальной составляющей

$$v_{\text{vert}} = v \sin\vartheta$$

полной скорости v перемещения светила по небу. За сутки Солнце совершает полный оборот вокруг направления на Полярную звезду в экваториальной плоскости, поэтому полная скорость

$$v = 360^\circ/1\ \text{сут} = 360^\circ/(24 \cdot 60 \cdot 60\ \text{с}) = 1^\circ/240\ \text{с},$$

а вертикальная компонента на восходе $v_{\text{vert}} = v \sin\vartheta = v/2 = 0{,}5^\circ/240$ с. Восход занимает время t, которое необходимо Солнцу, чтобы подняться над горизонтом на свой угловой диаметр $\alpha = 0{,}5^\circ$. Следовательно, искомое время

$$t = \alpha/v_{\text{vert}} = 240\ \text{с} = 4\ \text{мин}.$$

3. Больше 10.

Полагаем, что станция слежения обеспечивает связь с космической станцией, если последняя находится над горизонтом. В момент потери связи космическая станция находится на линии горизонта. Следовательно, направление на космическую станцию строго перпендикулярно вертикали в точке нахождения станции слежения. Тогда отрезки, соединяющие станцию слежения с центром Земли и с космической станцией, образуют катеты в прямоугольном треугольнике, один из которых равен радиусу Земли R_{E}, а другой — расстоянию D от станции слежения до космической станции. Гипотенузу образует отрезок, соединяющий центр Земли и космическую станцию, с длиной $R_{\text{E}} + h$, где h — высота полёта космической станции. Таким образом, расстояние между станцией слежения и космической станцией (один из катетов) находим по теореме Пифагора:

$$D = \sqrt{(R_{\text{E}} + h)^2 - R_{\text{E}}^2} = \sqrt{(2R_{\text{E}} + h)\, h} \approx \sqrt{2R_{\text{E}} h}.$$

Для поддержания непрерывной связи расстояние между станциями слежения должно быть меньше $2D$, чтобы космическая станция заходила за горизонт для одной станции слежения и одновременно поднималась над горизонтом для другой станции слежения. Здесь в силу малости высоты полёта $h = 300$ км по сравнению с радиусом Земли $R_\mathrm{E} = 6\,400$ км мы пренебрегаем отличием сумм длин отрезков, соединяющих космическую станцию с двумя соседними станциями слежения, и расстоянием между станциями слежения вдоль поверхности Земли. Таким образом, для поддержания непрерывной связи необходимо расположить на экваторе станции слежения в количестве

$$N > 2\pi R_\mathrm{E}/(2D) = \pi\sqrt{R_\mathrm{E}/(2h)} = \sqrt{3{,}14^2 \cdot 6400/(2\cdot 300)} > 10$$

(здесь $2\pi R_\mathrm{E}$ — длина экватора).

4. 12 м/с.

Земля и Луна вращаются вокруг общего центра масс, который удалён от центра Земли на расстояние

$$r = \frac{M_\mathrm{M} L}{M_\mathrm{E} + M_\mathrm{M}} \approx \frac{M_\mathrm{M} L}{M_\mathrm{E}} = \frac{380\,000\ \text{км}}{80} \approx 4\,750\ \text{км},$$

где M_M и M_E — массы Луны и Земли соответственно. Таким образом, центр Земли движется по окружности радиуса r и совершает полный оборот за время $T = 28$ дней. Скорость движения центра Земли по окружности и равная ей искомая амплитуда колебаний в некотором направлении составляет

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 4\,750\ \text{км}}{28\cdot 24\cdot 60\cdot 60\ \text{с}} \approx 12\ \text{м/с}.$$

Решение задач 10 класса

1. а) 2) Перигелий.

б) 2) В полдень.

в) 3) Закрыт пылью от нас.

г) 1) Может. Это так называемое кольцевое затмение.

д) 3) Переменные звёзды.

е) 4) Трём световым годам.

ж) 4) Сотые года стали невисокосными, кроме тех, что делятся на 400.

2. 570 тыс. км

Падение наковальни на Землю соответствует движению по сильно вытянутому эллипсу, у которого наиболее удалённая точка (перигей) находится в точке начала движения наковальни, а наиболее близкая точка (апогей) совпадает с фокусом, находящимся в центре Земли. Согласно третьему закону Кеплера период обращения тела по эллипсу пропорционален большой оси эллипса в степени 3/2. В случае наковальни большая ось равна искомому начальному расстоянию L от наковальни до центра Земли, а в случае Луны — диаметру её орбиты $2R_\text{M}$. В свою очередь, период обращения наковальни по эллипсу составлял бы удвоенное время падения наковальни (если бы она не столкнулась с Землёй) $2T = 2 \cdot 9$ дней. Таким образом, выполняется соотношение $2T/T_\text{M} = [L/(2R_\text{M})]^{3/2}$ (здесь $T_\text{M} = 28$ дней — период обращения Луны), что определяет искомое расстояние

$$L = 2R_\text{M}\,(2T/T_\text{M})^{2/3} = 2 \cdot 380\,000\,(2 \cdot 9 \text{ дней}/28 \text{ дней})^{2/3} \text{ км} = 570 \text{ тыс. км}.$$

Наковальня начала падать за пределами орбиты Луны.

3. а) 1,5 ч; б) $\mathbf{1{,}4 \cdot 10^8}$ т/см^3.

Рассмотрим точки на экваторе, где центробежная сила максимальна. В случае баланса центробежной силы и силы тяготения вещество звезды перестаёт давить на подстилающие слои и, таким образом, вращается по круговой орбите, как спутник. На круговой орбите центростремительное ускорение v^2/R создаётся силой тяготения и поэтому совпадает с ускорением свободного падения GM/R^2 (здесь v — скорость движения точек на экваторе, R — радиус звезды, M — масса звезды, G — гравитационная постоянная). В свою очередь, скорость движения спутника $v = 2\pi R/T$ определяется длиной экватора $2\pi R$ и искомым периодом обращения T. Массу звезды M выразим через её плотность ρ и объём $V = 4\pi R^3/3$: $M = \rho V = 4\pi\rho R^3/3$. Указанное выше равенство ускорений запишется в виде

$$\frac{(2\pi R/T)^2}{R} = \frac{G\,(4\pi\rho R^3/3)}{R^2},$$

что определяет искомый минимальный допустимый период обращения $T = \sqrt{3\pi/(G\rho)}$. Предельный период T не зависит от радиуса звезды.

а) Для земной плотности $\rho = 5$ кг/дм^3 = 5 000 кг/м^3 находим оценку

$$T = \sqrt{3 \cdot 3{,}14/(6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot 5\,000)} \text{ с} \approx 5300 \text{ с} = 1{,}5 \text{ ч}.$$

б) Минимальная допустимая плотность вещества пульсара

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2} = \frac{3 \cdot 3{,}14}{6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}001^2} \text{ кг/м}^3 = 1{,}4 \cdot 10^{17} \text{ кг/м}^3 = 1{,}4 \cdot 10^8 \text{ т/см}^3.$$

Такая плотность всего в три раза меньше характерной ядерной плотности. Действительно, радиус r_p протона составляет примерно 1 фм $= 10^{-13}$ см, а масса частицы $m_\mathrm{p} = 1{,}7 \cdot 10^{-27}$ кг, что определяет характерную ядерную плотность

$$\rho_\mathrm{n} = \frac{m_\mathrm{p}}{4\pi r_\mathrm{p}^3/3} = 4 \cdot 10^{11}\ \text{кг/см}^3 = 4 \cdot 10^{8}\ \text{т/см}^3.$$

4. 4200 сверхновых в год.

В отсутствие поглощения через любую сферу, охватывающую звезду, проходит одинаковый поток излучения, равный светимости звезды. Вместе с тем площадь сферы пропорциональна квадрату её радиуса. Поэтому поток через единицу поверхности (например, через входное отверстие (апертуру) телескопа) убывает обратно пропорционально квадрату расстояния R до звезды: $F = F_0\,(10\ \text{пк}/R)^2$, где F_0 — поверхностная плотность потока излучения на расстоянии 10 пк. Тогда видимая звёздная величина запишется как

$$m = -2{,}5\lg F + \mathrm{const} = -2{,}5\lg[F_0\,(10\ \text{пк}/R)^2] + \mathrm{const} = [-2{,}5\lg F_0 + \mathrm{const}] + 5\lg(R/10\ \text{пк}).$$

В последнем выражении величина в квадратных скобках $-2{,}5\lg F_0 + \mathrm{const}$ по определению совпадает с абсолютной звёздной величиной M. Следовательно, $m = M + 5\lg(R/10\ \text{пк})$. Тогда максимальное расстояние, до которого регистрируются сверхновые,

$$R = 10^{(m-M)/5} \cdot 10\ \text{пк} = 10^{1+(m-M)/5}\ \text{пк} = 10^{1+[14-(-21)]/5}\ \text{пк} = 10^{8}\ \text{пк}.$$

Такому расстоянию соответствует объём $V = 4\pi R^3/3$ в виде шара радиуса R. В этом объёме находятся $N = \rho V = 4\pi\rho R^3/3$ галактик, где $\rho = 1/10\ \text{Мпк}^{-3} = 10^{-19}\ \text{пк}^{-3}$ — концентрация галактик. Темп регистрации сверхновых составит величину

$$\nu = \frac{N}{T} = \frac{4\pi\rho R^3}{3T} = \frac{4\pi\rho\,[10^{1+(m-M)/5}]^3}{3T} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-19} \cdot (10^8)^3}{3 \cdot 100\ \text{лет}} \approx 4200\ \text{событий в год},$$

где $T = 100$ лет — характерный временной интервал между вспышками сверхновых в одной галактике.

Решение задач 11 класса

1. а) 2) Меньше.
б) 4) Карл Янский.
в) 1) Венере.
г) 3) Тяжелее протона.
д) 1) Водорода.
е) 2) Когда Луна находится в первой четверти.
ж) 2) Три месяца.

2. а) Относительно любой оси, перпендикулярной плоскости начального треугольника звёзд, с угловой скоростью $\omega = \sqrt{G\,(m_1 + m_2 + m_3)/R^3}$.

б) Солнце, Юпитер и так называемые астероиды «троянцы» и «греки».

Если расстояние между звёздами остаётся неизменным и равным R, то в произвольный момент времени вторая и третья звёзды притягивают первую звезду с силой

$$\vec{F}_1 = -\frac{Gm_1m_2\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} - \frac{Gm_1m_3\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3} = -\frac{Gm_1}{R^3}\left[m_2\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + m_3\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)\right] =$$
$$= -\frac{Gm_1}{R^3}\left[(m_1 + m_2 + m_3)\,\vec{r}_1 - (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3)\right] = -\frac{Gm_1M}{R^3}\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_\text{c}),$$

где $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ и $\vec{r}_3$ — положения первой, второй и третьей звёзд,

$$\vec{r}_\text{c} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{M}$$

— положение центра масс системы,

$$M = m_1 + m_2 + m_3$$

— масса системы, G — гравитационная постоянная. Такая сила придаёт первой звезде ускорение $\vec{a}_1 = \vec{F}_1/m_1 = -GM\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_\text{c})/R^3$, которое лежит в плоскости треугольника, образованного звёздами, и направлено к центру масс системы. Аналогично рассчитываются ускорения для второй и третьей звёзд:

$$\vec{a}_i = -\frac{GM}{R^3}\,(\vec{r}_i - \vec{r}_\text{c}),$$

где $i = 2,\,3$.

Ускорения $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ пропорциональны удалённостям звёзд $\vec{r}_i - \vec{r}_\text{c}$ от центра масс $\vec{r}_\text{c}$ и поэтому совпадают с центростремительными ускорениями $-\omega^2\,(\vec{r}_i - \vec{r}_0)$ по величине и направлению, если система вращается относительно центра масс ($\vec{r}_0 = \vec{r}_\text{c}$) в начальной плоскости трёх звёзд с угловой скоростью

$$\omega = \sqrt{GM/R^3}.$$

Таким образом, частным решением задачи является закрутка звёзд с указанной выше угловой скоростью относительно оси, проходящей центр масс системы (точку $\vec{r}_\text{c}$) перпендикулярно плоскости начального треугольника звёзд.

Систему можно закручивать не только относительно оси, проходящей через центр масс, а и относительно любой оси, перпендикулярной плоскости начального треугольника звёзд (но с той же угловой скоростью $\omega = \sqrt{GM/R^3}$). При таком запуске центр масс системы будет двигаться равномерно и прямолинейно, а звёзды будут вращаться относительно центра масс с угловой скоростью ω. Вместе с тем звёздам можно придать одинаковые дополнительные начальные скорости перпендикулярно плоскости начального треугольника.

б) В Солнечной системе правильный треугольник образуют Солнце, Юпитер и так называемые астероиды «греки», которые движутся за Юпитером. Другая группа астероидов «троянцы» движутся впереди Юпитера и также образуют правильный треугольник Солнце—Юпитер—«троянцы». По сути астероиды движутся в гравитационном поле Солнца и Юпитера.

3. От 0,59 до 1,11 а. е. Орбита Венеры попадает в зону обитаемости, а Марса — нет.

Выберем сферу с центром на Солнце и с радиусом, равным радиусу орбиты гипотетической планеты. Через сферу проходит поток излучения, равный светимости Солнца $L_\odot$. Соответственно, через единицу поверхности сферы проходит поток излучения $f = L_\odot/S = L_\odot/(C_{\text{sph}}R^2)$, где $S = C_{\text{sph}}R^2$ — площадь поверхности сферы, пропорциональная квадрату её радиуса R; C_{sph} — константа (4π), не зависящая от R. Планета перехватывает поток солнечного излучения $F_{\text{inc}} = fs_\perp = f\,(C_\perp r^2) = L_\odot C_\perp r^2/(C_{\text{sph}}R^2)$, который проходит через её поперечное сечение $s_\perp = C_\perp r^2$, пропорциональное квадрату радиуса планеты r; здесь $C_\perp$ — константа (π), которая не зависит от r. В свою очередь, потери планеты на собственное тепловое излучение в космос пропорциональны её площади $s = C_{\text{sph}}r^2$ и составляют величину $F_{\text{out}} = Js = \text{const}\,T^4C_{\text{sph}}r^2$. Баланс потоков падающего и исходящего излучений ($F_{\text{inc}} = F_{\text{out}}$) выражается в виде равенства $L_\odot C_\perp r^2/(C_{\text{sph}}R^2) = \text{const}\,T^4C_{\text{sph}}r^2$ и определяет температуру планеты $T = C/\sqrt{R}$, где константа $C = (L_\odot C_\perp/C_{\text{sph}}^2)^{1/4}$ не зависит от радиуса планеты и её расстояния до Солнца. Константа C может быть выражена через температуру Земли $T_{\text{E}} = 273 + 14$ К $= 287$ К и радиус $R_{\text{E}} = 1$ а. е. её орбиты: $C = T_{\text{E}}\sqrt{R_{\text{E}}}$.

Внутренняя граница зоны обитаемости соответствует орбите, где закипает вода и температура $T_{\text{in}} = 273 + 100$ К $= 373$ К, что определяет минимальный допустимый радиус орбиты планеты $R_{\text{in}} = C^2/T_{\text{in}}^2 = R_{\text{E}}\,T_{\text{E}}^2/T_{\text{in}}^2 = 287^2/373^2$ а. е. $= 0{,}59$ а. е. На внешней границе зоны обитаемости вода замерзает (температура $T_{\text{out}} = 273$ К), чему соответствует максимальное допустимое расстояние до Солнца $R_{\text{out}} = R_{\text{E}}\,T_{\text{E}}^2/T_{\text{out}}^2 = 287^2/273^2$ а. е. $= 1{,}11$ а. е.

Таким образом, орбита Венеры попадает в зону обитаемости, а Марса — нет. На Марсе вода замерзает.

4. 9,7 млрд. лет.

Суммарная энергия тёмного вещества во «всей» Вселенной остаётся постоянной при расширении. В свою очередь, количество тёмной энергии пропорционально «объёму» Вселенной. В настоящее время количество тёмной энергии превышает энергию тёмного вещества в $\eta = (75\,\%)/(25\,\%) = 3$ раза. Поэтому количество тёмной энергии было равно энергии тёмного вещества, когда «объём» Вселенной был в η раз меньше. Поскольку «объём» Вселенной пропорционален кубу её радиуса, то радиус должен быть в $\eta^{1/3} = 3^{1/3} \approx 1{,}44$ раз меньше. В свою очередь, радиус Вселенной пропорционален её возрасту. Следовательно, равенство энергий достигалось, когда Вселенная была в $\eta^{1/3}$ раз «моложе» и её возраст составлял 14 млрд. лет$/(\eta^{1/3}) = 9{,}7$ млрд. лет.

Условия и решение задач
Открытой городской олимпиады по астрономии, астрофизике
и физике космоса им. Михаила Адольфовича Миллера
02 февраля 2014 г.

8–9 классы

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Самая яркая звезда, видимая в феврале в Нижегородской области:
1) Арктур;
2) Бетельгейзе;
3) Вега;
4) Сириус?

б) Земля находится ближе всего к Солнцу:
1) зимой;
2) весной;
3) летом;
4) осенью?

в) Времена года наиболее резко отличаются:
1) на Меркурии;
2) на Венере;
3) на Земле?

г) Какая из муз покровительствует астрономии:
1) Каллиопа;
2) Клио;
3) Терпсихора;
4) Урания?

д) Когда нижегородцы движутся быстрее вокруг Солнца:
1) утром;
2) днём;
3) вечером;
4) ночью?

е) Первая женщина-космонавт, вышедшая в открытый космос:
1) Салли Райд;
2) Светлана Савицкая;
3) Кэтрин Салливан;
4) Валентина Терешкова?

ж) На каком из спутников установлен рентгеновский телескоп:
1) Гершель; 2) Интеграл; 3) Спитцер; 4) Хаббл?

2. Две космические экспедиции высадились на планету Тигуан на одинаковых зондах и обнаружили, что кто-то частично похитил их топливо, и они не могут покинуть планету по-отдельности. На первом зонде не хватает 6 брикетов горючего, а на втором — 1 брикета. Тогда они решили объединить горючее и взлететь на одном зонде. Но у них всё равно это не получилось. Каково минимальное количество брикетов, при котором зонд может покинуть планету?

3. Сила тяжести на Луне всего в 6 раз меньше земного значения. Однако давление воздуха на Луне меньше земного не в 6, а в существенно большее число раз. Объясните настолько резкое уменьшение давления.

4. Во время солнечного затмения на экваторе была сплошная облачность. Поэтому над головой наблюдателя по облакам пробежала тень Луны: будто сверху закрылась «шторка». С какой скоростью двигалась эта шторка? Радиус орбиты Луны 380 000 км, длина земного экватора 40 000 км. Длина окружности с радиусом r равна $2\pi r$, где $\pi \approx 3{,}14$.

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Если Земля поменяет направление движения вокруг Солнца, то сутки:
   1) уменьшатся на 8 минут;
   2) уменьшатся на 4 минуты;
   3) увеличатся на 4 минуты;
   4) увеличатся на 8 минут?

б) По какому созвездию проходит годовой путь Солнца на небе:
   1) Большая Медведица;
   2) Возничий;
   3) Волопас;
   4) Змееносец?

в) Если на фотоснимке неба север указан сверху, то восток отмечен:
   1) справа;
   2) внизу;
   3) слева?

г) Полярную звезду можно увидеть севернее:
   1) Северного полярного круга;
   2) Северного тропика;
   3) экватора;
   4) Южного тропика?

д) Полная Луна восходит:
   1) в 6 утра;
   2) в полдень;
   3) в 6 вечера;
   4) в полночь?

е) Греками и троянцами в Солнечной системе называют:
   1) астероиды на орбите Юпитера;
   2) метеорные потоки;
   3) кольца Сатурна?

ж) Магнитные бури на Земле обусловлены:
   1) гравитационными волнами в ионосфере; 2) солнечным ветром;
   3) антициклонами в атмосфере; 4) электрическими токами в Земле?

2. Межпланетный аппарат запускается к карликовой планете Церера в поясе астероидов, которая находится на расстоянии 2,8 а. е. от Солнца. Ближайшая к Солнцу точка орбиты аппарата (перигелий) находится на Земле, а точка наибольшего удаления (афелий) — на Церере. Сколько времени займёт такой полёт к карликовой планете?

3. На олимпиаде в Сочи фигуристы будут выполнять прыжки в 4 оборота. Сколько оборотов могли бы совершить фигуристы в прыжке, если бы олимпиада проводилась на Луне? На крытом лунном катке поддерживается земное давление воздуха для нормального дыхания. Ускорение свободного падения на Луне в 6 раз меньше земного.

4. Автоматическая межпланетная станция фотографирует Плутон в двух точках своей траектории. Вторая точка удалена от Плутона в два раза дальше, чем первая. Как необходимо изменить время выдержки фотографии, чтобы во второй точке получить изображение с тем же контрастом Плутона на фоне неба, что и в первой точке?

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Луна находилась в наивысшей точке над горизонтом ровно в полночь с субботы на воскресенье. Тогда предыдущая кульминация была:
   1) в пятницу;
   2) в субботу;
   3) в воскресенье;
   4) в понедельник?

б) Радиолокатор принимает сигнал, отражённый от пролетающего вблизи Земли астероида, через 0,667 с после его излучения. Тогда расстояние до астероида:
   1) 50 тыс. км;
   2) 100 тыс. км;
   3) 200 тыс. км?

в) При излучении гравитационных волн двойной звёздной системой скорость вращения звёзд:
   1) увеличивается;
   2) уменьшается;
   3) остаётся неизменной?

г) За счёт энергии гравитационного сжатия светит:
   1) протозвезда;
   2) Солнце;
   3) белый карлик;
   4) нейтронная звезда?

д) Реликтовым называют излучение:
   1) далёких звёзд;
   2) далёких галактик;
   3) оставшееся от Большого взрыва?

е) Внутри космического корабля выполняются:
   1) закон Паскаля и закон Архимеда;
   2) только закон Паскаля;
   3) только закон Архимеда?

ж) Космологическим красным смещением называют:
   1) видимое покраснение звёзд из-за рассеяния на межзвёздной пыли;
   2) увеличение длины волны света при распространении от чёрной дыры;
   3) увеличение длины волны света из-за расширения вместе со Вселенной?

2. В экспедиции Gemini 11 1966 года два околоземных космических корабля с массой 3,5 т каждый были соединены между собой тросом с длиной 30 м. Такое соединение стабилизировало движение кораблей строго друг над другом. Найдите силу натяжения троса в эксперименте. Радиус Земли 6400 км.

3. Двойная система состоит из одинаковых белых карликов с массой 0,5 массы Солнца каждый, которые вращаются на постоянном расстоянии 1 а. е. относительно друг от друга. Определите период гравитационных волн, испускаемых такой системой.

4. Оцените кинетическую энергию E частицы космических лучей, которая может удерживаться в нашей Галактике межзвёздным магнитным полем с индукцией 10^{-10} Тл. Диаметр Галактики принять равным 90 тыс. световых лет. Энергия $E = pc$ релятивистской частицы пропорциональна её импульсу p и скорости света $c = 300\,000$ км/с. Электрический заряд частицы считать равным элементарному заряду $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Ответ выразите в электронвольтах: 1 эВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

1. а) 4) Сириус.
б) 1) Зимой.
в) 3) На Земле.
г) 4) Урания.
д) 4) Ночью.
е) 2) Светлана Савицкая.
ж) 2) Интеграл.

2. 6 брикетов.

На втором зонде не хватало одного брикета горючего. Поэтому если бы на первом зонде остался хотя бы один брикет, то его было достаточно для взлёта второго зонда. Следовательно, на первом зонде не осталось ни одного брикета. По условию задачи первому зонду требовались 6 брикетов для взлёта. Таким образом, именно на 6 брикетах экспедиции могли бы покинуть планету.

3. Уменьшение силы тяжести (и ещё радиуса тела при той же силе тяжести) уменьшают вторую космическую скорость, так что молекулы покидают космическое тело.

4. 530 м/с.

Тень от Луны перемещается по облакам также, как тень от высоко летящего самолёта. Следовательно, скорость тени совпадает со скоростью Луны-самолёта за вычетом скорости земной поверхности вместе с облаками под этим «самолётом». Длина орбиты Луны составляет $2\pi \cdot 380\,000$ км $\approx 2{,}39 \cdot 10^6$ км, и спутник проходит это расстояние примерно за 4 недели $= 4 \cdot 7 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \approx 2{,}42 \cdot 10^6$ с. Поэтому скорость Луны-самолёта

$$v_{\text{Л}} = \frac{2{,}39 \cdot 10^6 \text{ км}}{2{,}42 \cdot 10^6 \text{ с}} = 0{,}99 \text{ км/с}.$$

В свою очередь, земная поверхность движется в своём суточном вращении в ту же сторону с запада на восток, что и тень Луны, совершает полный оборот в длину экватора 40 000 км за одни сутки и поэтому перемещается со скоростью

$$v_{\text{З}} = \frac{40\,000 \text{ км}}{24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ с}} \approx 0{,}46 \text{ км/с}.$$

Получаем искомую скорость движения тени по облакам

$$v_{\text{т}} = v_{\text{Л}} - v_{\text{З}} = 0{,}53 \text{ км/с} = 530 \text{ м/с}.$$

Скорость тени превышает скорость звука 330 м/с примерно в полтора раза. Таким образом, тень Луны перемещается по облакам с запада на восток как сверхзвуковой самолёт (с так называемым числом Маха 1,5).

Решение задач 10 класса

1. а) 1) Уменьшатся на 8 минут.
б) 4) Змееносец.
в) 3) Слева.
г) 3) Севернее экватора
д) 3) В 6 вечера
е) 1) Астероиды на орбите Юпитера.
ж) 2) Солнечным ветром.

2. 1,3 года.

После разгона на Земле аппарат летит с выключенными двигателями, поэтому его траектория представляет собой «половину» замкнутого эллипса (в соответствии с первым законом Кеплера). Большая ось этого эллипса начинается в точке старта на Земле, проходит через Солнце (фокус эллипса) и заканчивается в точке посадки на Церере. Таким образом, длина $2a$ большой оси эллиптической траектории равна сумме расстояний $R_З = 1$ а. е. и $R_Ц = 2{,}8$ а. е. от Солнца до Земли и Цереры соответственно:

$$2a = R_З + R_Ц = 3{,}8 \text{ а. е.}$$

Полный оборот по замкнутому эллипсу любое тело совершало бы за время $2T$, которое связано третьим законом Кеплера с периодом обращения 1 год Земли по своей орбите:

$$\left(\frac{2T}{1 \text{ год}}\right)^2 = \left(\frac{2a}{2R_З}\right)^3.$$

Искомое время полёта составляет половину периода обращения по замкнутому эллипсу:

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{2R_З}\right)^{3/2} \text{ лет} = \frac{(3{,}8/2)^{3/2}}{2} \text{ лет} = 1{,}3 \text{ года.}$$

3. Больше 24 оборотов (примерно 34).

Число оборотов в прыжке определяется скоростью вращения в момент отрыва от льда и длительностью полёта в прыжке.

Скорость вращения, по-видимому, не связана принципиально с силой тяжести и определяется мускульной силой спортсмена. Спортсмен поворачивает своё тело относительно ступни и лезвия на льду в сторону вращения в прыжке, а лёд препятствует вращению лезвия (или смещению зубца коньков) в противоположном направлении. В итоге закручивающей внешней силой становится неоднородная реакция льда поперёк лезвия конька в так называемых рёберных прыжках и реакция льда на «воткнутый» в лёд зубец в зубцовых прыжках.

Длительность полёта $t = 2v/g$ прямо пропорциональна начальной вертикальной скорости v спортсмена и обратно пропорциональна ускорению свободного падения g. Вертикальная скорость возникает, например, за счёт выпрямления обеих ног (или одной ноги, а также вспомогательных разгибания тела из согнутого положения, махов свободной ноги и рук): во всех случаях нормальная реакция льда P увеличивается выше силы тяжести mg, где m — масса спортсмена. На практике можно видеть, что толчок и последующий полёт до наивысшей точки в прыжке длятся по порядку величины одинаковое время: реакция льда придаёт начальную вертикальную скорость за то же характерное время, за которое потом сила тяжести тормозит спортсмена на пути до вершины прыжка. Это свидетельствует о том, что нормальная реакция льда превышает силу тяжести в течение толчка примерно на величину той же силы тяжести. Последняя оценка соответствует тому, что спортсмен может приседать со штангой на плечах с массой порядка массы спортсмена.

Характерное вертикальное ускорение центра масс фигуриста в течение толчка составляет $a = (P - mg)/m$. За время толчка (выпрямления ног) центр масс поднимается на фиксированную высоту h порядка половины длины бедра. Поскольку высота $h = a\tau^2/2$, то характерная длительность толчка $\tau = \sqrt{2h/a}$ и приобретаемая вертикальная скорость $v = a\tau = \sqrt{2ha} \propto \sqrt{P/m - g}$. Полагаем, что выпрямлением ног спортсмен способен создать одинаковый вес $P = \alpha m g_З$ на Луне и Земле, где постоянная $\alpha = 1 \div 2$, $g_З$ — ускорение свободного падения на Земле. Тогда вертикальная скорость на Луне после толчка $v_Л$ превышает аналогичную скорость на Земле $v_З$ в

$$\frac{v_Л}{v_З} = \frac{\sqrt{\alpha g_З - g_Л}}{\sqrt{(\alpha - 1)\, g_З}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^{-1}}} \text{ раз}$$

(здесь $g_Л$ — ускорение свободного падения на Луне).

Длительность полёта в прыжке $t = 2v/g$ возрастает на Луне примерно в $(g_З/g_Л)/\sqrt{1 - \alpha^{-1}} = 6/\sqrt{1 - \alpha^{-1}} > 6$ раз. Поэтому максимальное возможное число оборотов в прыжке на Луне превышает $4 \cdot 6 = 24$. Для прыжков с максимальным возможным числом оборотов фактор α достигает характерного значения 2. Поэтому максимальное возможное число оборотов в прыжке оцениваем как $4 \times 6\sqrt{2} \approx 34$.

О биомеханике прыжков см. А. Н. Мишин «Биомеханика движений фигуриста» и «Прыжки в фигурном катании»: www.tulup.ru/articles/294/analiz_tehniki_pryzhkov.html и www.tulup.ru/articles/32/tolchok.html

4. Оставить выдержку неизменной.

Контраст изображения определяется энергией излучения, которая приходит на один светочувствительный элемент приёмника (например, один пиксел цифровой матрицы).

Через любую замкнутую сферу, окружающую Плутон, проходит одинаковый поток энергии излучения F. Поэтому на все светочувствительные элементы через объектив поступает поток энергии $f = F\,(\sigma/S) \propto 1/R^2$, который определяется площадью объектива σ и уменьшается обратно пропорционально площади сферы S, а следовательно — квадрату расстояния R до Плутона.

В свою очередь, радиус изображения Плутона уменьшается обратно пропорционально R, а площадь изображения — обратно пропорционально R^2. Таким образом, число светочувствительных элементов, в пределах изображения Плутона, уменьшается также, как и суммарный поток f, фокусируемый на эти элементы объективом. Следовательно, на один светочувствительный элемент в пределах изображения Плутона попадает одинаковый поток энергии независимо от расстояния до космического тела. В таком случае выдержку необходимо оставлять неизменной, чтобы один светочувствительный элемент засвечивался до одного и того же уровня на разных расстояниях до Плутона.

1. а) 1) В пятницу (ближайшую).
б) 2) 100 тыс. км.
в) 1) Увеличивается.
г) 1) Протозвезда.
д) 3) Оставшееся от Большого взрыва.
е) 2) Только закон Паскаля.
ж) 3) увеличение длины волны света из-за расширения вместе со Вселенной.

2. 0,24 Н.

В отсутствие троса корабль на более низкой орбите опережал бы соседний корабль (по аналогии с Солнечной системой, где более близкая к Солнцу планета опережает в своём орбитальном движении более далёкую планету). Трос препятствует расхождению кораблей и подтягивает их до положения друг над другом. Корабли движутся по своим круговым орбитам с радиусами $R + l/2$ и $R - l/2$ под действием силы тяжести и силы натяжения троса T. Здесь l — длина троса, R — радиус орбиты центра троса. Центростремительные ускорения аппаратов $\omega^2\,(R + l/2)$ и $\omega^2\,(R - l/2)$ подчиняются 2-му закону Ньютона:

$$\omega^2\,(R + l/2) = \frac{GM}{(R + l/2)^2} + T/m; \quad \omega^2\,(R - l/2) = \frac{GM}{(R - l/2)^2} - T/m,$$

где m — масса корабля, M — масса Земли, G — гравитационная постоянная. Сложение уравнений даёт квадрат угловой скорости обращения системы вокруг Земли:

$$\omega^2 = \frac{GM\,(R^2 + l^2/4)}{R\,(R^2 - l^2/4)^2} \approx \frac{GM}{R^3} \approx \frac{g}{R_З},$$

где $g = GM/R_З^2$ — ускорение свободного падения на поверхности Земли, $R_З$ — радиус Земли. Разность уравнений движения определяет искомую силу натяжения троса:

$$T = \frac{m\omega^2 l}{2} + \frac{GMmlR}{(R^2 - l^2/4)^2} \approx \frac{mgl}{2R_З} + \frac{mgl}{R_З} = \frac{3l}{2R_З}\,mg = 0{,}24\ \text{Н}.$$

Полученная сила натяжения равна силе тяжести груза с массой 24 г на поверхности Земли. Такая сила не вытягивает трос в прямую линию, что и наблюдалось на орбите.

3. Половина земного года.

Белые карлики вращаются по круговым орбитам с радиусом $r = R/2$ вокруг общего центра масс, который расположен по середине между ними ($R = 1$ а. е.). Сила гравитационного взаимодействия звёзд Gm^2/R^2 определяет центростремительное ускорение каждой звезды:

$$\omega^2 r = \frac{Gm}{R^2}$$

и период обращения вокруг центра масс

$$t = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{Gm/(rR^2)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2Gm/R^3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM/R^3}},$$

где $M = 2m$ — суммарная масса звёздной системы, равная массе Солнца, G — гравитационная постоянная. В свою очередь, выражение для периода обращения Земли вокруг Солнца имеет тот же вид, что и для найденного времени t, с теми же численными значениями. Поэтому период обращения белых карликов равен 1 земному году.

Излучение гравитационных волн определяется изменением распределения масс в системе. Соответственно, период излучения совпадает с временем, через которое распределение масс возвращается в одно и то же состояние. Для одинаковых звёзд распределение масс повторяется через половину периода обращения системы (звёзды меняются местами, а распределение масс не меняется). Поэтому период излучаемых гравитационных волн равен половине года.

Для звёзд с разными массами период гравитационных волн остаётся равным половине периода обращения звёздной системы. Это объясняется тем, что каждая звезда излучает гравитационную волну, напряжённость которой пропорциональна массе и ускорению звезды, т. е. внешней силе. По третьему закону Ньютона эти силы в сумме равны нулю для замкнутой системы. Поэтому так называемое дипольное излучение гравитационных волн на основной частоте вращения системы отсутствует (взаимно компенсируется от разных звёзд в системе). Излучение возникает на гармониках основной частоты вращения начиная со второй, т. е. на половине периода вращения звёздной системы.

4. Меньше $1{,}3 \cdot 10^{19}$ эВ.

Если частица с зарядом e движется со скоростью v поперёк магнитного поля с индукцией B, то на неё действует сила Лоренца $F = evB$. Сила Лоренца направлена перпендикулярно скорости частицы, как центростремительное ускорение. Поэтому частица движется по окружности (с так называемым ларморовским радиусом). Изменение импульса частицы $\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$ направлено к центру окружности и равно ωp (по аналогии с центростремительным ускорением $a = \omega v$), где ω — круговая частота вращения по окружности (так называемая гирочастота). Согласно второму закону Ньютона

$$\omega p = evB,$$

что определяет гирочастоту $\omega = evB/p$ и ларморовский радиус

$$r = \frac{v}{\omega} = \frac{p}{eB}.$$

Межзвёздное магнитное поле удерживает частицу в Галактике, если диаметр ларморовской окружности $2r$ меньше диаметра Галактики D. Поэтому в Галактике удерживаются частицы с энергией

$$E \equiv pc < eBDc/2.$$

Подставляем в последнее неравенство диаметр Галактики в виде $D = ct$, где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света, а $t = 9 \cdot 10^4$ лет $= 9 \cdot 10^4 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600$ с $= 2{,}8 \cdot 10^{12}$ с, и выражаем энергию в электрон-вольтах $\mathcal{E}[\text{эВ}] = E[\text{Дж}]/e[\text{Кл}]$, получаем максимальную энергию удерживаемых частиц

$$\mathcal{E}_{\max}[\text{эВ}] = B[\text{Тл}] \cdot (c[\text{м/с}])^2 \cdot t[\text{с}]/2 = 10^{-10} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \cdot (2{,}8 \cdot 10^{12})/2 = 1{,}3 \cdot 10^{19}.$$

Эта величина приходится на так называемую «лодыжку» в распределении космических лучей по энергии (но не является её причиной). Частицы с меньшей энергией существенно отклоняются магнитным полем Галактики и направление их прихода на Землю не совпадает с направлением на источник (если источник внегалактический).

Условия и решение задач
Открытой городской олимпиады по астрономии, астрофизике и физике космоса им. Виктора Юрьевича Трахтенгерца
01 февраля 2015 г.

8–9 классы

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Генеральный конструктор ракеты для первого искусственного спутника Земли:
   1) Армстронг;
   2) Браун;
   3) Королёв;
   4) Циолковский?

б) Система Николая Коперника впервые утверждала:
   1) Земля вращается вокруг своей оси;
   2) Луна вращается вокруг Земли;
   3) Земля вращается вокруг Солнца;
   4) Звёзды удаляются от нас?

в) Ось вращения Земли направлена на:
   1) центр Солнечной системы;
   2) Полярную звезду;
   3) созвездие Большая Медведица;
   4) текущее зодиакальное созвездие?

г) Характерная толщина атмосферы Земли по сравнению с высотой горы Эверест:
   1) того же порядка величины;
   2) существенно больше;
   3) существенно меньше?

д) Эклиптикой называют:
   1) инструмент для измерения склонений звёзд;
   2) календарь лунных затмений;
   3) нашу Галактику;
   4) путь Солнца относительно звёзд на небе?

е) Граница день—ночь движется по экватору Земли:
   1) быстрее скорости звука;
   2) медленнее скорости звука;
   3) быстрее первой космической скорости;
   4) со скоростью света?

ж) Первое кругосветное путешествие совершили:
   1) в 20 веке; 2) в средние века—Новое время;
   3) во времена Римской империи; 4) во времена Древней Греции?

2. Оцените толщину так называемого земного терминатора — переходной области от освещённой к неосвещённой стороне планеты, если угловой диаметр Солнца 0,5 градуса, а длина земного экватора 40 000 км (рефракцией солнечных лучей в атмосфере пренебречь).

3. Во сколько раз Венера ближе к Солнцу, чем Земля, если максимальное угловое расстояние на небе между Солнцем и Венерой достигает 47°?

4. Космический корабль летит с выключенными двигателями в далёком космосе. Радиолокаторы обнаруживают, что к кораблю приближается астероид со скоростью v. Неожиданно на расстоянии l от корабля астероид разрывается на множество осколков, которые разлетаются со скоростью u относительно своего центра масс. С каким минимальным постоянным ускорением a должен начать удаляться корабль от места взрыва, чтобы уклониться от осколков?

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Полная Луна в Нижегородской области в зимнюю полночь находится (по сравнению с летней полночью):
   1) выше над горизонтом;
   2) ниже над горизонтом;
   3) на той же высоте над горизонтом;
   4) может быть и ниже и выше?

б) Международная космическая станция обращается вокруг Земли по сравнению с первым искусственным спутником примерно:
   1) в 1,3 раза быстрее;
   2) в 1,3 раза медленнее;
   3) с той же скоростью?

в) Первый человек был поднят в космос ракетой:
   1) Ангара;
   2) Восток;
   3) Восход;
   4) Прогресс?

г) Что такое экзопланета:
   1) малая планета;
   2) планета-гигант;
   3) планета за поясом астероидов;
   4) планета у другой звезды (не Солнца)?

д) Ядра железа на Земле образовались:
   1) в начале жизни Вселенной;
   2) при взрывах сверхновых;
   3) при образовании Солнца;
   4) при формировании Земли?

е) Телевизионные спутники с круговыми орбитами находятся на высоте:
   1) 400 км;
   2) 40 000 км;
   3) на орбите Луны;
   4) на самых разных высотах?

ж) Солнце излучает за счёт:
   1) гравитационного сжатия; 2) запасённой тепловой энергии;
   3) рекомбинации атомов водорода в молекулы;
   4) синтеза ядер химических элементов?

2. На какое наибольшее расстояние уходит комета Галлея от Солнца (в астрономических единицах), если она движется по сильно вытянутой орбите? Комета возвращается к Солнцу каждые 76 лет.

3. а) Определите кинетическую энергию $w_{\text{кин}}$, приходящуюся на 1 кг материала спускаемого аппарата, который начинает спуск на Землю с первой космической скоростью 8 км/с. б) Покажите, что найденная величина превышает энергию $w_{\text{исп}}$, которая требуется на последовательный нагрев, плавление и даже испарение 1 кг железа. Для оценок примите теплоёмкость железа $c = 0{,}44$ кДж/(кг·К) одинаковой для любого агрегатного состояния и температуры; температура плавления $T_{\text{пл}} = 1\,800$ К, теплота плавления $c_{\text{пл}} = 250$ кДж/кг; температура кипения $T_{\text{исп}} = 3\,100$ К, теплота испарения $c_{\text{исп}} = 6\,100$ кДж/кг. в) Укажите, в какую форму энергии и какого вещества переходит кинетическая энергия аппарата за время спуска на Землю.

4. Когда космонавты долетят до Марса, смогут ли они увидеть без телескопа нашу Луну? Наблюдения проводятся в момент наибольшего углового расстояния между Землёй и Солнцем на небе Марса; радиус орбиты Марса 1,5 а. е. (1 а. е. = 150 млн км); радиус орбиты Луны 380 тыс. км; видимая звёздная величина полной Луны на Земле $m_{\text{ЛЗ}} = -12{,}5^{\text{m}}$; Луна в полнолуние в 13 раз ярче, чем в первой четверти. Человек видит невооружённым глазом звёзды до величины 6^{m}, угловое разрешение глаза около $1'$.

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Планеты движутся вокруг Солнца по эллипсам так, что светило находится:
1) в центре эллипса;
2) на большой оси эллипса;
3) на малой оси эллипса;
4) в фокусе эллипса?

б) Во Вселенной электронов по сравнению с протонами:
1) существенно меньше;
2) почти одинаковое количество;
3) примерно на 6 % больше;
4) существенно больше?

в) Рентгеновское излучение от Солнца не наблюдается на поверхности Земли, поскольку рентгеновские лучи:
1) отражает назад корона Солнца;
2) поглощает межпланетная пыль;
3) отклоняет магнитное поле Земли;
4) поглощает атмосфера Земли?

г) Зонд «Розетта» обращался бы вокруг кометы Чурюмова—Герасименко, если бы его скорость была порядка:
1) 1 см/с;
2) 1 м/с;
3) 100 м/с;
4) 8 км/с?

д) Излучение Земли сосредоточено в диапазоне:
1) рентгеновском;
2) оптическом;
3) инфракрасном;
4) Земля ничего не излучает?

е) Какие звёзды живут всех меньше на главной последовательности:
1) самые тяжёлые;
2) наименее яркие;
3) звёзды типа Солнца;
4) все звёзды живут примерно одинаково?

ж) Что такое квазар:
1) двойная звезда с мощным рентгеновским излучением;
2) нейтронная звезда с мощными радиоизлучением;
3) активное ядро удалённой галактики; 4) крупное шаровое скопление?

2. Оцените максимальную массу и диаметр метеороида, который будет почти остановлен атмосферой Земли до падения на нашу планету. Плотность вещества метеороида 3 г/см^3, плотность воздуха 1,3 кг/м^3, приведённая высота атмосферы Земли 9 км.

3. Согласно современным представлениям наша галактика Млечный Путь погружена в облако тёмной материи, радиус которого много больше размера видимой составляющей Галактики. Оцените массу тёмной материи внутри видимой части Млечного Пути с радиусом порядка 50 тыс. световых лет, если звёзды на периферии Галактики движутся примерно с той же скоростью 250 км/с, что и Солнце, которое находится примерно на половине радиуса видимой части Галактики, т. е. 25 тыс. световых лет. При этом основная масса звёзд и газа сосредоточена в центральной части Галактики, радиус которой около 10 тыс. световых лет, и составляет 10^{12} масс Солнца.

4. Оцените минимальный диаметр сферического металлического спутника, который можно заметить невооружённым глазом на орбите с высотой 400 км. Видимая звёздная величина Солнца на Земле $m_{\odot} = -26{,}7^{\mathrm{m}}$, человек видит звёзды до 6^{m}.

Справочные формулы для решения задач: площадь окружности с радиусом r равна πr^2, площадь сферы с тем же радиусом — $4\pi r^2$, объём шара — $4\pi r^3/3$.

1. а) 3) Королёв.
б) 3) Земля вращается вокруг Солнца.
в) 2) Полярную звезду.
г) 1) Того же порядка величины.
д) 4) Путь Солнца относительно звёзд на небе.
е) 1) Быстрее скорости звука.
ж) 2) В средние века—Новое время.

2. 56 км.

Рассмотрим некоторую неподвижную относительно Земли точку на экваторе. Вечером эта точка, вращаясь вместе с Землёй, переходит сквозь неподвижный относительно Солнца терминатор из освещённой области в неосвещённую. Переход сквозь терминатор соответствует последовательному касанию Солнцем горизонта, закату и исчезновению Солнца за горизонтом. За время захода Солнце проходит по небосводу расстояние, равное своему угловому диаметру 0,5°. Но это видимое перемещение Солнца вызвано поворотом Земли вокруг своей оси на тот же угол 0,5°. Таким образом, прохождение выбранной точки на экваторе сквозь неподвижный относительно Солнца терминатор соответствует повороту Земли на 0,5°, что и определяет его толщину по долготе. Длина экватора 40 000 км соответствует повороту Земли на 360°, так что толщина терминатора составляет $40\,000$ км $\cdot\ (0{,}5°/360°) = 56$ км.

3. В $1/\sin(47°) \approx 1{,}37$ раза.

При движении Венеры по орбите вокруг Солнца луч зрения на планету максимально отклоняется от светила, когда он становится касательной к орбите. В такой конфигурации луч зрения Земля—Венера перпендикулярен отрезку Солнце—Венера. Соответственно указанные отрезки Земля—Венера и Солнце—Венера образуют катеты в прямоугольном треугольнике, а гипотенуза — отрезок Солнце—Земля. Тогда отношение катета Солнце—Венера к гипотенузе Солнце—Земля равно синусу угла 47° между Солнцем и Венерой. Искомое отношение расстояний Солнце—Земля и Солнце—Венера равно $1/\sin(47°) \approx 1{,}37$.

4. $(v + u)^2/(2l)$.

Рассмотрим движение осколков астероида относительно корабля. В момент взрыва непосредственно в сторону корабля вылетают осколки с относительной скоростью $v + u$. Равноускоренное движение корабля соответствует тому, что осколки тормозятся относительно аппарата с тем же ускорением a. Но тогда движение осколков относительно корабля эквивалентно движению в однородном поле силы тяжести с ускорением свободного падения a. Следовательно, осколки «поднимаются» от точки взрыва к кораблю на максимальную высоту $(v + u)^2/(2a)$. Если эта высота меньше удалённости корабля от точки взрыва l, то осколки не долетают до аппарата. Полученное требование $(v + u)^2/(2a) < l$ определяет искомое минимальное ускорение $a_{\text{мин}} = (v + u)^2/(2l)$, необходимое для ухода корабля неповреждённым.

1. а) 1) Выше над горизонтом.
б) 3) С той же скоростью.
в) 2) Восток.
г) 4) Планета у другой звезды (не Солнца).
д) 2) При взрывах сверхновых.
е) 2) 40 000 км.
ж) 4) Синтеза ядер химических элементов.

2. $\mathbf{2 \cdot 76^{2/3}}$ **а. е.** $\boldsymbol{\approx}$ **36 а. е.**

Согласно третьему закону Кеплера, период обращения кометы 76 лет соответствует её движению по эллипсу, у которого длина большой оси превышает диаметр земной орбиты (2 а. е.) в $76^{2/3}$ раза. Поскольку комета движется по сильно вытянутому эллипсу, то полученная длина большой оси её эллиптической орбиты 2 а. е. $\cdot\, 76^{2/3} \approx 36$ а. е. приближённо совпадает с искомым наибольшим удалением (афелием) кометы. В афелии комета Галлея выходит за орбиту наиболее удалённой планеты Нептун (радиус орбиты 30 а. е.) и приближённо касается орбиты Плутона (30–49 а. е.).

3. а) $\boldsymbol{w_{\text{кин}} = 32}$ **МДж/кг.**
б) $\boldsymbol{w_{\text{кин}}/(c_{\text{исп}} + c_{\text{пл}} + cT_{\text{исп}}) \approx 4 > 1}$**.**
в) В тепловую энергию воздуха (в хаотическое движение молекул через промежуточную ионизацию воздуха и генерацию ударной звуковой волны).

а) Искомая удельная кинетическая энергия $w_{\text{кин}} = (8\text{ км/с})^2/2 = 32$ МДж/кг.

б) Наибольшая энергия требуется на испарение железа: $q_{\text{исп}} = c_{\text{исп}} = 6{,}1$ МДж/кг. На плавление железа затрачивается примерно в 25 раз меньше энергии, чем на испарение: $q_{\text{пл}} = c_{\text{пл}} = 0{,}25$ МДж/кг. На нагрев до температуры плавления и далее до температуры кипения также необходимо меньше энергии, чем на испарение, даже если нагрев производится от абсолютного нуля: $q_{\text{нагрев}} < cT_{\text{исп}} \approx 1{,}4$ МДж/кг. Таким образом, удельная кинетическая энергия $w_{\text{кин}}$ превышает энергию $q_{\text{исп}} + q_{\text{пл}} + q_{\text{нагрев}} \sim q_{\text{исп}}$ примерно в 4 раза.

в) Спускаемый аппарат тормозится до приемлемой для приземления скорости за счёт трения о воздух. Таким образом, кинетическая энергия спускаемого аппарата расходуется (преобразуется) в конечном итоге в тепловую энергию воздуха (энергию хаотического движения молекул воздуха), сквозь который пролетает спускаемый аппарат. Масса нагреваемого воздуха существенно превышает массу спутника, при этом в промежуточном состоянии воздух ионизуется (переходит в состояние плазмы), а также в нём создаётся регулярное движение в виде мощной (ударной) звуковой волны, как от гиперзвукового самолёта.

4. Смогут. Видимая звёздная величина Луны на Марсе $\mathbf{3{,}6^m < 6^m}$**, угловое расстояние между Луной и Землёй достаточно большое — примерно четверть видимого диаметра Луны на Земле.**

Когда угловое расстояние между Солнцем и Землёй на небе Марса достигает максимального значения (элонгация), луч зрения с Марса на Землю касается орбиты Земли. В такой конфигурации отрезки Солнце—Земля (1 а. е.) и Марс—Земля образуют катеты в прямоугольном треугольнике, а гипотенуза — отрезок Солнце—Марс (1,5 а. е.). Тогда по теореме Пифагора расстояние от Марса до Земли $r_{\text{МЗ}} = \sqrt{1{,}5^2 - 1^2}$ а. е. $\approx 1{,}12$ а. е. $=$ 170 млн км. Увеличение расстояния до объекта в α раз уменьшает плотность потока принимаемого излучения в α^2 раз и, следовательно, увеличивает видимую звёздную величину объекта на $2{,}5\lg(\alpha^2) = 5\lg\alpha$ магнитуды. Таким образом, увеличение расстояния до Луны от 380 тыс. км до 170 млн км увеличивает её видимую звёздную величину на $5\lg(170/0{,}38) \approx 13{,}3^{\text{m}}$.

Поскольку лучи от Солнца падают на Землю и Луну перпендикулярно лучу зрения с Марса на Землю, то Луна видна как серп в первой (или третьей) четверти (в зависимости от того, с какой из двух возможных сторон от Солнца находится Земля). Звёздная величина Луны в первой (или третьей) четверти увеличивается по сравнению с полной Луной на $2{,}5\lg 13 \approx 2{,}8^{\text{m}}$.

Таким образом, видимая звёздная величина Луны составит «земную» величину $m_{\text{ЛЗ}} = -12{,}5^{\text{m}}$, увеличенную на найденные изменения $13{,}3^{\text{m}}$ и $2{,}8^{\text{m}}$: $-12{,}5^{\text{m}} + 13{,}3^{\text{m}} + 2{,}8^{\text{m}} = 3{,}6^{\text{m}}$. Найденная звёздная величина не превышает максимальную звёздную величину 6^{m} видимых невооружённым глазом звёзд. Поэтому Луна будет видна с Марса невооружённым глазом. Найденная звёздная величина $3{,}6^{\text{m}}$ примерно соответствует яркости звезды Мегрец в точке крепления ручки к ковшу в созвездии Большая Медведица.

Угловое расстояние между Луной и Землёй составит 380 тыс. км/(170 млн км) рад $= 0{,}13^\circ$ — примерно 1/4 от видимого диаметра Луны на Земле $0{,}5^\circ$, что вполне позволяет глазу разрешить Луну и Землю как два объекта.

1. а) 4) В фокусе эллипса.
б) 2) Почти одинаковое количество.
в) 4) Поглощает атмосфера Земли.
г) 2) 1 м/с.
д) 3) Инфракрасном.
е) 1) Самые тяжёлые.
ж) 3) Активное ядро удалённой галактики.

2. $m_{\text{макс}} = 300$ т, $d_{\text{макс}} = 6$ м.

При падении на Землю метеороид сталкивается с веществом — воздухом, плотность которого существенно меньше плотности метеороида. Поэтому метеороид порождает в воздухе движение, скорость которого порядка скорости метеороида (подобно тому, как тяжёлая стенка ударяет по покоящемуся лёгкому шарику и сообщает ему удвоенную скорость своего движения). Возбуждаемое метеороидом движение представляет собой направленное движение воздуха внутри ударной волны, расходящейся от трассы метеороида, а также хаотическое (тепловое) движение молекул воздуха, которое, в свою очередь, разрушает молекулы и отрывает электроны от атомов при столкновениях частиц — переводит воздух в состояние плазмы. Поскольку скорости метеороида и создаваемого им движения в воздухе одного порядка величины, то метеороид потеряет свой импульс (и кинетическую энергию), если возбудит движение в столбе воздуха с массой порядка массы метеороида.

Полагаем, что метеороид эффективно взаимодействует с воздухом в столбе, поперечное сечение которого порядка поперечного сечения метеороида $\pi d^2/4$ (в действительности поперечное сечение столба больше). Минимальная длина трассы метеороида в атмосфере равна высоте атмосферы $h = 9$ км (при наклонном падении длина трассы увеличивается). Таким образом, метеороид передаёт движение воздуху в столбе с объёмом не меньше $V_{\text{воз}} = (\pi d^2/4)\,h$, масса которого $m_{\text{воз}} = \rho_{\text{воз}} V_{\text{воз}} = \pi \rho_{\text{воз}} d^2 h/4$, где $\rho_{\text{воз}} = 1{,}3$ кг/м^3 — плотность воздуха. Найденная масса воздуха $m_{\text{воз}}$ должна превышать массу метеороида $m_{\text{мет}} = \pi \rho_{\text{мет}} d^3/6$ для торможения тела, что даёт искомое ограничение на диаметр метеороида

$$d < d_{\text{макс}} = \frac{3}{2}\,\frac{\rho_{\text{воз}}}{\rho_{\text{мет}}}\,h = 1{,}5\,\frac{1{,}3\ \text{кг/м}^3}{3\,000\ \text{кг/м}^3}\,9\,000\ \text{м} \approx 6\ \text{м}.$$

Соответствующая максимальная масса метеороида $m_{\text{макс}} = \pi \rho_{\text{мет}} d^3_{\text{макс}}/6 \approx 300$ т.

Отметим, что начальная масса Витимского болида (событие 2002 года) оценивается порядка 160 т, а начальная масса Челябинского метеорита (событие 2013 года) — 10 тыс. т. Основная масса этих метеороидов была остановлена и сгорела в атмосфере.

3. $1{,}3 \cdot 10^{12}$ масс Солнца.

Звёзды на периферии Галактики движутся в суммарном гравитационном поле звёзд и газа центральной части Галактики с массой $M_{\text{вид}} = 10^{12} M_{\odot}$ и в поле тёмной материи с некоторой искомой массой $M_{\text{тёмн}}$ (здесь $M_{\odot}$ — масса Солнца). Соответственно, центростремительное ускорение звёзд на периферии v_{Γ}^2/r_{Γ} равно ускорению свободного падения $G\,(M_{\text{вид}} + M_{\text{тёмн}})/r_{\Gamma}^2$, создаваемого суммарной массой $M_{\text{вид}} + M_{\text{тёмн}}$ на расстоянии радиуса видимой части Галактики $r_{\Gamma} = 50$ тыс. св. лет (здесь G — гравитационная постоянная).

Тогда квадрат скорости движения периферийных звёзд определён выражением

$$v_\Gamma^2 = G\,(M_{\text{вид}} + M_{\text{тёмн}})/r_\Gamma. \qquad (1)$$

Будем считать, что тёмная материя распределена однородно на пространственном масштабе видимой части Млечного Пути. Тогда на Солнце действует тёмная материя, масса которого в $(r_\Gamma/r_\text{С})^3 = 8$ раз меньше, чем $M_{\text{тёмн}}$ (здесь $r_\text{С} = r_\Gamma/2 = 25$ тыс. св. лет — радиус орбиты Солнца). Тогда квадрат скорости движения Солнца $v_\text{С}^2$ определяется той же формулой (1), где массу тёмной материи $M_{\text{тёмн}}$ следует заменить соответствующим значением $(r_\text{С}/r_\Gamma)^3\,M_{\text{тёмн}}$, а радиус r_Γ в знаменателе — на $r_\text{С}$:

$$v_\text{С}^2 = G\,[M_{\text{вид}} + M_{\text{тёмн}}\,(r_\text{С}/r_\Gamma)^3]/r_\text{С}. \qquad (2)$$

По условию задачи скорости движения Солнца и звёзд на периферии Галактики примерно одинаковые. Поэтому приравниваем выражения (1) и (2) и находим искомую массу тёмной материи

$$M_{\text{тёмн}} = M_{\text{вид}}\,\frac{1/r_\text{С} - 1/r_\Gamma}{1/r_\Gamma - r_\text{С}^2/r_\Gamma^3} = M_{\text{вид}}\,\frac{r_\Gamma/r_\text{С} - 1}{1 - (r_\text{С}/r_\Gamma)^2} = M_{\text{вид}}\,\frac{r_\Gamma/r_\text{С}}{1 + (r_\text{С}/r_\Gamma)} = M_{\text{вид}}\,\frac{2}{1 + 1/2} \approx$$
$$\approx 1{,}3 M_{\text{вид}} = 1{,}3\cdot 10^{12} M_\odot.$$

4. 46 см.

На спутник падает солнечное излучение, поток которого $F\,(\pi d^2/4)$ определяется плотностью потока F солнечного излучения (потоком через площадку единичной площади) на орбите Земли и поперечным сечением спутника $\pi d^2/4$, где d — диаметр спутника. Упавшее на спутник излучение равномерно рассеивается во все направления и на расстоянии $h =$ 400 км плотность потока рассеянного излучения составит $F\,(\pi d^2/4)/(4\pi h^2) = F d^2/(16 h^2)$, где знаменатель $4\pi h^2$ — площадь сферы с радиусом h. Таким образом, плотность потока излучения от спутника меньше плотности потока солнечного излучения F в $16h^2/d^2$ раз. Следовательно, видимая звёздная величина спутника на $2{,}5\lg(16h^2/d^2) = 5\lg(4h/d)$ больше видимой звёздной величины Солнца $m_\odot = -26{,}7^\text{m}$. Приравниваем звёздную величину спутника $m_\odot + 5\lg(4h/d)$ максимальной звёздной величине $m_{\text{макс}} = 6^\text{m}$ объекта, видимого невооружённым глазом. Это равенство определяет искомый диаметр спутника

$$d = 4h\,10^{(m_\odot - m_{\text{макс}})/5} = 4\,(400\,000\ \text{м})\,10^{(-26{,}7-6)/5} \approx 46\ \text{см}.$$

Диаметр первого искусственного спутника Земли составляет 58 см, поэтому, в принципе, его можно было увидеть невооружённым глазом (если знать точные время и траекторию прохождения на небе).

Условия и решение задач
Открытой городской олимпиады по астрономии, астрофизике
и физике космоса им. Сергея Александровича Жевакина
24 января 2016 г.

8–9 классы

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Самая тяжёлая планета в Солнечной системе:
   1) Меркурий;
   2) Земля;
   3) Юпитер;
   4) Сатурн?

б) Какой из объектов не является спутником Юпитера:
   1) Амальтея;
   2) Европа;
   3) Лиситея;
   4) Седна?

в) В Нижегородской области полная Луна поднимается выше всего над горизонтом:
   1) зимой;
   2) весной;
   3) летом;
   4) осенью?

г) Большое Магелланово Облако — это:
   1) облако из астероидов и комет на периферии Солнечной системы;
   2) ближайшее к Земле шаровое скопление;
   3) спутник нашей Галактики;
   4) сверхскопление галактик?

д) Какое из перечисленных созвездий наименьшее по площади на небе:
   1) Большая Медведица;
   2) Кассиопея;
   3) Пегас?

е) Видимая поверхность Урана:
   1) газообразная;
   2) жидкая;
   3) твёрдая?

ж) Расстояние от Калининграда до Владивостока:
   1) меньше радиуса Земли; 2) больше радиуса, но меньше диаметра Земли;
   3) больше диаметра Земли?

2. Пусть в вашем распоряжении есть визир (неподвижный объект), позволяющий фиксировать положение небесного светила. а) Какое минимальное время необходимо наблюдать за звездой (например, в созвездии Овна или Весов) без использования увеличительной оптики, чтобы заметить её видимое смещение, если разрешающая способность человеческого глаза примерно равна 1 угловой минуте дуги? б) Какое минимальное расстояние должно быть от глаза до визира, чтобы случайные смещения лица на 1 мм не влияли на оценку времени?

3. Из каких точек на Земле можно пройти 100 км на юг, затем 100 км на восток и далее, пройдя 100 км на север, оказаться в исходной точке? Указание: таких точек существенно больше, чем одна.

4. Каковы азимуты восхода Солнца для населённого пункта на экваторе в дни: а) весеннего равноденствия; б) осеннего равноденствия; в) летнего солнцестояния; г) зимнего солнцестояния, если Полярный круг проходит по широте 66,5 градуса?

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Масса Юпитера в 1000 раз меньше массы Солнца. Во сколько раз сила притяжения Юпитером Солнца отличается от силы притяжения Солнцем Юпитера:
   1) силы одинаковы;
   2) в 1000 раз меньше;
   3) в 1000 раз больше?

б) На какие сутки после полного лунного затмения произошло бы полное солнечное затмение, если плоскости орбит Земли и Луны совпадали:
   1) 7;
   2) 15;
   3) 27;
   4) 28?

в) Возраст Солнечной системы составляет примерно:
   1) 15 млрд лет;
   2) 5 млрд лет;
   3) 500 млн лет;
   4) 6 тыс. лет?

г) Луна вращается вокруг Земли со скоростью примерно:
   1) 100 км/с;
   2) 10 км/с;
   3) 1 км/с;
   4) 100 м/с?

д) Планета Солнечной системы с наибольшим числом спутников:
   1) Нептун;
   2) Сатурн;
   3) Уран;
   4) Юпитер?

е) Расстояние от Земли до Солнца составляет примерно 8 световых:
   1) секунд;
   2) минут;
   3) часов;
   4) дней?

ж) Если сжать Солнце до размера чёрной дыры, то Земля:
   1) упадёт в чёрную дыру; 2) покинет Солнечную систему;
   3) останется на своей орбите?

2. Диаметр шарообразного ядра кометы в 10 000 раз меньше диаметра Земли, а плотность вещества кометы в 5 раз меньше средней плотности Земли. Может ли человек удержаться на этом ядре при «ходьбе» с усилиями, как на Земле? Считайте, что при разгибании стопы центр тяжести человека поднимается на 5 см. На Земле ускорение свободного падения $g_З = 10$ м/с^2, а вторая космическая скорость — 11 км/с.

3. Система отсчёта, связанная с вращающейся вокруг своей оси Землёй, представляет собой так называемую неинерциальную систему отсчёта. В этой системе Солнце обращается вокруг Земли за 1 сутки в основном под действием сил инерции: противоположно направленных друг другу силы Кориолиса и центробежной силы. При этом сила Кориолиса в 2 раза превышает центробежную силу. Во сколько раз сила Кориолиса превышает силу гравитационного притяжения между Солнцем и Землёй, если масса Солнца в 333 000 раз больше массы Земли?

4. При движении в очень разреженных слоях атмосферы метеороид испаряется за счёт абсолютно неупругих столкновений молекул воздуха с ним (при этом молекулы не налипают на поверхность метеороида). Оцените относительное изменение скорости метеороида при уменьшении его массы в 2 раза. Начальная скорость метеороида $v_0 = 40$ км/с, удельная энергия нагрева и испарения вещества метеороида $c_{исп} = 8$ МДж/кг.

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Диапазон длин волн оптического излучения простирается от 0,4 до 0,8:
   1) ангстрема;
   2) нанометра;
   3) микрометра;
   4) миллиметра?

б) В Солнечной системе самые высокие из обнаруженных гор находятся на:
   1) Венере;
   2) Весте;
   3) Ио;
   4) Марсе?

в) Если период обращения Юпитера вокруг Солнца составляет 12 лет, то среднее расстояние от Юпитера до Солнца:
   1) 5,2 а. е.;
   2) 12 а. е.;
   3) 42 а. е.?

г) Условная граница между атмосферой Земли и космосом находится на высоте:
   1) 10 км;
   2) 100 км;
   3) 400 км;
   4) 10 тыс. км?

д) Наиболее распространённый элемент в земной коре:
   1) алюминий;
   2) железо;
   3) кислород;
   4) кремний?

е) В честь кого пока не назвали космический телескоп:
   1) Кеплера;
   2) Спитцера;
   3) Хаббла;
   4) Хокинга?

ж) Ядра железа на Земле образовались:
   1) в начале жизни Вселенной;
   2) при взрывах сверхновых;
   3) при рождении Солнца?

2. В планетной системе красного карлика Глизе 581, светимость которого составляет примерно 1,3 % от солнечной величины, обнаружена планета на расстоянии 0,07 астрономических единицы. Определите температуру на поверхности этой планеты, если для Земли соответствующая температура равна 14 °C. Подогрев планеты излучением от звезды компенсируется собственным излучением планеты, поток которого с единицы поверхности пропорционален абсолютной температуре планеты в четвёртой степени и не зависит от химического состава поверхности.

3. Чёрная дыра с массой M способна излучать фотоны с характерной длиной волны λ порядка её радиуса $r_{\mathrm{g}} = GM/c^2$ (так называемое излучение Хокинга), где $G = 6{,}7 \times 10^{-11}$ м^3/(кг $\cdot$ с^2) — гравитационная постоянная, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с^2 — скорость света. Один такой фотон излучается за время порядка своего периода $1/\nu = \lambda/c$ и уносит энергию $h\nu$, в результате чего энергия чёрной дыры Mc^2 уменьшается ($h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с — постоянная Планка). Определите допустимые массы так называемых реликтовых чёрных дыр, которые появились в самом начале существования Вселенной 14 млрд лет назад и не успели испариться к настоящему времени.

4. Согласно общей теории относительности, часы в гравитационном поле идут медленнее по сравнению с часами, находящимися вне этого поля. За время T часы в точке с гра-

витационным потенциалом U отстают от удалённых часов на интервал $\Delta T = T\,|U|/c^2$, где $c = 300\,000$ км/с — скорость света в вакууме. Гравитационный потенциал совпадает по абсолютной величине с минимальной кинетической энергией, которая необходима телу единичной массы для ухода из данной точки на бесконечность. Оцените, на сколько отстанут часы на Земле за счёт гравитационного притяжения к центру Галактики (по сравнению с часами внегалактического наблюдателя) за один оборот Солнца вокруг центра Галактики. Солнце обращается вокруг центра Галактики по орбите с радиусом $r = 25\,000$ световых лет со скоростью $v = 220$ км/с. Для оценок считайте основную массу Галактики сосредоточенной в её центре.

1. а) 3) Юпитер.
б) 4) Седна.
в) 1) Зимой.
г) 3) Спутник нашей Галактики.
д) 2) Кассиопея.
е) 1) Газообразная.
ж) 2) Больше радиуса, но меньше диаметра Земли.

2. а) Дольше 4 с. б) Дальше 3,4 м.

а) Искомое минимальное время — это время перемещения объекта на одну угловую минуту дуги, которое меньше 24 ч во столько раз, во сколько одна угловая минута меньше 360°:

$$t = (24 \cdot 3600\ \text{с})/(360 \cdot 60) = 4\ \text{с}.$$

В задании указаны зодиакальные созвездия вблизи точек весеннего и осеннего равноденствий, последние расположены на небесном экваторе. Для звёзд, близких к полюсам мира (например, к Полярной Звезде), время наблюдения увеличится.

б) Случайные перемещения лица должны быть меньше 1 угловой секунды относительно визира. Угол в 1 секунду дуги равен $\pi/(180 \cdot 60)$ рад, тот же угол в радианах равен отношению смещения в 1 мм к минимальному расстоянию до визира l, что определяет искомое минимальное расстояние

$$l = (1\ \text{мм}) \cdot (180 \cdot 60/\pi) \approx 3400\ \text{мм} = 3{,}4\ \text{м}.$$

3. Северный полюс и точки, удалённые от Южного полюса на расстояния $\boldsymbol{l_n = 100\,[1 + (2\pi n)^{-1}]}$ км, где $\boldsymbol{n}$ — натуральное число.

Первый очевидный ответ — Северный полюс.

Остальные точки находятся вблизи Южного полюса и определяются тем, что участок движения на восток представляет собой целое число обходов вокруг Южного полюса. Возможные радиусы таких «кругосветных» траекторий равны 100 км/$(2\pi n)$, где n — натуральное число. Соответственно, искомые начальные точки в задаче удалены от Южного полюса на радиус какой-либо «кругосветной» траектории и ещё на 100-километровую длину участка движения на юг и на север:

$$l_n = 100\left(1 + \frac{1}{2\pi n}\right)\ \text{км}.$$

4. а), б) В весеннее и осеннее равноденствие 90°. в) Летнее солнцестояние — 66,5°. г) Зимнее солнцестояние — 113,5°.

На экваторе ось мира проходит в плоскости местного горизонта: Полярная звезда находится на линии горизонта строго на севере. Соответственно, все звёзды, в том числе и Солнце, в течение суток обращаются вокруг «горизонтальной» оси мира. Угол между осью мира и направлением на Солнце постоянен в течение суток и совпадает, в частности, с направлениями на восход и заход Солнца относительно северного направления. Однако угол между осью мира и направлением на Солнце есть не что иное, как угол между осью вращения Земли и направлением на Солнце.

В дни весеннего и осеннего равноденствий ось вращения Земли перпендикулярна направлению на Солнце, следовательно, Солнце восходит строго на востоке, а заходит — на западе (Солнце находится в созвездиях Рыб и Девы — во времена Гиппарха в созвездиях Овна и Весов, а указанные созвездия всегда и везде восходят примерно на востоке).

В дни зимнего и летнего солнцестояний ось вращения Земли образует минимальный угол с направлением на Солнце, который совпадает с широтой Полярного круга $66{,}5^\circ$. Летом Солнце смещено ближе к северному направлению оси мира, и в день летнего солнцестояния азимут восхода — $66{,}5^\circ$, а захода — $360^\circ - 66{,}5^\circ = 293{,}5^\circ$. В свою очередь, зимой Солнце смещено ближе к южному направлению оси мира, и в день зимнего солнцестояния азимут восхода составляет $180^\circ - 66{,}5^\circ = 113{,}5^\circ$, а азимут захода — $180^\circ + 66{,}5^\circ = 246{,}5^\circ$.

Решение задач 10 класса

1. а) 1) Силы одинаковы.
б) 2) 15 сутки.
в) 2) 5 млрд лет.
г) 3) 1 км/с.
д) 4) Юпитер.
е) 2) 8 минут.
ж) 3) Останется на своей орбите.

2. Не сможет удержаться на комете.

Останется человек на комете или улетит с неё, определяется тем, превышает или нет приобретаемая им при ходьбе скорость вторую космическую скорость на комете. Удельная кинетическая энергия $v_{\text{II}}^2/2$, необходимая для преодоления притяжения космического объекта (половина квадрата второй космической скорости), равна удельной потенциальной энергии на поверхности объекта $|U| = GM/r$ — гравитационному потенциалу, где G — гравитационная постоянная. Отношение удельных потенциальных энергий пропорционально отношению масс M космических объектов и обратно пропорционально отношению их радиусов r (или диаметров $d = 2r$). В свою очередь, масса объекта M равна произведению его плотности ρ и объёма V. Последний пропорционален кубу диаметра. В результате отношение вторых космических скоростей пропорционально отношению квадратных корней плотностей объектов и отношению диаметров объектов. Соответственно, вторая космическая скорость на комете $v_{\text{IIком}} = (11\ \text{км/с})/\sqrt{5}/10\,000 = 0{,}5$ м/с.

При ходьбе на Земле усилие стопы практически равно силе тяжести человека. Сила притяжения на комете существенно меньше силы тяжести на Земле, поэтому разгибание стопы с тем же усилием, что и на Земле, придаёт космонавту ускорение, равное ускорению свободного падения на Земле $g_З$ (в пренебрежении массой скафандра). При подъёме на высоту $h = 5$ см с ускорением $g_З$ приобретается вертикальная скорость $\sqrt{2g_Зh} = 1$ м/с, которая превышает вторую космическую скорость.

Таким образом, космонавт не сможет удержаться на комете.

3. Сила Кориолиса превышает силу тяготения в $9 \cdot 10^{10}$ раз.

Движение Солнца в неинерциальной системе отсчёта, связанной с Землёй, представляет собой «быстрое» суточное вращение вокруг оси мира вместе с остальными звёздами, а также «медленное» периодическое годовое перемещение поперёк плоскости небесного экватора и постепенное отставание в суточном вращении от звёзд — перемещение по зодиакальным созвездиям. Суточное вращение Солнца обусловлено силой Кориолиса и центробежной силой, а более медленные движения — ещё и поступательной силой инерции, связанной с ускорением центра масс Земли в гравитационном поле Солнца.

Угол ϕ между направлением на Солнце и осью мира есть не что иное, как угол между направлением на Солнце и осью вращения Земли. Этот угол меняется в течение года (вместе с перемещением Солнца поперёк плоскости небесного экватора). Он достигает максимального значения 90° в дни весеннего и осеннего равноденствий (когда Солнце находится в плоскости небесного экватора в созвездиях Рыб и Девы, во времена Гиппарха — Овна и Весов) и уменьшается до $66{,}5° = 90° - 23{,}5°$ в дни летнего и зимнего солнцестояний, когда Солнца поднимается (опускается) над плоскостью небесного экватора на максимальную высоту (глубину) 23,5° — угол наклона земной оси к плоскости эклиптики.

Таким образом, если расстояние r от Земли до Солнца принять постоянным, то расстояние $r \sin\phi$ от Солнца до оси вращения — оси мира, — строго говоря, меняется в течение года. Однако последнее расстояние уменьшается от своего максимального значения менее чем на 10 %, поэтому для упрощения оценок пренебрежём этим изменением.

В таком случае Солнце совершает оборот вокруг Земли за одни сутки, что в 365 раз быстрее, чем годовое движение Земли вокруг Солнца в гелиоцентрической системе отсчёта. Соответственно, в геоцентрической системе скорость движения Солнца в 365 раз, а ускорение — в 365^2 раз больше соответствующих величин для Земли в гелиоцентрической системе отсчёта. Но ускорение Земли в гелиоцентрической системе вызвано гравитационным взаимодействием с Солнцем. Следовательно, сумма сил инерции, действующих на Солнце, больше силы гравитации в отношение ускорений и масс объектов $365^2 \cdot 333\,000$ раз.

По условию задачи сила Кориолиса в 2 раза больше центробежной силы, следовательно, половина силы Кориолиса компенсирует центробежную силу, а вторая половина как раз и создаёт суммарную силу инерции, обеспечивающую необходимое центростремительное ускорение. Таким образом, сила Кориолиса в $2 \cdot 365^2 \cdot 333\,000 = 9 \cdot 10^{10}$ раз больше силы гравитационного притяжения Солнца и Земли.

4. Относительное изменение скорости метеороида $\boldsymbol{\Delta v/v_0 = c_{\text{исп}}/v_0^2 = 5 \cdot 10^{-3}}$.

При взаимодействии метеороида и воздуха часть кинетической энергии системы переходит в энергию теплового движения, что и обеспечивает нагрев и испарение метеороида. Суммарную кинетическую энергию двух тел с некоторыми массами m_1 и m_2 и скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — $K = m_1\mathbf{v}_1^2/2 + m_2\mathbf{v}_2^2/2$ — можно представить как сумму кинетической энергии поступательного движения центра масс $(m_1 + m_2)\,\mathbf{v}_{\text{ц.м.}}^2/2$, где $\mathbf{v}_{\text{ц.м.}} = (m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2)/(m_1 + m_2)$ — скорость центра масс, и кинетической энергии относительного движения $\mu\mathbf{v}_{\text{отн}}^2/2$, где $\mathbf{v}_{\text{отн}} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ — относительная скорость тел, а коэффициент $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ — так называемая приведённая масса. Кинетическая энергия движения центра масс не меняется при взаимодействии (в силу постоянной скорости центра масс в любой момент времени). В тепловую энергию переходит кинетическая энергия относительного движения $\mu\mathbf{v}_{\text{отн}}^2/2$, величина которой не зависит от системы отсчёта.

В случае сильного отличия масс m_1 и m_2 взаимодействующих тел приведённая масса $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ приближённо совпадает с массой наиболее лёгкого тела, в данном случае, с массой молекул воздуха. В свою очередь, скорость метеороида существенно превышает скорость звука — характерную скорость молекул, поэтому относительная скорость $v_{\text{отн}}$ приближённо равна скорости метеороида v_0. Таким образом, в тепловую энергию переходит энергия относительного движения метеороида и воздуха $m_{\text{возд}} v_0^2/2$, где $m_{\text{возд}}$ — суммарная масса воздуха, столкнувшегося с метеороидом.

Для испарения половины метеороида требуется энергия $m_{\text{метеор}} c_{\text{исп}}/2$, что определяет массу воздуха $m_{\text{возд}} = m_{\text{метеор}} c_{\text{исп}}/v_0^2 = 0{,}0045 m_{\text{метеор}}$, столкнувшегося с космическим телом (здесь $m_{\text{метеор}}$ — исходная масса метеороида). Кинетическая энергия метеороида существенно превышает энергию, необходимую для его испарения, что и определяет относительно малую массу воздуха.

Столкнувшийся с метеороидом воздух передаёт космическому телу импульс $m_{\text{возд}} v_0$, который и определяет замедление метеороида $\Delta v/v_0 = m_{\text{возд}}/m_{\text{метеор}} = c_{\text{исп}}/v_0^2 = 0{,}0045$.

1. а) 3) Микрометра.
б) 2) Весте.
в) 1) 5,2 а. е.
г) 2) 100 км.
д) 3) Кислород.
е) 4) Хокинга.
ж) 2) При взрывах сверхновых.

2. Температура планеты $T = 94$ °C.

Получаемый от звезды поток излучения и поток собственного излучения планеты пропорциональны площади планеты. Следовательно, изменение площади планеты не меняет баланса между падающим и уходящим потоками излучения. Температура планеты не зависит от её радиуса. Тогда планету в системе Глизе 581 можно условно заменить Землёй.

В свою очередь, через произвольную сферу, охватывающую звезду, проходит один и тот же поток излучения. Соответственно поток излучения через площадку с единичной площадью уменьшается обратно пропорционально площади сферы, а следовательно, квадрату расстояния до звезды. Тогда Земля на месте планеты в системе Глизе 581 будет получать в $0{,}013/0{,}07^2 = 2{,}65$ раза больший поток излучения, чем на своём месте в Солнечной системе.

Увеличение принимаемого потока излучения приводит к пропорциональному изменению исходящего от планеты излучения, а следовательно, к увеличению четвёртой степени температуры в 2,65 раза, а самой температуры — в $2{,}65^{1/4} = 1{,}28$ раза. Тогда температура планеты составит $(273 + 14) \cdot 1{,}28 = 367$ К $= 94$ °C.

Температура планеты в системе Глизе 581 оказывается меньше температуры кипения воды при нормальном атмосферном давлении, а сама планета, таким образом, попадает в зону обитаемости. Отражение планетой части излучения звезды без поглощения несколько снижает оценку температуры планеты.

3. Останутся чёрные дыры с массой больше $M_{\text{мин}} = (hc^4T/G^2)^{1/3} = 8$ млрд т.

За время жизни Вселенной $T = 14$ млрд лет чёрная дыра излучит $N = T\nu$ фотонов, которые унесут энергию $E = h\nu N = h\nu^2 T$. Подставим в последнее выражение частоту фотона $\nu = c/\lambda = c/r_{\text{g}} = c^3/(GM)$, выраженную через массу чёрной дыры M, и приравняем энергию излучённых фотонов энергии чёрной дыры Mc^2. В результате находим минимальную начальную массу не испарившихся чёрных дыр

$$M_{\text{мин}} = \left(\frac{hc^4T}{G^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{(6{,}6\cdot10^{-34})\,(3\cdot10^8)^4\,[14\cdot10^9\cdot365\cdot24\cdot3600]}{(6{,}7\cdot10^{-11})^2}\right)^{1/3}\ \text{кг} = \\ = 8\cdot10^{12}\ \text{кг} = 8\ \text{млрд т}.$$

Полученная масса существенно меньше массы Солнца $2\cdot10^{27}$ т, поэтому чёрные дыры звездной массы и существенно более тяжёлые сверхмассивные чёрные в центрах активных ядер галактик слабо подвержены влиянию хокинговского излучения.

3. Часы отстанут на 115 лет.

Центростремительное ускорение Солнца v^2/r создаётся его гравитационным притяжением к центру Галактики и совпадает с силой тяготения для единичной массы GM/r^2, где M — масса притягивающего вещества Галактики, G — гравитационная постоянная. Тогда квадрат скорости вращения Солнца v^2 совпадает с гравитационным потенциалом $|U| = GM/r$. За время $T = 2\pi r/v$ одного оборота вокруг центра Галактики часы на Земле отстанут на интервал

$$\Delta T = \left(\frac{2\pi r}{v}\right)\left(\frac{v^2}{c^2}\right) = 2\pi\left(\frac{r}{c}\right)\left(\frac{v}{c}\right) = 2\pi \cdot (25\,000 \text{ лет}) \cdot \frac{220 \text{ км/с}}{300\,000 \text{ км/с}} = 115 \text{ лет.}$$

Условия и решение задач
Открытой городской олимпиады по астрономии, астрофизике
и физике космоса им. Виталия Лазаревича Гинзбурга
29 января 2017 г.

8–9 классы

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Зимой в Нижнем Новгороде Солнце восходит (по сравнению с летом):
   1) севернее;
   2) южнее;
   3) восточнее;
   4) в той же точке горизонта?

б) Яркие звёзды созвездия Кассиопея образуют фигуру типа буквы:
   1) C;
   2) F;
   3) T;
   4) W?

в) Самая близкая к Солнцу звезда находится в созвездии:
   1) Кита;
   2) Лебедя;
   3) Ориона;
   4) Центавра?

г) Какой из объектов не является звездой:
   1) Вега;
   2) Денеб;
   3) Сириус;
   4) Седна?

д) Сколько ярких звёзд образуют ковш (вместе с ручкой) созвездия Большая Медведица:
   1) пять;
   2) семь;
   3) девять;
   4) одиннадцать?

е) В Нижнем Новгороде планета Юпитер:
   1) видна невооружённым глазом;
   2) видна уже в простой бинокль;
   3) видна только с помощью телескопа;
   4) никогда не доступна наблюдению (всегда находится ниже горизонта)?

ж) Астрономические знания в Древней Греции не позволяли:
   1) построить календарь; 2) определить расстояние до Солнца;
   3) предсказать приливы; 4) исследовать форму Земли?

2. Во сколько раз отличаются наибольшее и наименьшее возможные значения видимого углового диаметра Венеры, если радиус её орбиты 0,7 астрономических единицы? Орбиты планет в Солнечной системе считать круговыми.

3. Солнечная система перемещается в плоскости диска нашей галактики Млечный путь. Пусть её путь пересекает шаровое звёздное скопление (например, движущееся в гало перпендикулярно плоскости Млечного пути), так что Солнце проходит через центр скопления. Определите среднее количество звёзд скопления, которые пройдут на расстоянии меньше 30 а. е. от Солнца, т. е. могут оказаться внутри орбиты Нептуна. В скоплении 2 млн. звёзд, которые распределены однородно в пространстве (без сгущений), радиус скопления 25 пк, где 1 пк = 200 тыс. а. е. Скорость относительного движения Солнца и шарового скопления существенно выше скорости вращения звёзд внутри скопления. Объём шара с радиусом r равен $4\pi r^3/3$, площадь круга того же радиуса — πr^2.

4. Определите, во сколько раз радиус Луны r меньше радиуса Земли R, используя длительности фаз полного лунного затмения. Максимальное время t от начала погружения Луны в зону полной тени Земли до полного выхода спутника из указанной зоны составля-

ет примерно 4,0 часа (именно эта часть затмения хорошо заметна невооружённым глазом в отличие от прохождения Луны в зоне полутени Земли). В свою очередь, весь диск Луны находится целиком внутри полной тени Земли не дольше отрезка $\Delta\tau = 1$ ч 50 мин. При расчёте принять видимые угловые диаметры Солнца и Луны одинаковыми.

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) В полночь на земном экваторе Полярную звезду можно найти:
1) на горизонте;
2) на высоте 23,5° над горизонтом;
3) на высоте 76,5° над горизонтом;
4) в зените (вертикально вверху)?

б) Температура видимой поверхности Солнца примерно:
1) 600 К;
2) 6 000 К;
3) 60 000 К;
4) 600 000 К?

в) Гравитационные волны были впервые зарегистрированы в 2015–2016 гг. с помощью:
1) больших наземных телескопов VLT;
2) интерферометра LIGO;
3) орбитального телескопа «Кеплер»;
4) спутников GPS—ГЛОНАСС?

г) Радиоволны какого диапазона используются для связи с Международной космической станцией:
1) сверхдлинноволнового;
2) длинноволнового;
3) средневолнового;
4) коротковолнового;
5) ультракоротковолнового?

д) Радиусы двух звёзд отличаются в 2 раза, тогда их объёмы отличаются примерно:
1) в 1,5 раза;
2) в 2 раза;
3) в 4 раза;
4) в 8 раз?

е) Сила земного тяготения (для тел одной и той же массы) уменьшается в 4 раза на высоте примерно:
1) 6,4 км;
2) 64 км;
3) 640 км;
4) 6 400 км?

ж) Скорость кометы при движении из наиболее удалённой в наиболее близкую к Солнцу точку:
1) монотонно уменьшается; 2) сначала уменьшается, потом возрастает;
3) монотонно увеличивается; 4) сначала возрастает, потом уменьшается;
5) не изменяется?

2. На закате дня весеннего равноденствия перед пилотом воздушного шара поставлена задача подниматься в районе экватора таким образом, чтобы в течение всего подъёма видеть заходящее Солнце касающимся горизонта.

а) С каким вертикальным ускорением будет подниматься воздушный шар? (5 баллов)

б) Сколько времени займёт подъём в таком режиме до высоты 5 км и какой вертикальной скорости достигнет шар на указанной высоте 5 км? (2 балла)

Для расчётов принять радиус Земли $R_З = 6\,400$ км.

3. Определите ускорение свободного падения на видимой поверхности Солнца, если Земля обращается вокруг светила за один год по орбите с радиусом 150 млн км, а видимый угловой диаметр Солнца 0,53 градуса.

4. При термоядерном взрыве сверхновая звезда сбросила сферическую оболочку. Какую долю исходной массы звезды должна составлять оболочка, чтобы оставшееся ядро звезды не смогло удержать существовавшую до взрыва планетную систему? Взрыв происходит практически мгновенно по сравнению с периодом обращения планет вокруг звезды. Планеты расположены на достаточно удалённых круговых орбитах по сравнению с ради-

усом звезды, так что попавшим на них веществом оболочки можно пренебречь.

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) К какому классу звёзд принадлежит Солнце:
   1) белый карлик;
   2) жёлтый карлик;
   3) коричневый карлик;
   4) красный карлик?

б) Кольца Сатурна в основном состоят:
   1) из силикатной пыли;
   2) из минеральных камней;
   3) из водяного льда;
   4) из метанового льда?

в) Второй по распространённости элемент во Вселенной:
   1) водород;
   2) гелий;
   3) кислород;
   3) углерод?

г) Первой была придумана оптическая схема телескопа:
   1) Галилея;
   2) Кассегрена;
   3) Коперника;
   4) Ломоносова?

д) В атмосфере какой из планет Солнечной системы наблюдается самый крупный циклон:
   1) Венера;
   2) Земля;
   3) Сатурн;
   4) Юпитер?

е) Сигнал от радиопередатчика на Земле распространяется до Луны и обратно в приёмник на Земле примерно:
   1) за 2,5 микросекунды;
   2) за 2,5 миллисекунды;
   3) за 2,5 секунды;
   4) за 2,5 минуты?

ж) Какое излучение наименее всего поглощается атмосферой Земли:
   1) инфракрасное; 2) оптическое; 3) ультрафиолетовое;
   4) рентгеновское?

2. Что больше и во сколько раз: сила давления так называемого быстрого солнечного ветра или сила давления излучения Солнца, которые действуют на плоскую зеркальную пластину, упруго отражающую частицы ветра? Солнечный ветер представляет собой поток протонов с массой $1{,}7 \cdot 10^{-27}$ кг и существенно более лёгких электронов, уходящих из короны Солнца в межпланетное пространство. На орбите Земли скорость ветра составляет примерно 700 км/с, его концентрация — 4 млн протонов в одном куб. м, а плотность потока энергии солнечного излучения (энергия, переносимая за единицу времени сквозь единицу площади) — 1 400 Вт/м^2. Импульс фотона $p_ф$ связан с его энергией $\varepsilon_ф$ соотношением $p_ф = \varepsilon_ф/c$, где $c = 300$ тыс. км/с — скорость света.

3. Тёмная энергия представляет собой некоторую форму материи (субстанцию), которая однородно заполняет всё пространство и способствует увеличению скорости расширения Вселенной. При определённых условиях, действие тёмной энергии может быть описано так, будто тела помещены в дополнительное гравитационное поле, в котором ускорение свободного падения $\vec{g}_э$ направлено от некоторого центра $\vec{r}_0$ и линейно увеличивается по мере удаления от этого центра — начала отсчёта: $\vec{g}_э = [8\pi G\Lambda/(3c^2)]\,(\vec{r}-\vec{r}_0)$, где $\vec{r}$ — положение частицы, $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг $\cdot$ с^2) — гравитационная постоянная, $\Lambda = 6 \cdot 10^{-10}$ Дж/м^3 — космологическая постоянная (плотность тёмной энергии), $c = 300$ тыс. км/с — скорость света.

а) Покажите, что «гравитационное» поле тёмной энергии создаёт относительное ускорение двух тел (разность их ускорений), которое не зависит от выбора точки $\vec{r}_0$ — начала отсчёта (1 балл).

б) При каких расстояниях между двумя атомами водорода их взаимное гравитационное притяжение превышает отталкивание тёмной энергией (всеми электрическими силами пренебречь)? Иными словами, два неподвижных относительно друг друга атома водорода в дальнейшем сближались бы между собой на таких расстояниях (в отсутствие других атомов; 3 балла).

в) Найдите максимальный радиус атома водорода: при каких расстояниях между неподвижными электроном и протоном эти частицы начали бы сближаться за счёт взаимного электрического притяжения при наличии расталкивания частиц тёмной материей? (3 балла.)
Элементарный заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, константа в законе Кулона $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф, масса протона (ядра атома водорода) $1{,}7 \cdot 10^{-27}$ кг примерно в 1 800 раз больше массы электрона.

4. Оцените максимальную массу чёрной дыры, которая разорвала бы Солнце приливными силами ещё до того, как последнее достигло бы так называемого горизонта событий при свободном радиальном падении в чёрную дыру. Искомую массу чёрной дыры выразите в массах Солнца. Гравитационное поле чёрной дыры вплоть до горизонта событий считайте совпадающим с полем точечного тела. Радиус горизонта событий вокруг чёрной дыры с массой M равен $2GM/c^2$, где $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг $\cdot$ с^2) — гравитационная постоянная, $c = 300$ тыс. км/с — скорость света. Масса Солнца составляет $2 \cdot 10^{30}$ кг, его радиус — 700 тыс. км.

1. а) 2) Южнее.
б) 4) W.
в) 4) Центавра.
г) 4) Седна.
д) 2) Семь.
е) 1) Виден невооружённым глазом.
ж) 2) Не позволяли определить расстояние до Солнца.

2. В 5,7 раза.

Видимый угловой диаметр планеты обратно пропорционален расстоянию от Земли до Венеры. Указанное расстояние изменяется от минимального значения $R_З - R_В$ до $R_З + R_В$, где $R_З = 1$ а. е. и $R_В = 0{,}7$ а. е. — радиусы орбит Земли и Венеры соответственно. Следовательно, отношение максимального и минимального значений видимого углового диаметра составляет $(R_З + R_В)/(R_З - R_В) = (1+0{,}7)/(1-0{,}7) \approx 5{,}7$. Необходимо отметить, что Венера находится близко к солнечному диску на небосводе в моменты прохождения на минимальном и максимальном расстояниях от Земли — так называемые нижнее и верхнее соединения планеты с Солнцем. Поэтому наблюдение планеты в этих случаях затруднено. Нижнее соединение может сопровождаться прохождением Венеры по диску Солнца.

3. Среднее число $1{,}1 \cdot 10^{-4}$.

При рассмотрении относительного движения, примем шаровое скопление неподвижным, так что Солнце проходит сквозь него. Длина прямолинейной траектории Солнца внутри скопления равна диаметру скопления $L = 2R$, где $R = 25$ пк $= 25 \cdot 200\,000$ а. е. $= 5 \cdot 10^6$ а. е. — соответствующий радиус. Точки пространства, находящиеся на расстоянии меньше длины $r = 30$ а. е. от траектории Солнца, заполняют собой внутреннюю область цилиндра с высотой L и радиусом основания r. Число n звёзд внутри указанного цилиндра меньше числа $N = 2 \cdot 10^6$ звёзд в скоплении во столько раз, во сколько объём скопления $4\pi R^3/3$ больше объёма цилиндра $\pi r^2 L = 2\pi r^2 R$. Таким образом, искомое среднее число

$$n = N\,\frac{2\pi r^2 R}{4\pi R^3/3} = N\,\frac{3r^2}{2R^2} = 2 \cdot 10^6\,\frac{3 \cdot (30\ \text{а. е.})^2}{2\,(5 \cdot 10^6\ \text{а. е.})^2} = 1{,}1 \cdot 10^{-4}.$$

Полученное число меньше единицы имеет смысл вероятности прохождения какой-либо звезды на расстоянии меньше 30 а. е. от Солнца при «столкновении» с одним шаровым скоплением.

4. В 3,7 раза.

Если бы все лучи Солнца шли строго параллельно друг другу, то тень Земли представляла бы собой цилиндр с диаметром, равным диаметром Земли $2R$. Отличный от нуля угловой размер Солнца приводит к размытию границы тени Земли в так называемую полутень, которая расширяется по мере перемещения от Земли к Луне и на орбите Луны достигает ширины $w \approx L\theta$, где L — расстояние от Земли до Луны, θ — видимый угловой диаметр Солнца. В результате на орбите Луны полная тень Земли сужается до диаметра $d = 2R - w$. Вместе с тем в силу совпадения видимых угловых диаметров θ Солнца и Луны ширина полутени $w \approx L\theta$ оказывается равной диаметру Луны $2r$, поэтому диаметр полной тени $d = 2R - 2r$. От начала погружения в полную тень Земли до полного выхода из неё Луна проходит указанное расстояние d, увеличенное на диаметр Луны $2r$. В свою очередь, Луна находится целиком внутри полной тени Земли на трассе длины d, уменьшенной на диаметр Луны $2r$. Луна движется с постоянной скоростью сквозь область тени Земли, поэтому длины отмеченных трасс $d + 2r$ и $d - 2r$ пропорциональны указанным в условии задачи длительностям соответствующих фаз лунного затмения $t = 4{,}0$ ч и $\Delta\tau = 1$ ч 50 мин $\approx 1{,}83$ ч. В результате получаем уравнение

$$\frac{d-2r}{d+2r} = \frac{(2R-2r)-2r}{(2R-2r)+2r} = \frac{2R-4r}{2R} = 1 - \frac{2r}{R} = \frac{\Delta\tau}{t}\,,$$

из которого определяем искомое отношение радиусов

$$\frac{R}{r} = \frac{2}{1-\Delta\tau/t} = \frac{2}{1-(1{,}83\ \text{ч})/(4{,}0\ \text{ч})} = 3{,}7.$$

Решение задач 10 класса

1. а) 1) **На горизонте.**
б) 2) **6 000 К.**
в) 2) **Интерферометра LIGO.**
г) 5) **Ультракоротковолнового.**
д) 4) **В 8 раз.**
е) 4) **6 400 км (одного радиуса Земли).**
ж) 3) **Монотонно увеличивается.**

2. а) Ускорение шара 3,4 см/с^2. б) Время подъёма 9,0 мин, а скорость 18 м/с.

а) При требуемом режиме подъёма, шар находится на солнечном луче, который исходит из нижней точки диска Солнца и касается поверхности Земли. Рассмотрим прямоугольный треугольник, один из катетов которого образован указанным лучом в части отрезка от точки касания Земли до воздушного шара. Второй катет соединяет точку касания луча и центр Земли, так что длина этого катета постоянна и равна радиусу Земли $R_З = 6\,400$ км. В свою очередь, угол θ между последним катетом и гипотенузой монотонно увеличивается во времени как угол поворота Земли вокруг своей оси: $\theta = 2\pi t/T = \omega t$, где период $T = 1$ сут $= 24 \cdot 60 \cdot 60$ с $= 86\,400$ с, а соответствующая круговая частота $\omega = 2\pi/T$. В таком случае длина l гипотенузы (отрезка центр Земли—воздушный шар) равна $R_З/\cos(\omega t)$, а искомая высота подъёма шара

$$h = l - R_З = R_З\left[\frac{1}{\cos(\omega t)} - 1\right] = 2R_З\,\frac{\sin^2(\omega t/2)}{\cos(\omega t)} \approx 2R_З\,(\omega t/2)^2 = R_З\omega^2 t^2/2.$$

В последней серии преобразований использованы приближённые равенства $\sin\alpha \approx \alpha$ и $\cos\alpha \approx 1$ для малых значений аргумента $\alpha \ll 1$. Таким образом, высота h подъёма шара зависит от времени, как при равноускоренном движении с ускорением

$$a = R_З\omega^2 = (6\,400 \cdot 1\,000\ \text{м})\,(2\pi/86\,400\ \text{с})^2 = 0{,}034\ \text{м/с}^2 = 3{,}4\ \text{см/с}^2.$$

б) Указанная в условии задачи высота $h = 5$ км достигается за время

$$t = \sqrt{\frac{2h}{R_З}}\bigg/\omega = \frac{86\,400\ \text{с}}{2\pi}\sqrt{(2\cdot 5\ \text{км})/6\,400\ \text{км}} \approx 540\ \text{с} = 9{,}0\ \text{мин}.$$

На данной высоте шар достигает скорости

$$v = at = \omega\sqrt{2hR_З} = \frac{2\pi}{86\,400\ \text{с}}\sqrt{2\cdot 5\ \text{км}\cdot 6\,400\ \text{км}} \approx 0{,}018\ \text{км/с} = 18\ \text{м/с}.$$

3. 280 м/с^2.

Центростремительное ускорение Земли при круговом движении вокруг Солнца v^2/R равно ускорению свободного падения $g_З$ в гравитационном поле светила на орбите Земли, где $v = 2\pi R/T$ — скорость Земли, $R = 150 \cdot 10^6$ км — радиус орбиты Земли, период $T = 1$ год $= 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$ с $= 3{,}15 \cdot 10^7$ с. Ускорение свободного падения на поверхности Солнца больше ускорения $g_З$ во столько раз, во сколько квадрат радиуса R земной орбиты больше радиуса Солнца $R_С$. Но отношение диаметра Солнца $2R_С$ к расстоянию R до него совпадает с видимым угловым диаметром светила $\theta = 2R_{\text{С}}/R = 0{,}53^\circ = (0{,}53/180)\,\pi$ рад. Тогда находим искомое ускорение свободного падения на поверхности Солнца

$$g_{\text{С}} = g_{\text{З}}\,(R/R_{\text{С}})^2 = g_{\text{З}}\,(2/\theta)^2 = (v^2/R)\,(2/\theta)^2 = \frac{(2\pi R/T)^2}{R}\,(2/\theta)^2 = 16\pi^2 R/(\theta T)^2 =$$
$$= \frac{16\pi^2\,(150\cdot 10^6\ \text{км})}{[(0{,}53/180)\,\pi\cdot 3{,}15\cdot 10^7\ \text{с}]^2} = 0{,}28\ \text{км/с}^2 = 280\ \text{м/с}^2.$$

4. Больше 50 %.

До взрыва сверхновой, центростремительное ускорение v^2/r планеты на круговой орбите с радиусом r равно ускорению свободного падения $g = GM_0/r^2$, создаваемого центральной звезды с начальной массой M_0, что определяет орбитальную скорость планеты $v = \sqrt{GM_0/r}$; здесь G — гравитационная постоянная. За короткое время прохождения сброшенной оболочки с массой ΔM через планетную систему скорость и положение звезды не меняются. Вместе с тем оставшееся после взрыва ядро звезды не приобретает дополнительной скорости вследствие сферической симметрии оболочки. Потенциальная энергия планеты изменяется пропорционально изменению массы звезды, так что после прохождения оболочки механическая энергия планеты с массой $m_{\text{пл}}$ приобретает значение

$$W = m_{\text{пл}}\left(\frac{v^2}{2} - \frac{G\,(M_0-\Delta M)}{r}\right) = m_{\text{пл}}\left(\frac{GM_0}{2r} - \frac{G\,(M_0-\Delta M)}{r}\right) = Gm_{\text{пл}}\,\frac{2\,\Delta M - M_0}{2r}\,.$$

Сила тяготения звезды не удержит планету от убегания, если механическая энергия W станет положительной (кинетическая энергия превысит потенциальную энергию), чему соответствует масса сброшенной оболочки $\Delta M \geq M_0/2$. Таким образом, оставшееся после взрыва ядро звезды потеряет планетную систему, если масса сброшенной оболочки превышает 50 % массы звезды до взрыва M_0.

1. а) 2) Жёлтый карлик.
б) 3) Из водяного льда.
в) 2) Гелий.
г) 1) Галилея.
д) 4) Юпитер.
е) 3) За 2,5 секунды.
ж) 2) Оптическое.

2. Давление излучения больше в 1 400 раз.

Силы со стороны солнечного излучения и ветра $F_{\text{изл}}$ и $F_{\text{вет}}$ пропорциональны площади пластины S. Поэтому отношение указанных сил $F_{\text{изл}}$ и $F_{\text{вет}}$ совпадает с отношением давлений $P_{\text{изл}} = F_{\text{изл}}/S$ и $P_{\text{вет}} = F_{\text{вет}}/S$ — сил, действующих на единицу площади поверхности.

При отражении от пластины импульс p частицы (протона или фотона) меняется на противоположный. Поэтому частица передаёт пластине импульс $2p$. Соответственно, N частиц передают пластине импульс $2pN$, так что на пластину действует давление

$$P = \frac{F}{S} = \frac{2pN/t}{S} = 2pJ, \tag{1}$$

где t — время, за которое N частиц определённого типа (протоны или электроны) отразились от пластины, а величина $J = N/(St)$ представляет собой плотность потока частиц — число частиц, попадающих на единицу площади поверхности за единицу времени.

Для фотонов с импульсом $p_{\text{ф}} = \varepsilon_{\text{ф}}/c$ выражение для давления излучения принимает вид

$$P_{\text{изл}} = 2\varepsilon_{\text{ф}}J/c = 2Q_{\text{ф}}/c = 2\,\frac{1\,400\ \text{Вт/м}^2}{3\cdot 10^8\ \text{м/с}} = 9{,}3\cdot 10^{-6}\ \text{Па}, \tag{2}$$

где $Q_{\text{ф}} = \varepsilon_{\text{ф}}J$ — плотность потока энергии солнечного излучения $1\,400$ Вт/м^2; $c = 3\cdot 10^8$ м/с — скорость света.

За временной интервал t до пластины долетают и ударяются протоны солнечного ветра, изначально отстоящие от пластины на расстоянии меньше длины vt, где $v = 700$ км/с $= 7\cdot 10^5$ м/с — скорость ветра. Соответственно, на пластину попадают протоны из цилиндра с высотой vt и основанием в виде пластины. Объём цилиндра $V = Svt$ определяет количество частиц в нём $N = nV = nSvt$, где $n = 4\cdot 10^6$ м$^{-3}$ — концентрация протонов (число частиц в единичном объёме). Подставляем указанное число протонов N и их импульс $p_{\text{п}} = m_{\text{р}}v$ в формулу (1) для давления:

$$P_{\text{вет}} = \frac{2p_{\text{п}}N/t}{S} = \frac{2\,(m_{\text{р}}v)\,(nSvt)/t}{S} = 2m_{\text{р}}nv^2 = \\ = 2\cdot(1{,}7\cdot 10^{-27}\ \text{кг})\cdot(4\cdot 10^6\ \text{м}^{-3})\cdot(7\cdot 10^5\ \text{м/с})^2 = 6{,}7\cdot 10^{-9}\ \text{Па}. \tag{3}$$

Здесь $m_{\text{р}} = 1{,}7\cdot 10^{-27}$ кг — масса протона.

Выражения (2) и (3) демонстрируют, что давление излучения больше давления солнечного ветра в $(9{,}3\cdot 10^{-6}\ \text{Па})/(6{,}7\cdot 10^{-9}\ \text{Па}) \approx 1\,400$ раз.

3. а) $\vec{g}_{\text{э}}(\vec{r}_1) - \vec{g}_{\text{э}}(\vec{r}_2) = [8\pi G\Lambda/(3c^2)]\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$;
б) 39 см $\sim$ 0,5 м;

в) 4,0 млрд км ≈ 30 а. е.

а) Пусть тела с произвольными массами находятся в точках $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Разность ускорений тел в «гравитационном» поле тёмной материи

$$\vec{g}_э(\vec{r}_1) - \vec{g}_э(\vec{r}_2) = \frac{8\pi G\Lambda}{3c^2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) - \frac{8\pi G\Lambda}{3c^2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_0) = \frac{8\pi G\Lambda}{3c^2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2),$$

как видно, не содержит радиуса $\vec{r}_0$ и поэтому не зависит от выбора начала отсчёта $\vec{r}_0$. Силы взаимодействия между телами (электрические, гравитационные) определяются их относительным положением $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ и не зависят от $\vec{r}_0$. Поэтому ускорения, создаваемые этими силами также не зависят от положения центра $\vec{r}_0$. Таким образом, относительное ускорение тел не зависит от выбора начала отсчёта $\vec{r}_0$ и при учёте взаимодействия между телами.

б) При наличии тёмной энергии, два атома водорода приобретают ускорения

$$\vec{a}_1 = \frac{8\pi G\Lambda}{3c^2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) - \frac{Gm_p}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2),$$
$$\vec{a}_2 = \frac{8\pi G\Lambda}{3c^2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_0) - \frac{Gm_p}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1),$$

где $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ — положения атомов водорода; $m_{\text{p}} = 1{,}7\cdot 10^{-27}$ кг — масса протона (ядра атома водорода), которая практически совпадает с массой атома водорода в силу малой массы электрона; $G = 6{,}7\cdot 10^{-11}$ м^3/(кг$\cdot$с^2) — гравитационная постоянная, $\Lambda = 6\cdot 10^{-10}$ Дж/м^3 — космологическая постоянная (плотность тёмной энергии), $c = 3\cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме. Соответственно, ускорение атомов относительно друг друга

$$\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = G\left(\frac{8\pi\Lambda}{3c^2} - \frac{2m_p}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}\right)(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

противонаправлено их относительному положению $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ (так что неподвижные относительно друг друга атомы начинают сближаться), если выполнено неравенство

$$\frac{2m_p}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} > \frac{8\pi\Lambda}{3c^2}\,.$$

Последнее определяет искомый интервал начальных расстояний для взаимного сближения атомов

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| < \left(\frac{3m_{\text{p}}c^2}{4\pi\Lambda}\right)^{1/3} = \left(\frac{3\cdot(1{,}7\cdot 10^{-27}\ \text{кг})\cdot(3\cdot 10^8\ \text{м/с})^2}{4\cdot 3{,}14\cdot(6\cdot 10^{-10}\ \text{Дж/м}^3)}\right)^{1/3} \approx 0{,}39\ \text{м} \sim 0{,}5\ \text{м}.$$

В среднем в современную эпоху во Вселенной приходится один атом водорода (полностью ионизованный — в виде не связанных между собой электрона и протона) на 4 куб. м. Так что среднее расстояние между частицами во Вселенной существенно превышает найденное выше значение, при котором нейтральные частицы могли бы противостоять всё более быстрому взаимному разбеганию под действием тёмной энергии.

в) Сила электрического (кулоновского) притяжения электрона и протона ke^2/r^2 существенно превышает их классическое ньютоново притяжение $Gm_{\text{e}}m_{\text{p}}/r^2$, в

$$\frac{ke^2}{Gm_{\text{e}}m_{\text{p}}} = \frac{(9\cdot 10^9)\cdot(1{,}6\cdot 10^{-19})^2}{(6{,}7\cdot 10^{-11})\cdot(1{,}7\cdot 10^{-27})^2/1\,800} \approx 2{,}1\cdot 10^{39}\ \text{раз},$$

при любом расстоянии между частицами. Здесь $m_\text{e} = m_\text{p}/1\,800$ — масса электрона; $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл — элементарный заряд; $k = 9\cdot 10^9$ м/Ф — константа в законе Кулона. Поэтому ньютоновой частью взаимного гравитационного притяжения частиц можно пренебречь.

Тогда электрон и протон приобретают ускорения

$$\vec{a}_\text{e} = \frac{8\pi G\Lambda}{3c^2}\,(\vec{r}_\text{e} - \vec{r}_0) - \frac{ke^2}{m_\text{e}\,|\vec{r}_\text{e} - \vec{r}_\text{p}|^3}\,(\vec{r}_\text{e} - \vec{r}_\text{p}),$$
$$\vec{a}_\text{p} = \frac{8\pi G\Lambda}{3c^2}\,(\vec{r}_\text{p} - \vec{r}_0) - \frac{ke^2}{m_\text{p}\,|\vec{r}_\text{e} - \vec{r}_\text{p}|^3}\,(\vec{r}_\text{p} - \vec{r}_\text{e}),$$

где $\vec{r}_\text{e}$ и $\vec{r}_\text{p}$ — положения электрона и протона соответственно. Ускорение частиц относительно друг друга

$$\vec{a}_\text{e} - \vec{a}_\text{p} = \left(\frac{8\pi G\Lambda}{3c^2} - \frac{ke^2}{\mu\,|\vec{r}_\text{e} - \vec{r}_\text{p}|^3}\right)(\vec{r}_\text{e} - \vec{r}_\text{p})$$

противонаправлено их относительному положению $\vec{r}_\text{e} - \vec{r}_\text{p}$ при условии

$$\frac{ke^2}{\mu\,|\vec{r}_\text{e} - \vec{r}_\text{p}|^3} > \frac{8\pi G\Lambda}{3c^2}\,,$$

где $\mu = m_\text{e}m_\text{p}/(m_\text{p} + m_\text{e}) \approx m_\text{e}$ — так называемая приведённая масса системы двух частиц ($\mu^{-1} = m_\text{e}^{-1} + m_\text{p}^{-1}$). В результате получаем интервал расстояний, на которых частицы удерживаются относительно друг друга силой взаимного электрического притяжения:

$$|\vec{r}_\text{e} - \vec{r}_\text{p}| < \left(\frac{3ke^2c^2}{8\pi G\Lambda m_\text{e}}\right)^{1/3} = \left[\frac{3\cdot(9\cdot 10^9)\cdot(1{,}6\cdot 10^{-19})^2\cdot(3\cdot 10^8)^2}{8\cdot 3{,}14\cdot(6{,}7\cdot 10^{-11})\cdot(6\cdot 10^{-10})\cdot(1{,}7\cdot 10^{-27}/1\,800)}\right]^{1/3}\ \text{м} \approx$$
$$\approx 4{,}0\cdot 10^{12}\ \text{м} = 4{,}0\ \text{млрд км} = 27\ \text{а. е.}$$

— примерно радиус орбиты Нептуна.

Поскольку относительное ускорение частиц $\vec{a}_\text{e} - \vec{a}_\text{p}$ противонаправлено их относительному положению, то, гипотетически (в отсутствие других частиц), электрон и протон могли бы равномерно вращаться вокруг друга друга на указанных расстояниях при соответствующей начальной относительной скорости и тем самым представлять собой атом водорода. При этом центр масс атома водорода ускоренно удалялся бы от начала отсчёта $\vec{r}_0$, если последнее выбрано смещённым относительно начального положения центр масс.

4. 160 млн масс Солнца.

Однородное поле силы тяжести стремилось бы ускорять разные части Солнца с одинаковым ускорением, что не создавало бы причин для относительного ускорения этих частей. Поэтому Солнце падало бы в однородном поле силы тяжести, как в состоянии невесомости, без деформации своей структуры.

В неоднородном поле силы тяжести точечного тела (в данном случае чёрной дыры) более близко расположенные к притягивающему внешнему телу части Солнца испытывают большее притяжение, чем диаметрально противоположные. Указанная разность сил (приливная сила) и способна вызвать «растекание» Солнца вдоль радиуса падения. (При этом гравитационное поле внешнего тела стремится сжать Солнце в плоскостях, перпендикулярных направлению падения.)

В отсутствие внешнего гравитационного поля, ускорение свободного падения g внутри Солнца примерно линейно увеличивается от нуля в центре светила до значения g_0 на его поверхности, так что её радиальная компонента

$$g_r(r) = -g_0 \, \frac{r}{R_\text{С}} \,,$$

где r — расстояние до центра Солнца, $R_\text{С}$ — радиус Солнца, знак минус указывает на направление ускорения свободного падения к центру Солнца. В свою очередь, разность ускорений свободного падения, создаваемых чёрной дырой в центре Солнца и на расстоянии r от его центра, также примерно линейно зависит от величины r. Соответствующая разность радиальных компонент ускорений

$$\Delta g_r = g_{\text{ЧД}r}(r_0 + r) - g_{\text{ЧД}r}(r_0) = -GM \left[\frac{1}{(r_0 + r)^2} - \frac{1}{r_0^2} \right] = GM \, \frac{r\,(2r_0 + r)}{r_0^2\,(r_0 + r)^2} \approx GM \, \frac{2r}{r_0^3}$$

положительна, что указывает на противоположное направление радиальных приливных сил по отношению к собственному гравитационному полю Солнца. Здесь r_0 — расстояние от чёрной дыры до центра Солнца, M — масса чёрной дыры, G — гравитационная постоянная.

«Разрывающая» радиальная приливная сила чёрной дыры превысит сжимающее собственное гравитационное поле Солнце при условии

$$GM \, \frac{2}{r_0^3} - \frac{g_0}{R_\text{С}} > 0, \tag{1}$$

чему соответствует положительное значение суммы $\Delta g_r + g_r$ во всём объёме светила. Рассматриваем неравенство (1) для расстояния r_0 до чёрной дыры, равного радиусу горизонта событий $2GM/c^2 = [2GM_\text{С}/c^2]\,(M/M_\text{С})$; подставляем ускорение свободного падения на поверхности Солнца g_0 в виде $GM_\text{С}/R_\text{С}^2$, где $M_\text{С}$ — масса Солнца. В результате условие (1) «растекания» Солнца принимает вид искомого ограничения на массу чёрной дыры

$$\frac{M}{M_\text{С}} < \left(\frac{2R_\text{С}^3}{[2GM_\text{С}/c^2]^3} \right)^{1/2} .$$

Здесь величина

$$\frac{2GM_\text{С}}{c^2} = \frac{2 \cdot (6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \text{м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)) \cdot (2 \cdot 10^{30}\ \text{кг})}{(3 \cdot 10^8\ \text{м/с})^2} \approx 3\,000\ \text{м} = 3{,}0\ \text{км}$$

имеет смысл радиуса горизонта событий для чёрной дыры солнечной массы. Таким образом, максимальная масса $M_\text{макс}$ чёрной дыры, которая может разорвать Солнце, составляет в единицах массы $M_\text{С}$ величину

$$\frac{M_\text{макс}}{M_\text{С}} = \sqrt{2} \left(\frac{R_\text{С}}{[2GM_\text{С}/c^2]} \right)^{3/2} = 1{,}41 \left(\frac{700\,000\ \text{км}}{3{,}0\ \text{км}} \right)^{3/2} = 1{,}6 \cdot 10^8.$$

Радиус горизонта событий для такой сверхмассивной чёрной дыры $[2GM_\text{С}/c^2]\,(M/M_\text{С}) = (3{,}0\ \text{км}) \cdot 1{,}6 \cdot 10^8 = 4{,}8 \cdot 10^8$ км примерно в 3 раза больше радиуса орбиты Земли вокруг Солнца.

Условия и решение задач
Открытой городской олимпиады по астрономии, астрофизике
и физике космоса им. Михаила Михайловича Кобрина
21 января 2018 г.

8–9 классы

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Сколько звёзд в Солнечной системе:
1) ни одной;
2) одна;
3) две;
4) три?

б) Расстояние от Земли до Солнца равно:
1) 1 астрономической единице;
2) 1 парсеку;
3) 1 световому году;
4) 380 тыс. км?

в) Самая яркая звезда на небе (исключая Солнце) находится в созвездии:
1) Большой Пёс;
2) Лебедь;
3) Лира;
4) Орион?

г) Какая из планет обращается вокруг Солнца «лёжа на боку»:
1) Юпитер;
2) Сатурн;
3) Уран;
4) Нептун?

д) Полярная звезда находится в созвездии:
1) Большая Медведица;
2) Кассиопея;
3) Пегас;
4) Малая Медведица?

е) Какой из объектов не является звездой:
1) Альдебаран;
2) Вега;
3) Денеб;
4) Седна?

ж) Какой небесный объект всегда находится на одной и той же высоте над горизонтом в Нижнем Новгороде:
1) Луна; 2) далёкий квазар; 3) Полярная звезда;
4) Туманность Андромеды?

2. Одна морская миля определена как расстояние в одну угловую минуту большого круга на поверхности земного шара. Выразите одну морскую милю в километрах, если длина экватора составляет 40 тыс. км.

3. При наблюдениях с Земли в телескоп за планетой у одной из соседних звёзд выяснилось, что за время полного оборота вокруг центральной звезды планета успевает повернуться к наблюдателю одной и той же точкой на своём экваторе ровно четыре раза. Сколько экваториальных суток длится полный год на данной планете? Рассмотреть варианты, когда планета вращается вокруг своей оси и по орбите вокруг звезды:

а) в одну сторону (например, по часовой стрелке);

б) в противоположные стороны (например, по и против часовой стрелки).

Считать, что плоскость планетарного экватора совпадает с плоскостью орбиты планеты.

4. Что больше: кинетическая энергия вращения Солнца вокруг своей оси или кинетическая энергия движения Юпитера по орбите вокруг Солнца? Солнце обращается вокруг своей оси за 1 месяц. В свою очередь, Юпитер совершает оборот вокруг Солнца за 12 лет по орбите, радиус которой примерно в 1 000 раз больше радиуса светила. Масса Юпитера примерно в 1 000 раз меньше солнечной массы.

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Газовая оболочка вокруг ядра кометы:
   1) Апекс;
   2) Квазар;
   3) Кома;
   4) Корона?

б) Млечный Путь на небе проходит:
   1) по зодиакальному кругу;
   2) вдоль галактического экватора;
   3) вдоль небесного экватора;
   4) вдоль эклиптики?

в) В новолуние месяц восходит над горизонтом:
   1) днём;
   2) вечером;
   3) ночью;
   4) утром?

г) Наиболее сильно изменяют длительность земных суток:
   1) антропогенная деятельность;
   2) лунные приливы;
   3) магнитные бури;
   4) падающие метеориты?

д) Какая планета вращается вокруг своей оси в противоположную сторону, чем остальные:
   1) Сатурн;
   2) Юпитер;
   3) Земля;
   4) Венера?

е) Первую удачную (безаварийную) посадку на Венеру совершил аппарат:
   1) Венера-9;
   2) Венера-экспресс;
   3) Кассини;
   4) Маринер-2?

ж) Смена времён года в Нижнем Новгороде происходит вследствие:
   1) годового цикла светимости Солнца;
   2) изменения расстояния от Земли до Солнца;
   3) наклона земной оси к плоскости эклиптики;
   4) прецессии плоскости земной орбиты вокруг Солнца?

2. Космический радиоинтерферометр «Радиоастрон» позволяет получать изображения с разрешением 7 микросекунд дуги. Какова должна быть масса чёрной дыры в центре галактики M87 (одна из самых массивных в местном сверхскоплении галактик), чтобы радиоинтерфермотр разглядел ближайшую окрестность этой дыры. Галактика M87 находится в 60 млн световых лет от Земли. На условной поверхности чёрной дыры вторая космическая скорость равна скорости света $c = 300$ тыс. км/с. Массу чёрной дыры выразите в массах Солнца, если известно, что радиус чёрной дыры солнечной массы равен 3 км.

3. Пульсар PSR J1748−2446ad вращается вокруг своей оси с периодом $T = 1{,}4$ миллисекунды (это пример наиболее быстрого вращения среди известных звёзд). Оцените минимальную допустимую среднюю плотность указанного пульсара, при которой силы гравитации ещё удержат звезду от разлёта. Гравитационная постоянная $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг $\cdot$ с^2), объём шара радиуса r равен $4\pi r^3/3$.

4. Звезда медленно теряет свою массу за счёт звёздного ветра. Найти, как зависят от оставшейся массы звезды:

а) радиус круговой орбиты планеты; б) период обращения планеты вокруг светила.
В данном процессе для планеты выполняется второй закон Кеплера: секторная скорость сохраняется постоянной при изменении массы звезды. В начальный момент времени радиус круговой орбиты планеты R_0, масса звезды M_0.

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Какое ядро не может образоваться в результате термоядерного синтеза:
   1) железо;
   2) титан;
   3) углерод;
   4) все могут?

б) Наиболее сильное магнитное поле обнаружено у планеты:
   1) Земля;
   2) Юпитер;
   3) Сатурн;
   4) Уран?

в) Галактика Млечный Путь:
   1) клочковатая;
   2) линзовидная;
   3) спиральная;
   4) эллиптическая?

г) В 2017 году Нобелевская премия по физике присуждена за обнаружение:
   1) гравитационных волн;
   2) реликтового излучения;
   3) ускоренного расширения Вселенной;
   4) экзопланет?

д) Если бы Земля перешла на орбиту с вдвое большим радиусом, то её сила притяжения к Солнцу уменьшилась:
   1) в 4 раза;
   2) в $2^{3/2}$ раз;
   3) в 2 раза;
   4) в $2^{1/2}$ раз?

е) Периодические переменные звёзды, блеск которых изменяется с периодом в несколько суток:
   1) новые;
   2) пульсары;
   3) сверхновые;
   4) цефеиды?

ж) Какая из реакций даёт основной вклад в энерговыделение Солнца:
   1) $n \to p + e^- + \bar{\nu}$;   2) $2\mathrm{H}_2 + \mathrm{O}_2 \to 2\mathrm{H}_2\mathrm{O}$;   3) ${}^3\mathrm{He} + {}^3\mathrm{He} \to {}^4\mathrm{He} + 2p$;
   4) ${}^{235}\mathrm{U} + n \to {}^{236}\mathrm{U}^* \to {}^{144}\mathrm{Ba}^* + {}^{89}\mathrm{Kr}^* + 3n$?

2. Оцените минимальную температуру водородной атмосферы, которую уже не могут удержать: а) Солнце; б) белый карлик; в) нейтронная звезда. Масса Солнца $M_\odot = 2{\cdot}10^{30}$ кг, белого карлика — $0{,}5M_\odot$, нейтронной звезды — $1{,}5M_\odot$. Радиус Солнца 700 тыс. км, белого карлика — 10 тыс. км, а нейтронной звезды — 10 км. Масса атома водорода (протона) $m = 1{,}7 \cdot 10^{-27}$ кг, гравитационная постоянная $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг $\cdot$ с^2), постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

3. Экспедиция отправляется к далёкой звёздной системе. На каком максимальном расстоянии от родного дома сентиментальный штурман всё ещё сможет разглядеть в иллюминатор невооружённым глазом удаляющееся Солнце? Ответ выразите в астрономических единицах. Видимая звёздная величина Солнца на Земле $m_\odot = -26{,}7$. Человек видит самые слабые звёзды с блеском $m = +6{,}5$. Для объектов с принимаемыми световыми потоками F_1 и F_2 разность их звёздных величин m_1 и m_2 определена равенством $m_1 - m_2 = -2{,}5\lg(F_1/F_2)$.

4. Оцените максимальное электрическое напряжение (в системе отсчёта, связанной с Землёй), которое возникает между различными точками металлического корпуса спутника из-за наличия магнитного поля Земли с индукцией порядка 50 микротесла. Примите диаметр спутника равным 1 м. Спутник находится на низкой экваториальной орбите и движется примерно с первой космической скоростью 8 км/с.

1. а) 2) Одна — Солнце.
б) 1) 1 астрономической единице.
в) 1) Большой Пёс.
г) 3) Уран.
д) 4) Малая Медведица.
е) 4) Седна.
ж) 3) Полярная звезда.

2. 1,85 км.

Длина большого круга составляет 360°, и в одном градусе 60 угловых минут. Поэтому в большом круге $360 \cdot 60 = 21\,600$ угловых минут. Экватор представляет собой пример большого круга. Следовательно, одна морская миля равна $40\,000$ км$/21\,600 = 1{,}85$ км.

3. а) Трое суток при сонаправленном вращении.
б) Пять суток при ретроградном вращении.

Без потери общности будем считать, что в экзопланетную новогоднюю полночь рассматриваемая точка обращена к Земле. Условие задачи означает, что за один год полуось «центр планеты — точка на экваторе» поворачивается относительно полуоси «звезда — Земля» на угол $360° \times n$, где $n = 4$. Соответственно, в момент времени t, отсчитываемый от новогодней полночи, угол между указанными полуосями составляет величину $360° \times n \times t/T$, где T — длительность одного года.

Указанный угол представляет собой сумму углов «Земля — звезда — центр планеты» и угла Φ между полуосями «звезда — центр планеты» и «центр планеты — точка на экваторе» при сонаправленном суточном и орбитальном вращении планеты. При ретроградном вращении вместо суммы углов следует взять их разность. В свою очередь, угол «Земля — звезда — центр планеты» изменяется на 360° за год и поэтому в произвольный момент t равен $360° \times t/T$. Тогда угол Φ равен $360° \times (n-1) \times t/T$ в случае сонаправленного вращения и $360° \times (n+1) \times t/T$ в случае ретроградного вращения.

Одним суткам соответствует изменение угла Φ на 360°. Поскольку за один год угол Φ изменяется на величину $360° \times (n-1)$ в случае сонаправленного вращения и $360° \times (n+1)$ в случае ретроградного вращения, то один год длится соответственно $n-1$ и $n+1$ суток в указанных случаях. В частном примере $n = 4$ получаем соответственно 3 и 5 суток.

4. Кинетическая энергия вращения Солнца больше энергии Юпитера.

Юпитер проходит длину своей орбиты $L_{\text{Ю}}$ за время $t_{\text{Ю}} = 12$ лет. Тогда его скорость $v_{\text{Ю}}$ равна $L_{\text{Ю}}/t_{\text{Ю}}$, а кинетическая энергия $K_{\text{Ю}} = M_{\text{Ю}}v_{\text{Ю}}^2/2 = M_{\text{Ю}}L_{\text{Ю}}^2/(2t_{\text{Ю}}^2)$, где $M_{\text{Ю}}$ — масса Юпитера.

Точки на экваторе Солнца проходят путь $L_{\text{С}}$, равный длине экватора, за время $t_{\text{С}} = 1$ мес. $= 1/12$ года. Соответственно, скорость экваториальных точек $v_{\text{С}}$ равна $L_{\text{С}}/t_{\text{С}}$. Если бы все точки Солнца двигались с указанной скоростью $v_{\text{С}}$, то кинетическая энергия вращения светила составила бы величину $K_{\text{С}\max} = M_{\text{С}}v_{\text{С}}^2/2 = M_{\text{С}}L_{\text{С}}^2/(2t_{\text{С}}^2)$, где $M_{\text{С}}$ — масса Солнца. Точки вне экватора на поверхности и внутри светила движутся медленнее, поэтому кинетическая энергия вращения Солнца $K_{\text{С}}$ меньше величины $K_{\text{С}\max}$.

Для оценки найдём сначала отношение кинетических энергий $K_{\text{С}\max}$ и $K_{\text{Ю}}$:

$$\frac{K_{\text{С}\max}}{K_{\text{Ю}}} = \frac{M_{\text{С}} L_{\text{С}}^2/(2t_{\text{С}}^2)}{M_{\text{Ю}} L_{\text{Ю}}^2/(2t_{\text{Ю}}^2)} = \frac{M_{\text{С}} r_{\text{С}}^2 t_{\text{Ю}}^2}{M_{\text{Ю}} r_{\text{Ю}}^2 t_{\text{С}}^2} = \frac{M_{\text{С}}}{M_{\text{Ю}}} \left(\frac{r_{\text{С}}}{r_{\text{Ю}}}\right)^2 \left(\frac{t_{\text{Ю}}}{t_{\text{С}}}\right)^2 =$$

$$= 1\,000 \times \frac{1}{1\,000^2} \times \left(\frac{12\ \text{лет}}{1/12\ \text{года}}\right)^2 = 144^2/1\,000 \approx 20 \gg 1. \quad (1)$$

В промежуточных преобразованиях в формуле (1) использовано то обстоятельство, что длина L окружности пропорциональна её радиусу r. Поэтому отношение длин L_1/L_2 двух произвольных окружностей равно отношению их радиусов r_1/r_2.

Полученное отношение (1) существенно превышает единицу (в 20 раз), поэтому учёт более медленного вращения приполярных областей и недр Солнца, а также увеличения плотности светила к центру не повлияет на заключение, что кинетическая энергия вращения Солнца больше.

Решение задач 10 класса

1. а) 3) Кома.

б) 2) Вдоль галактического экватора.

в) 4) Утром.

г) 2) Лунные приливы.

д) 4) Венера.

е) 1) Венера-9.

ж) 3) Наклона земной оси к плоскости эклиптики.

2. Больше 3,2 млрд масс Солнца.

Диаметр $2r$ чёрной дыры должен быть таким, чтобы видимый угловой размер дыры $2r/L$ с указанного расстояния

$$L = 60 \text{ млн св. лет} = (60 \cdot 10^6) \times (3 \cdot 10^5 \text{ км/с}) \times (365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ с}) = 5{,}67 \cdot 10^{20} \text{ км}$$

превышал разрешение

$$\theta = 7 \text{ микросекунд дуги} = (\pi/180) \times (7 \cdot 10^{-6})/(60 \cdot 60) \text{ рад} = 3{,}39 \cdot 10^{-11} \text{ рад}$$

радиоинтерферометра «Радиоастрон»:

$$2r/L > \theta. \tag{1}$$

Одинаковая вторая космическая скорость реализуется на поверхности тел, массы которых линейно пропорциональны их радиусам. Поэтому радиус r чёрной дыры пропорционален её массе M в первой степени и составляет величину $r_\odot\,(M/M_\odot)$, где $r_\odot = 3$ км — радиус чёрной дыры солнечной массы, $M_\odot$ — масса Солнца. Подставляем выражение $r = r_\odot\,(M/M_\odot)$ в неравенство (1), что даёт искомое ограничение на массу чёрной дыры:

$$\frac{M}{M_\odot} > \frac{L\theta}{2r_\odot} = \frac{(5{,}67 \cdot 10^{20} \text{ км}) \times (3{,}39 \cdot 10^{-11} \text{ рад})}{2 \cdot 3 \text{ км}} = 3{,}2 \cdot 10^9.$$

Данная величина полностью соответствует современным представлениям о сверхмассивных чёрных дырах в центральных галактиках сверхскоплений. Поэтому радиоинтерферометр «Радиоастрон» способен разглядеть окрестности чёрной дыры в галактике M87.

3. $\mathbf{7{,}2 \cdot 10^{16}}$ кг/м³.

Для удержания вещества от разлёта ускорение свободного падения на поверхности пульсара $g = GM/R^2$ (совместно с нормальной реакцией ниже лежащих слоёв звезды) должно обеспечивать необходимое максимальное центростремительное ускорение $a = V^2/R = (2\pi R/T)^2/R = 4\pi^2 R/T^2$ точек на экваторе, где M — масса пульсара, R — его радиус, $V = 2\pi R/T$ — экваториальная скорость. Выражаем массу M в виде $4\pi R^3\rho/3$ через плотность вещества ρ, что даёт эквивалентное выражение для ускорения свободного падения $g = 4\pi G\rho R/3$. Тогда указанное выше условие $g > a$ даёт искомое ограничение снизу на плотность вещества

$$\rho > \frac{3\pi}{GT^2} = \frac{3 \times 3{,}14}{[6{,}7 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)] \times (1{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ с})^2} = 7{,}2 \cdot 10^{16} \text{ кг/м}^3.$$

4. а) Радиус $\boldsymbol{R = R_0 M_0 / M \propto M^{-1}}$;
б) период $\boldsymbol{T = T_0 M_0^2 / M^2 \propto M^{-2}}$,
где $\boldsymbol{M}$ — оставшаяся масса звезды, $\boldsymbol{T_0 = 2\pi/\sqrt{GM_0/R_0^3}}$ — начальный период.

Медленная потеря звёздной массы означает, что планета успевает обернуться много раз вокруг светила за время уменьшения массы звезды, например, вдвое. В таком случае орбита планеты остаётся круговой, поскольку отсутствует какое-либо выделенное направление для ориентации большой оси эллиптической орбиты (в отличие от случая мгновенного изменения массы звезды). При движении по кругу радиуса R со скоростью V секторальная скорость (площадь, заметаемая отрезком «звезда — планета» в единицу времени) составляет величину $VR/2$ и в силу своего постоянства равна начальному значению $V_0R_0/2$, что задаёт равенство произведений

$$VR = V_0 R_0. \tag{2}$$

В свою очередь, уравнение Ньютона связывает центростремительное ускорение V^2/R планеты и силу гравитационного притяжения между звездой и планетой, делённой на массу планеты:

$$\frac{V^2}{R} = \frac{GM(t)}{R^2}\,, \tag{3}$$

где M — масса звезды в момент времени t, G — гравитационная постоянная. Делим левую и правую части уравнения Ньютона (3) на соответствующие части того же уравнения в начальный момент времени, что исключает гравитационную постоянную из части последующих выражений:

$$\frac{V^2}{R}\bigg/\frac{V_0^2}{R_0} = \frac{M(t)}{R^2}\bigg/\frac{M_0}{R_0^2}\,.$$

Подставляем в последнее равенство скорость $V = V_0R_0/R$, выраженную с помощью формулы (2), что определяет искомую зависимость для радиуса орбиты

$$R = R_0 M_0/M \propto M^{-1}. \tag{4}$$

Искомый период T обращения планеты равен длине орбиты $2\pi R$, делённой на скорость планеты V, которая согласно уравнению Ньютона (3) равна $\sqrt{GM/R}$:

$$T = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi R}{\sqrt{GM/R}} = \frac{2\pi\,(R/R_0)^{3/2}}{(M/M_0)^{1/2}\sqrt{GM_0/R_0^3}} = \frac{M_0^2}{M^2}\frac{2\pi}{\sqrt{GM_0/R_0^3}} \propto M^{-2},$$

где в промежуточных преобразованиях радиус R заменён на его временну́ю зависимость (4). В полученном выражении для периода T величина $2\pi/\sqrt{GM_0/R_0^3}$ есть не что иное, как начальный орбитальный период планеты T_0.

Решение задач 11 класса

1. а) 4) Все могут.
б) 2) Юпитер.
в) 3) Спиральная.
г) 1) Гравитационных волн.
д) 1) В 4 раза.
е) 4) Цефеиды.
ж) 3) $^3\mathrm{He} + {}^3\mathrm{He} \to {}^4\mathrm{He} + 2p$.

2. а) $1{,}6 \cdot 10^7$ К для Солнца;
б) $5{,}5 \cdot 10^8$ К для белого карлика;
в) $1{,}7 \cdot 10^{12}$ К для нейтронной звезды.

Тепловая энергия $mv_T^2/2$ одной частицы (атома водорода или протона) составляет $3kT/2$, что определяет характерную тепловую скорость v_T как $\sqrt{3kT/m}$. Звезда не удержит атмосферу, в которой характерная тепловая скорость одной частицы $v_T = \sqrt{3kT/m}$ превышает вторую космическую скорость $\sqrt{2GM/R}$, где T — температура атмосферы, M и R — масса и радиус звезды. Указанное условие определяет искомую нижнюю границу температуры

$$T = \frac{2GMm}{3kR}\,.$$

Подставляем в полученную формулу параметры звёзд: для Солнца

$$T_\text{С} = \frac{2 \times [6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \text{м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)] \times (2 \cdot 10^{30}\ \text{кг}) \times (1{,}7 \cdot 10^{-27}\ \text{кг})}{3 \times (1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \text{Дж/К}) \times (7 \cdot 10^8\ \text{м})} = 1{,}6 \cdot 10^7\ \text{К};$$

для белого карлика

$$T_\text{бк} = \frac{2 \times [6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \text{м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)] \times (0{,}5 \cdot 2 \cdot 10^{30}\ \text{кг}) \times (1{,}7 \cdot 10^{-27}\ \text{кг})}{3 \times (1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \text{Дж/К}) \times (10^7\ \text{м})} = 5{,}5 \cdot 10^8\ \text{К};$$

для нейтронной звезды

$$T_\text{нз} = \frac{4 \times [6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \text{м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)] \times (1{,}5 \cdot 2 \cdot 10^{30}\ \text{кг}) \times (1{,}7 \cdot 10^{-27}\ \text{кг})}{3 \times (1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \text{Дж/К}) \times (10^4\ \text{м})} = 1{,}7 \cdot 10^{12}\ \text{К}.$$

В случае нейтронной звезды тепловая энергия протона при минимальной температуре $T_\text{нз}$ достигает почти четверти от его энергии покоя mc^2:

$$\frac{3kT_\text{нз}/2}{mc^2} = \frac{GM_\text{нз}}{R_\text{нз}c^2} = \frac{[6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \text{м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)] \times (1{,}5 \cdot 2 \cdot 10^{30}\ \text{кг})}{(10^4\ \text{м}) \times (3 \cdot 10^8\ \text{м/с})^2} = 0{,}22,$$

где $c = 300$ тыс. км/с — скорость света. Такое соотношение означает, что радиус $R_\text{нз}$ нейтронной звезды с массой $M_\text{нз} = 1{,}5M_\odot$ всего лишь в 2 раза превышает радиус чёрной дыры $2GM_\text{нз}/c^2 = 4{,}5$ км с той же массой $M_\text{нз}$.

3. $4{,}4 \cdot 10^6$ а. е.

Через произвольную сферу, окружающую Солнце, проходит одинаковый поток излучения. Поэтому принимаемый поток солнечного излучения на расстоянии R от светила пропорционален отношению фиксированной площади приёмника $s_\text{пр}$ (например, зрачка глаза) к площади сферы радиуса R. Поскольку площадь указанной сферы пропорциональна квадрату её характерного линейного размера — радиуса, то принимаемый поток F обратно пропорционален квадрату расстояния R до Солнца. Тогда отношение принимаемых потоков F_1 и F_2 на расстояниях R_1 и R_2 равно обратному отношению квадратов расстояний:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2}\,. \tag{1}$$

Подставляем в определение разности звёздных величин $m_1 - m_2 = -2{,}5\lg(F_1/F_2)$ отношение потоков (1) на земной орбите и на максимальном расстоянии $R_{\max}$ видимости Солнца штурманом:

$$m_\odot - m = -2{,}5\lg\left[\left(\frac{R_{\max}}{1 \text{ а. е.}}\right)^2\right],$$

из чего находим искомое расстояние

$$\frac{R_{\max}}{1 \text{ а. е.}} = 10^{(m-m_\odot)/5} = 10^{[6{,}5-(-26{,}7)]/5} = 10^{6{,}64} = 4{,}4\cdot 10^6.$$

По значениям в километрах для астрономической единицы 1 а. е. = 150 млн км и светового года 1 св. год = (300 тыс. км/с) $\times$ ($365\cdot 24\cdot 3600$ с) = $9{,}5\cdot 10^{12}$ км можно определить расстояние $R_{\max}$ в световых годах:

$$\frac{R_{\max}}{1 \text{ св. год}} = \frac{R_{\max}}{1 \text{ а. е.}} \times \frac{1 \text{ а. е.}}{1 \text{ св. год}} = 4{,}4\cdot 10^6 \times \frac{1{,}5\cdot 10^8 \text{ км}}{9{,}5\cdot 10^{12} \text{ км}} \approx 70 \text{ св. лет.}$$

4. 0,4 вольта.

На экваторе индукция $\vec{B}$ магнитного поля направлена вдоль поверхности Земли по линиям «юг — север». В таком случае спутник летит строго перпендикулярно линиям индукции. На свободные заряды (электроны) в корпусе спутника действует сила Лоренца $|qvB|$, направленная вертикально (вниз к Земле для электронов в случае движения спутника с запада на восток; $q < 0$ — заряд электрона, v — скорость спутника). Под действием силы Лоренца электроны перераспределяются в корпусе до тех пор, пока возникшее из-за перераспределения зарядов электрическое поле $\vec{E}$ не создаст силу $|qE|$, которая скомпенсирует силу Лоренца $|qvB|$. Таким образом, создаваемая электронами напряжённость электрического поля направлена вертикально вниз (как и сила Лоренца), а её абсолютная величина E равна vB. Таким образом, пространственно однородное в пределах корпуса спутника электрическое поле создаёт разность потенциалов $U = ED$ между самой низкой и высокой точками спутника:

$$U = ED = vBD = (8\cdot 10^3 \text{ м/с}) \times (50\cdot 10^{-6} \text{ Тл}) \times (1 \text{ м}) = 0{,}4 \text{ В},$$

где D — диаметр спутника.

Условия и решение задач
Открытой городской олимпиады по астрономии, астрофизике и физике космоса им. Бориса Васильевича Кукаркина
03 февраля 2019 г.

8–9 классы

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Какой объект рождён вне Солнечной системы:
   1) Ква́вар;
   2) комета Галлея;
   3) Маке́маке;
   4) Оумуаму́а?

б) Самая большая планета в Солнечной системе:
   1) Земля;
   2) Солнце;
   3) Хаумея;
   4) Юпитер?

в) Орбита какого объекта сильнее всего отличается от окружности:
   1) Земли;
   2) Меркурия;
   3) Плутона;
   4) Урана?

г) Самый большой из спутников Юпитера:
   1) Европа;
   2) Ио;
   3) Ганимед;
   4) Каллисто?

д) Звезда Вега находится в созвездии:
   1) Лебедь;
   2) Лира;
   3) Орёл;
   4) Орион?

е) Сколько людей побывало на Луне:
   1) двенадцать;
   2) семь;
   3) три;
   4) ни одного?

ж) Какой из объектов не является карликовой планетой:
   1) Меркурий; 2) Плутон; 3) Церера; 3) Эрида?

2. Нижегородская область простирается с запада на восток от $41°46{,}6'$ в. д. до $47°46{,}3'$ в. д. Определите ширину нашей области по линии запад — восток в километрах, если широта Нижнего Новгорода примерно 56°. Длина земного экватора 40 тыс. км.

3. Две космические экспедиции высадились на планету Акронис на одинаковых зондах и обнаружили, что по отдельности не могут взлететь с неё. На первом зонде не хватает 5 т горючего, а на втором объём топлива выше половины от минимального необходимого уровня лишь на 1 т. Тогда космонавты решили объединить горючее и взлететь на одном зонде. После заполнения баков до минимального необходимого уровня на втором зонде осталось ещё 0,5 т горючего. Каково минимальное необходимое количество топлива для успешного взлёта?

4. а) Определите массу воздуха в земной атмосфере, приходящуюся на 1 м^2 поверхности планеты. Атмосфера давит на 1 м^2 поверхности с силой 10^5 Н, ускорение свободного падения 10 м/с^2.

б) Вычислите высоту земной атмосферы, если бы при подъёме плотность воздуха оставалась такой же, как у поверхности Земли, — 1,3 кг/м^3. Сравните полученное значение с высотой Эвереста 8 848 м.

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) У какой из указанных планет наименьшее количество естественных спутников:
   1) Венера;
   2) Земля;
   3) Марс;
   4) Сатурн?

б) В какое время суток можно наблюдать восход узкого месяца «рожками» вверх:
   1) утром;
   2) в полдень;
   3) вечером;
   4) в полночь?

в) Подброшенный на Земле вертикально вверх мяч вернулся через 4 с. В полёте ускорение тела:
   1) монотонно уменьшалось;
   2) оставалось постоянным;
   3) монотонно возрастало;
   4) имело противоположное направление при подъёме и спуске?

г) Компонеты разных спектральных классов вращаются в двойной звёздной системе вокруг:
   1) точки, где силы притяжения к каждой из звёзд равны;
   2) середины отрезка между центрами звёзд;
   3) точки, где угловые размеры звёзд равны;
   4) центра масс системы?

д) Ускорение свободного падения на орбите Международной космической станции:
   1) нулевое;
   2) 5 м/с^2;
   3) 10 м/с^2;
   4) 20 м/с^2?

е) Крупнейший из найденных метеоритов «Гоба» объёмом 9 м^3 имел после падения массу около:
   1) 700 кг;
   2) 7 т;
   3) 70 т;
   4) 700 т?

ж) Эклиптика проходит:
   1) по галактическому экватору; 2) по зодиакальному кругу;
   3) по Млечному пути; 4) по небесному экватору?

2. В ближайшем к нам крупном скоплении галактик Кома периферийные галактики движутся вокруг центра данной системы с характерной скоростью $2 \cdot 10^6$ м/с. а) Оцените массу скопления в массах Солнца $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг, если характерный радиус системы $R = 10^{23}$ м. б) Оцените долю тёмной материи в полученной массе скопления, если масса видимого вещества в системе $M_б = 3 \cdot 10^{14} M_\odot$. Гравитационная постоянная $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг $\cdot$ с^2).

3. В настоящее время зимнее солнцестояние примерно совпадает с моментом, когда Земля проходит перигелий — точку максимального сближения с Солнцем в своём движении по эллиптической орбите. Используя первый и второй законы Кеплера, определите, насколько «полугодовой» временной интервал от весеннего до осеннего равноденствия отличается от аналогичного интервала от осеннего до весеннего равноденствия. Фокус эллиптической орбиты (где находится Солнце) смещён от центра эллипса на 1,7 % в единицах среднего радиуса орбиты. Площадь окружности с радиусом r равна πr^2.

4. Звездолёт представляет собой головной отсек с массой m_0, к которому присоединена

цепочка из N блоков-ступеней с геометрически нарастающими массами $m_1 = m_0$, $m_2 = 2m_0$, $m_3 = 4m_0 \ldots$ $m_N = 2^{N-1}m_0$. Головной отсек соединён с первой ступенью сжатой пружиной, потенциальная энергия которой $E_1 = E_0$. В свою очередь, остальные блоки-ступени последовательно соединены между собой в цепочку $N-1$ сжатыми пружинами с геометрически нарастающей потенциальной энергией $E_2 = 2E_0$, $E_3 = 4E_0 \ldots$ $E_N = 2^{N-1}E_0$. Вдали от притягивающих тел звездолёт приводится в движение последовательным освобождением пружин, начиная с хвоста, и сбросом блоков-ступеней с пружинами в момент снятия напряжения в пружине. Сначала освобождается хвостовая N-я пружина, в момент её распрямления до несжатого состояния она отцепляется от звездолёта вместе с идущим за ней концевым N-м блоком-ступенью. Далее указанный процесс последовательно повторяется для $(N-1)$-й, $(N-2)$-й и т. д. пружин и блоков-ступеней. Какую скорость приобретёт головной отсек после окончания работы всех ступеней «двигателя»?

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) На поверхности какого из указанных тел атмосферное давление наибольшее:
1) Европа;
2) Земля;
3) Марс;
4) Титан?

б) Свет от ближайшей к Солнцу звезды распространяется до Земли примерно:
1) за 4 года;
2) за 4 десятилетия;
3) за 4 столетия;
4) за 4 тысячелетия?

в) По окончании своего термоядерного горения Солнце превратится:
1) в белый карлик;
2) в нейтронную звезду;
3) в чёрную дыру;
4) в пустое место (рассеется в космосе)?

г) Площадь поверхности планеты радиуса $2R$ больше площади планеты радиуса R:
1) в 1,4 раза;
2) в 2 раза;
3) в 4 раза;
4) в 8 раз?

д) Красноватый оттенок Луны во время полного лунного затмения обусловлен:
1) рассеянием света в атмосфере Луны;
2) собственным излучением Луны;
3) рассеянием света в атмосфере Земли;
4) отражением света от поверхности Земли?

е) Ускорение свободного падения внутри Земли на половине радиуса планеты по сравнению с величиной 10 м/с^2:
1) в 4 раза меньше;
2) в 2 раза меньше;
3) в 2 раза больше;
4) в 4 раза больше?

ж) В системе центра масс Солнечной системы импульс Юпитера по сравнению с импульсом Солнца:
1) существенно больше; 2) примерно такой же; 3) существенно меньше?

2. Пусть в результате пролёта звезды сквозь Солнечную систему Юпитер перешёл с современной орбиты с радиусом $L_0 = 5{,}2$ а. е. на орбиту с радиусом $L' = 0{,}1$ а. е. а) Оцените равновесную температуру поверхности Юпитера на новой орбите. б) Избежит ли планета катастрофического испарения из-за нагрева Солнцем? Юпитер в основном состоит из молекулярного водорода, масса протона (ядра атома водорода) $m_\text{р} = 1{,}7{\cdot}10^{-27}$ кг, радиус планеты $R_\text{Ю} = 70\,000$ км, ускорение свободного падения на поверхности $g_\text{Ю} = 25$ м/с^2, современная температура планеты $T_0 = 130$ К, постоянная Больцмана $k_\text{Б} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К. Считать, что поток собственного излучения планеты с 1 м^2 поверхности пропорционален температуре в четвёртой степени.

3. Пусть в начальный момент времени скорость v пылинок однородного шарового облака направлена радиально и пропорциональна расстоянию r до центра облака: $\vec{v} = H_0\vec{r}$, где H_0 — постоянная. При какой максимальной начальной плотности пыли облако неограниченно разлетится в окружающее пространство? Объём шара радиуса R равен $4\pi R^3/3$.

4. Определите разность звёздных величин Марса в моменты его соединения и противостояния с Солнцем (соответственно, максимального и минимального удаления планеты от Земли), если указанные события происходят с интервалом в $t = 390$ суток. Разность

звёздных величин объектов с принимаемыми потоками F_1 и F_2 определена равенством $m_1 - m_2 = -2{,}5\lg(F_1/F_2)$.

1. а) 4) Оумуаму́а.
б) 4) Юпитер.
в) 3) Плутона.
г) 3) Ганимед.
д) 2) Лира.
е) 1) Двенадцать.
ж) 1) Меркурий.

2. 370 км.

Широта $\lambda = 56°$ представляет собой окружность с центром на оси вращения Земли. Расстояние от точек на широте λ до оси вращения Земли равно $R\cos\lambda$, где R — радиус Земли. Таким образом, длина окружности в виде широты λ меньше длины экватора $L = 40$ тыс. км в $1/\cos\lambda$ раз и равна $L\cos\lambda$. Протяжённость Нижегородской области с запада на восток составляет $\Delta\varphi = 47°46{,}3' - 41°46{,}6' \approx 6°$, или $\Delta\varphi/360° \approx 1/60$ часть длины окружности в виде широты λ. Получаем искомую ширину Нижегородской области $(L\cos\lambda)\,\Delta\varphi/360° \approx 40\,000 \cdot 0{,}56 \cdot (1/60) \approx 370$ км.

3. 9 т.

Обозначим за x — искомое минимальное необходимое количество топлива. Тогда на первом зонде осталось $x - 5$ т горючего, а на втором — $0{,}5x + 1$ т. Суммарное количество топлива на двух зондах $(x - 5\text{ т}) + (0{,}5x + 1\text{ т}) = 1{,}5x - 4$ т превышает уровень x на 0,5 т, что определяет уравнение на величину x:

$$1{,}5x - 4\text{ т} = x + 0{,}5\text{ т}.$$

Решение данного уравнения $x = 9$ т.

4. а) 10 т;
б) 8 км, порядка высоты Эвереста.

а) На атмосферный столб с сечением $s = 1$ м^2 и искомой массой m действует сила тяжести mg и нормальная реакция поверхности Земли N ($g = 10$ м/с^2 — ускорение свободного падения). По третьему закону Ньютона реакция N равна силе давления воздуха на поверхность 10^5 Н. В силу отсутствия вертикального движения воздуха, сила тяжести mg и реакция N компенсируют друг друга: $mg = N$. Получаем искомую массу воздуха на 1 м^2 земной поверхности:

$$m = N/g = 10^5\text{ Н}/(10\text{ м/с}^2) = 10^4\text{ кг} = 10\text{ т}. \qquad (1)$$

б) Если бы плотность воздуха не уменьшалась с высотой, то столб воздуха имел бы объём sh, а масса m воздуха в нём равнялась ρsh, где $\rho = 1{,}3$ кг/м^3, h — искомая высота. Приравнивая величину ρsh и значение (1), находим высоту

$$h = \frac{N}{\rho sg} = \frac{10^5\text{ Н}}{1{,}3\text{ кг/м}^3 \times 1\text{ м}^2 \times 10\text{ м/с}^2} \approx 7\,700\text{ м} \approx 8\text{ км}.$$

Данное значение одного порядка величины с высотой Эвереста.

Решение задач 10 класса

1. а) 1) Венера.

б) 1) Утром.

в) 2) Оставалось постоянным.

г) 4) Центра масс системы.

д) 3) 10 м/с^2.

е) 3) 70 т.

ж) 2) По зодиакальному кругу.

2. а) $3 \cdot 10^{15} M_\odot$;

б) 90 %.

При движении галактики со скоростью v по окружности с радиусом R центростремительное ускорение v^2/R обусловлено силой гравитации скопления и поэтому совпадает с ускорением свободного падения GM/R^2, где M — искомая масса скопления. Уравнение $v^2/R = GM/R^2$ определяет массу $M = v^2R/G$, которая переписывается в единицах массы Солнца как

$$\frac{M}{M_\odot} = \frac{v^2R}{GM_\odot} = \frac{(2 \cdot 10^6 \text{ м/с})^2 \times 10^{23} \text{ м}}{[6{,}7 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)] \times 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}} = 3 \cdot 10^{15}.$$

Тогда доля видимого вещества составляет $M_б/M = 3 \cdot 10^{14} M_\odot/(3 \cdot 10^{15} M_\odot) = 0{,}1 = 10$ %, а остальные 90 % приходятся на тёмное вещество.

3. 7,9 суток.

В моменты зимнего и летнего солнцестояния линия Солнце — Земля составляет минимальный угол с осью суточного вращения планеты. Таким образом, в дни солнцестояния Земля находится на прямой SS', которая проходит через Солнце параллельно проекции оси суточного вращения планеты на плоскость эклиптики, — в точках пересечения указанной прямой SS' с эллиптической орбитой. В дни равноденствия линия Солнце — Земля направлена перпендикулярно оси суточного вращения планеты. Соответственно, в дни равноденствия Земля находится на прямой EE', которая проходит через Солнце перпендикулярно прямой солнцестояний SS'.

Строго говоря, ось суточного вращения Земли прецессирует примерно вокруг нормали к эклиптике с сохранением угла наклона к плоскости орбиты вокруг светила (под воздействием приливной силы со стороны Луны). Период прецессии примерно 26 тыс. лет. Соответственно, линии SS' и EE' солнцестояний и равноденствий поворачиваются вместе с прецессирующей осью суточного вращения Земли, тогда как большая и малая оси эллиптической орбиты Земли остаются неподвижными относительно звёзд на данном масштабе времени. Таким образом, точки солнцестояний и равноденствий медленно перемещаются по эллиптической орбите Земли с периодом 26 тыс. лет.

Согласно условию, в настоящее время Земля примерно проходит перигелий в день зимнего солнцестояния. Поэтому линия солнцестояний SS' примерно совпадает с большой осью эллипса земной орбиты. Тогда линия равноденствий EE' проходит через Солнце (фокус эллипса) примерно параллельно малой оси эллипса. Линия равноденствий EE' смещена относительно малой оси эллипса вместе с Солнцем на расстояние eR, где $e = 1{,}7\ \% = 0{,}017$ — так называемый эксцентриситет эллипса, R — половина длины большой оси эллипса.

В силу второго закона Кеплера, искомые временные интервалы между равноденствиями пропорциональны площадям фигур, на которые рассекает эллипс линия равноденствий EE'. Бóльшая из фигур представляет собой половину эллипса, отсекаемого малой полуосью, с добавлением полосы K между малой осью эллипса и параллельной ей линией равноденствий EE'. Тогда как мéньшая фигура представляет собой вторую половину эллипса с вычитанием полосы K.

Обозначим за $S_{1/2}$ площадь половины эллипса, а S_K площадь полосы K. Тогда один земной год пропорционален площади всего эллипса $2S_{1/2}$, а интервал от весеннего до осеннего равноденствия — площади $S_{1/2} + S_K$ бóльшей из вышеуказанных фигур (содержащей афелий). Таким образом, интервал от весеннего до осеннего равноденствия в годах равен доли $(S_{1/2} + S_K)/(2S_{1/2}) = 1/2 + S_K/(2S_{1/2})$, которую занимает соответствующая фигура от всей площади эллипса. Аналогично находим интервал в годах от осеннего до весеннего равноденствия: $1/2 - S_K/(2S_{1/2})$. Разность между «полугодиями» равна $\{[1/2 + S_K/(2S_{1/2})] - [1/2 - S_K/(2S_{1/2})]\}$ лет $= S_K/S_{1/2}$ лет.

Для расчёта отношения $S_K/S_{1/2}$ площадь $S_{1/2}$ половины эллипса можно заменить площадью $\pi R^2/2$ половины окружности с радиусом R (в силу малого отличия эллипса от окружности). В свою очередь, полоса K близка к прямоугольнику со сторонами $2R$ и eR, поэтому её площадь $S_K \approx 2eR^2$. Получаем требуемое отношение $S_K/S_{1/2} \approx 2eR^2/(\pi R^2/2) = 4e/\pi$ и искомое отличие полугодий

$$4e/\pi \text{ лет} = (4e/\pi) \times 365 \text{ сут} = 4 \times 0{,}017 \times 365/3{,}14 = 7{,}9 \text{ сут.}$$

По «расписанию» солнцестояний и равноденствий на интернет-странице ru.wikipedia.org/wiki/Равноденствие можно вычислить, что в настоящее время разность между «полугодиями» равна 7,6 суток, что отличается менее чем на 5 % от полученного выше ответа.

4. $\boldsymbol{N\sqrt{E_0/m_0}}$**.**

Методом индукции можно проверить, что масса головного отсека и следующих за ней k ступеней равна массе $(k+1)$-й ступени: $m_0 = m_1$, $m_0+m_1 = 2m_1 = m_2$, $m_0+m_1+m_2 = m_2 + m_2 = 2m_2 = m_3$, $m_0 + \ldots + m_k = m_k + m_k = 2m_k = m_{k+1}$. Тогда распрямляясь, $(k+1)$-я пружина разводит в противоположные стороны следующую за ней $(k+1)$-ю ступень с массой $m_{k+1} = 2^k m_0$ и часть звездолёта с той же массой $2^k m_0$, состоящую из головного отсека и остающихся k пружин. Такое разделение удобно рассматривать в инерциальной системе отсчёта, в которой звездолёт покоится до начала работы $(k+1)$-й пружины (по окончании отделения $(k+2)$-й пружины и ступени). В силу вышеуказанного равенства масс, пружина сообщает одинаковые (противоположно направленные) скорости $(k+1)$-й ступени и остальной части звездолёта с головным отсеком. Центр инерции пружины остаётся на месте.

Потенциальная энергия пружины $E_{k+1} = 2^k E_0$ переходит в суммарную кинетическую энергию $(k+1)$-й ступени и остальной части звездолёта $2 \times (m_{k+1}u^2/2) = 2^k m_0 u^2$, что определяет приобретаемую скорость $u = \sqrt{E_0/m_0}$ отделяемой ступени и остальной части звездолёта относительно центра инерции пружины. (Вышеуказанная кинетическая энергия есть не что иное, как возникающая энергия относительного движения частей звездолёта, тогда как энергия движения центра масс двух рассматриваемых блоков звездолёта сохраняется в любой системе отсчёта.) Найденная скорость u представляет собой изменение скорости головного отсека звездолёта в одной из инерциальных систем отсчёта за счёт работы $(k+1)$-й пружины. Изменение скорости не зависит от системы отсчёта. Поэтому в исходной системе отсчёта (в которой полностью укомплектованный звездолёт покоился в начальный момент времени) скорость головного отсека возрастает на одну и ту же величину u после работы каждой из пружин. Таким образом, после распрямления всех N пружин головной отсек приобретёт скорость $Nu = N\sqrt{E_0/m_0}$.

Решение задач 11 класса

1. а) 4) Титан.
б) 1) За 4 года.
в) 1) В белый карлик.
г) 3) В 4 раза.
д) 3) Рассеянием света в атмосфере Земли.
е) 2) В 2 раза меньше.
ж) 2) Примерно такой же.

2. а) 940 К;
б) да, избежит.

Температура верхних слоёв Юпитера определяется балансом потоков падающего на планету солнечного излучения и собственного излучения планеты. Планета перехватывает от полного потока излучения светила (исходящего во все направления) часть, которая равна отношению поперечного сечения планеты к площади сферы, содержащей орбиту планеты как свой большой круг. Поэтому при переходе на новую орбиту, часть перехватываемого Юпитером солнечного потока увеличивается обратно пропорционально квадрату линейного размера орбиты, например, квадрату её радиуса — в $(L_0/L')^2$ раз. В свою очередь, поток собственного излучения планеты должен увеличиться во столько же раз. Таким образом, четвёртая степень температуры планеты возрастёт в $(L_0/L')^2$ раз, что определяет уравнение на температуру T' на новой орбите:

$$\frac{T'^4}{T_0^4} = \frac{L_0^2}{L'^2}\,,$$

а следовательно, и саму температуру $T' = T_0\sqrt{L_0/L'} = 130\sqrt{5{,}2/0{,}1}$ К $= 940$ К.

При такой температуре водород остаётся в молекулярном состоянии (энергия связи атомов в молекуле 4,5 эВ). Планета избежит катастрофического испарения, если тепловая скорость молекул водорода окажется меньше второй космической скорости. Для этого характерная тепловая кинетическая энергия молекул $3k_{\text{Б}}T'/2$ должна быть меньше их гравитационной потенциальной энергии $G\,(2m_{\text{p}})\,M_{\text{Ю}}/R_{\text{Ю}} = 2m_{\text{p}}g_{\text{Ю}}R_{\text{Ю}}$ на поверхности планеты (в последнем равенстве использовано выражение для ускорения свободного падения $g_{\text{Ю}} = GM_{\text{Ю}}/R_{\text{Ю}}^2$; масса молекулы водорода равна $2m_{\text{p}}$). Получаем условие на температуру

$$T' < \frac{4m_{\text{p}}g_{\text{Ю}}R_{\text{Ю}}}{3k_{\text{Б}}} = \frac{4\times(1{,}7\cdot10^{-27}\ \text{кг})\times(25\ \text{м/с}^2)\times(7\cdot10^{7}\ \text{м})}{3\times1{,}38\cdot10^{-23}\ \text{Дж/К}} \approx 2{,}9\cdot10^{5}\ \text{К}.$$

Данное условие выполнено для найденной температуры $T' = 940$ К, поэтому планета избежит катастрофического испарения.

3. $3H_0^2/(8\pi G)$.

Пылинка, находившаяся изначально в точке $\vec{r}$, движется в поле тяготения частиц, расположенных в нулевой момент времени в шаре радиуса r. Гравитационное поле внешних слоёв облака взаимно компенсируется и обращается в нуль. Таким образом, пылинка летит как в гравитационном поле точечного тела с массой $M = 4\pi r^3\rho/3$, где ρ — начальная плотность облака. Пылинка будет неограниченно удаляться от центра облака, если скорость частицы $v = H_0 r$ превысит вторую космическую скорость для начальной удалённости r. Такое условие эквивалентно требованию, что кинетическая энергия пылинки $mv^2/2 = mH_0^2 r^2/2$ больше потенциальной энергии $GmM/r = 4\pi Gm\rho r^2/3$, где m — вспомогательная масса пылинки, G — гравитационная постоянная. Получаем условие бесконечного убегания пылинки

$$H_0^2/2 > 4\pi G\rho/3,$$

которое не зависит от начальной удалённости r (и массы пылинки). Приведённое условие ограничивает плотность облака сверху и тем самым определяет искомую максимальную плотность

$$\rho_{\text{макс}} = 3H_0^2/(8\pi G),$$

при которой частицы преодолеют собственное притяжение и облако разлетится.

4. 3,4.

Поскольку Марс является внешней по отношению к Земле планетой, то в моменты его соединения и противостояния с Солнцем к наблюдателю повёрнута вся его освещённая поверхность. В таком случае принимаемый поток излучения от Марса обратно пропорционален квадрату расстояния между Марсом и Землёй. В моменты противостояния и соединения Марс удалён от Земли соответственно на минимальное и максимальное возможное расстояние $R_{\text{М}} - R_{\text{З}}$ и $R_{\text{М}} + R_{\text{З}}$, где $R_{\text{М}}$ и $R_{\text{З}}$ — радиусы орбит Марса и Земли. В соответствии с вышеизложенным, получаем отношение между потоками $F_{\text{п}}$ и $F_{\text{с}}$ в моменты противостояния и соединения через радиусы орбиты планет:

$$\frac{F_{\text{п}}}{F_{\text{с}}} = \frac{(R_{\text{М}} + R_{\text{З}})^2}{(R_{\text{М}} - R_{\text{З}})^2} = \frac{(1 + R_{\text{З}}/R_{\text{М}})^2}{(1 - R_{\text{З}}/R_{\text{М}})^2}\,,$$

и искомую разность звёздных величин Марса:

$$m_{\text{с}} - m_{\text{п}} = 2{,}5\lg\left(\frac{F_{\text{п}}}{F_{\text{с}}}\right) = 5\lg\left(\frac{1 + R_{\text{З}}/R_{\text{М}}}{1 - R_{\text{З}}/R_{\text{М}}}\right), \tag{1}$$

которые зависят от отношения $R_{\text{З}}/R_{\text{М}}$.

Отношение $R_{\text{З}}/R_{\text{М}}$ связано третьим законом Кеплера

$$\frac{R_{\text{З}}^3}{R_{\text{М}}^3} = \frac{T_{\text{З}}^2}{T_{\text{М}}^2}$$

с периодами обращения планет вокруг Солнца $T_{\text{З}}$ и $T_{\text{М}}$ (зависимость периода обращения планеты от расстояния до Солнца выводится из уравнения Ньютона для движения по окружности в гравитационном поле точечного тела). Тогда разность звёздных величин (1) перепишется через отношение периодов $T_{\text{З}}/T_{\text{М}}$ в виде

$$m_{\text{с}} - m_{\text{п}} = 5\lg\left[\frac{1 + (T_{\text{З}}/T_{\text{М}})^{2/3}}{1 - (T_{\text{З}}/T_{\text{М}})^{2/3}}\right]. \tag{2}$$

В момент противостояния радиус-векторы планет, проведённые от Солнца, сонаправлены. Далее каждый из радиус-векторов за время t после противостояния поворачивается на угол $2\pi t/T_{\text{З}}$ и $2\pi t/T_{\text{М}}$ для Земли и Марса соответственно. К моменту соединения Марса с Солнцем угол между радиус-векторами $2\pi t/T_{\text{З}} - 2\pi t/T_{\text{М}}$ должен составить π, что определяет уравнение на интервал τ между противостояниями и соединениями:

$$2\pi\tau\left(\frac{1}{T_{\text{З}}} - \frac{1}{T_{\text{М}}}\right) = \pi,$$

или

$$\frac{\tau}{T_З}\left(1-\frac{T_З}{T_М}\right)=\frac{1}{2}\,.$$

Из данного уравнения находим связь между отношениями периодов $T_З/T_М$ и $T_З/\tau$:

$$\frac{T_З}{T_М}=1-\frac{T_З}{2\tau}\,,$$

которое подставляем в выражение (2) и получаем искомую разность звёздных величин:

$$m_с-m_п=5\lg\left\{\frac{1+[1-T_З/(2\tau)]^{2/3}}{1-[1-T_З/(2\tau)]^{2/3}}\right\}=5\lg\left\{\frac{1+[1-365/(2\times 390)]^{2/3}}{1-[1-365/(2\times 390)]^{2/3}}\right\}=3{,}4,$$

где подставлено время $\tau=390$ сут и длительность земного года $T_З=365$ сут.

Приведённый ответ справедлив в отношении «среднестатистического» противостояния, когда расстояние между планетами равно 0,52 а. е. Поскольку орбиты планет отличаются от окружности, расстояние между телами заметно варьируется от противостояния к противостоянию от 0,37 до 0,67 а. е. — почти в 2 раза (для соединений относительная вариация расстояний существенно меньше), см. www.astronet.ru/db/msg/1418882 . Поэтому разность звёздных величин Марса в соединении и противостоянии, строго говоря, варьируется примерно от 4,2 (в случае великого противостояния) до 2,8.

Условия и решение задач
Открытой городской олимпиады по астрономии, астрофизике и физике космоса им. А. Ф. Тарасова
02 февраля 2020 г.

8–9 классы

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Фаза Луны во время солнечного затмения:
1) первая четверть;
2) полнолуние;
3) третья четверть;
4) новолуние?

б) Ближайшая к Солнцу точка орбиты планеты:
1) апоастр;
2) восходящий узел;
3) перигелий;
4) эксцентриситет?

в) Во время солнечного затмения на Земле, температура поверхности Луны:
1) не изменяется;
2) понижается;
3) увеличивается?

г) Какое из расстояний наибольшее:
1) длина экватора;
2) расстояние от Земли до Луны;
3) высота полёта Международной космической станции?

д) Астрономическая единица равна расстоянию:
1) от Земли до Луны;
2) от Земли до Солнца;
3) от Солнца до звезды Проксима Центавра;
4) от Солнца до центра Галактики?

е) В 2019 году Роскосмос запустил спутник, который увидит все крупные скопления галактик во Вселенной:
1) «Радиоастрон»;
2) «Резонанс»;
3) «Спектр — рентген — гамма»;
4) «Миллиметрон»?

ж) Количество созвездий на всей небесной сфере:
1) 18; 2) 48; 3) 88; 4) 128?

2. Определите минимальную географическую широту местности, в которой возможен полярный день. Земная ось составляет угол $\varepsilon = 66°34'$ с плоскостью движения нашей планеты вокруг Солнца. Луч от звезды преломляется в земной атмосфере на угол $\gamma = 35'$, когда светило подходит к горизонту. Видимый угловой диаметр Солнца $\alpha = 30'$.

3. Две планеты обращаются вокруг звезды с периодами T_1 и T_2. Через какой промежуток времени повторяется одинаковое относительное расположение планет в системе?

4. Гранит не разрушается при максимальном давлении $3 \cdot 10^8$ Па. Оцените максимальную возможную высоту гор на Земле, если бы она определялась только прочностью их вещества типа гранита с плотностью 3 т/м^3. Сравните полученное значение с высотой Эвереста 8 848 м.

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) В честь кого из учёных-астрофизиков пока не назвали космический телескоп:
   1) Кеплер;
   2) Piблз;
   3) Спитцер;
   4) Хаббл?

б) Траектории большинства комет, когда-либо увиденных людьми:
   1) гиперболические;
   2) круговые;
   3) параболические;
   4) эллиптические?

в) Наиболее яркая планета на небе (в максимуме своего блеска):
   1) Венера;
   2) Марс;
   3) Сатурн;
   4) Юпитер?

г) Возраст Земли:
   1) 6,1 тыс. лет;
   2) 3,8 млн лет;
   3) 4,6 млрд лет;
   4) 14,7 млрд лет?

д) Космическое тело, упавшее на поверхность Земли:
   1) метеор;
   2) болид;
   3) комета;
   4) метеорит?

е) Какая планета быстрее всех совершает оборот вокруг своей оси:
   1) Меркурий;
   2) Венера;
   3) Марс;
   4) Юпитер?

ж) Сколько экзопланет открыто на начало 2020 года:
   1) примерно 80; 2) чуть больше 1 000;
   3) от 4 000 до 10 000; 4) более 10 000?

2. Гравитационные волны впервые были зарегистрированы 14.09.2015 с помощью лазерно-интерферометрической системы LIGO, которая состоит из обсерватории в Ливингстоне (30,6° с. ш., 90,8° з. д.) и Хэнфорде (46,5° с. ш., 119,4° з. д.). Сначала сигнал зарегистрировала обсерватория в Ливингстоне, а спустя 7 миллисекунд — в Хэнфорде. Объясните, чем обусловлена такая задержка, и определите максимальную возможную высоту источника сигнала над местным горизонтом (для воображаемого наблюдателя, находящегося точно по середине между Левингстоном и Хэнфордом). Гравитационная волна распространяется со скоростью света $c = 300\,000$ км/с. Длина земного экватора 40 000 км.

3. Космический корабль достиг системы из двух звёзд, выключил двигатели и лёг в дрейф на отрезке между светилами так, что система из указанных трёх объектов вращается без изменения расстояний между ними. Определите отношение масс звёзд $\alpha = M_2/M_1$, если известно отношение расстояний R_2 и R_1 от корабля до каждой из звёзд $\eta = R_2/R_1$.

4. Вимп (от англ. WIMP — weakly interacting massive particle) — слабо взаимодействующая массивная частица. Вимпы рассматриваются кандидатами на роль холодной тёмной материи, которая даёт около четверти вклада в общую плотность Вселенной. В некоторых теориях вимпы представляют собой нестабильные частицы с периодом полураспада больше современного возраста Вселенной. Пусть при распаде вимпа образуется фотон высокой энергии. Сколько примерно фотонов проходят за 1 с сквозь площадку 1 м^2 в Солнечной системе от распада вимпов в крупном скоплении галактик Кома (площадка ориентирована в направлении на источник с вимпами)? Полная масса скопления $M = 3 \cdot 10^{15} M_\odot$

($M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг — масса Солнца), и 90 % этой массы содержится в тёмной материи. Расстояние до скопления 100 Мпк (1 пк $= 3 \cdot 10^{16}$ м). Массу вимпов $m_{\text{в}}$ принять равной 50 массам протона $m_{\text{p}} = 1{,}7 \cdot 10^{-27}$ кг, а период полураспада вимпов $T_{1/2} = 10^{13}$ лет. Период полураспада — время, за которое распадается половина частиц. Площадь сферы радиуса r равна $4\pi r^2$.

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Какой запуск космической ракеты энергетически наиболее выгодный:
   1) с южного полюса;
   2) с экватора на восток;
   3) с экватора на запад;
   4) с северного полюса?

б) Самый удалённый от Земли космический аппарат на начало 2020 года:
   1) «Вояджер-1»;
   2) «Вояджер-2»;
   3) «Новые горизонты»;
   4) «Пионер-10»?

в) Большúе полуоси орбит экзопланет и периоды их обращения вокруг своей звезды связаны между собой:
   1) первым законом Кеплера;
   2) вторым законом Кеплера;
   3) третьим законом Кеплера;
   4) четвёртым законом Кеплера?

г) Видимая звёздная величина звезды равна абсолютной, если расстояние до светила:
   1) 1 астрономическая единица;
   2) 1 парсек;
   3) 10 парсек;
   4) 10 световых лет?

д) Температура видимой поверхности Солнца по сравнению с температурой в центре Земли:
   1) в 2 раза выше;
   2) примерно такая же;
   3) в 1,5 раза ниже?

е) Поверхность какой из планет самая горячая:
   1) Меркурия;
   2) Венеры;
   3) Земли;
   4) Марса?

ж) Спутник с ретроградным движением по орбите:
   1) Фобос; 2) Ганимед; 3) Титан; 4) Тритон?

2. Оцените звёздную величину наиболее яркой «вспышки» спутника связи «Иридиум». «Вспышка» обусловлена отражением солнечного света в одном из плоских элементов спутника, как в зеркале, что порождает «солнечного зайчика» на поверхности Земли. Размер металлизированного плоского элемента примерно 90×180 см. Высота полёта спутника 800 км. Видимый угловой диаметр Солнца $0{,}5^\circ$, а видимая звёздная величина светила $m_\odot = -26{,}7^\mathrm{m}$. Для объектов с принимаемыми световыми потоками F_1 и F_2 разность их звёздных величин m_1 и m_2 определена равенством $m_1 - m_2 = -2{,}5\lg(F_1/F_2)$. Площадь круга с радиусом r равна πr^2.

3. Система из двух чёрных дыр звёздной массы (вращающихся вокруг общего «центра масс») способна излучать гравитационные волны, доступные для регистрации современными «гравитационными» приёмникам. На какую частоту излучения следует настроить приёмник, чтобы зарегистрировать сигнал от слияния чёрных дыр в такой системе? Для оценок примите массу $M_\text{ч}$ каждого объекта в 20 масс Солнца $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг. Слияние происходит, когда радиусы орбит в системе уменьшаются примерно до радиуса чёрной дыры $r_G = 2GM_\text{ч}/c^2$ (так что объекты соприкасаются своими «поверхностями» и формируют новую общую «поверхность»). Здесь $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг $\cdot$ с^2) — гравитационная постоянная, $c = 300\,000$ км/с — скорость света.

4. Как должна зависеть плотность вещества от расстояния до центра эллиптической галактики, чтобы звёзды на круговых орбитах вращались вокруг центра данной звёздной системы с одинаковой для всех расстояний линейной скоростью? Для расчётов примите

распределение вещества сферически-симметричным, т. е. галактика представляет собой шар с неоднородным распределением массы по радиусу.

1. а) 4) Новолуние.
б) 3) Перигелий.
в) 1) Не изменяется.
г) 2) Расстояние от Земли до Луны.
д) 2) От Земли до Солнца.
е) 3) «Спектр — рентген — гамма».
ж) 3) 88.

2. $\boldsymbol{\varepsilon - \alpha/2 - \gamma = 65°44'}$**.**

Если бы ось Земли была ориентирована строго перпендикулярно плоскости движения планеты вокруг Солнца (эклиптике), в свою очередь, светило представляло бы собой точечный источник, а на планете отсутствовала бы атмосфера, то полярный день существовал бы только строго на полюсе. Вследствие наклона земной оси область полярного дня приобретает форму «шапки» (сферического сектора) около полюса. Угловой радиус сектора равен отклонению земной оси от нормали к плоскости эклиптики $\delta = 90° - \varepsilon$. Соответственно, в случае точечного светила и в отсутствие атмосферы, минимальная широта местности с полярным днём совпадала бы с углом $90° - \delta = \varepsilon = 66°34'$.

Под солнечным днём подразумевают время, когда в данной местности в течение всех 24 часов видна хотя бы какая-нибудь часть солнечного диска. В отсутствие атмосферы, на указанной широте ε за горизонт не заходил бы даже центр диска и над горизонтом всегда оставалась хотя бы половина светила. Поэтому вершина диска Солнца остаётся над горизонтом в более широкой приполярной области, угловой радиус которой больше на угловой радиус Солнца $\alpha/2 = 15'$ по сравнению с величиной δ. Соответственно, граница сектора с полярным днём понижается до широты $\varepsilon - \alpha/2 = 66°34' - 15' = 66°19'$.

Преломление лучей в атмосфере Земли обеспечивает видимость светила, даже когда последнее уже полностью зашло бы за горизонт в отсутствие атмосферы. Преломление «поднимает» Солнце над горизонтом на угол $\gamma = 35'$. Таким образом, приполярный сектор полярного дня дополнительно расширяется на величину γ. Искомая минимальная географическая широта местности с полярным днём достигает значения $\varepsilon - \alpha/2 - \gamma = 66°34' - 15' - 35' = 65°44'$.

3. $\boldsymbol{|T_1^{-1} - T_2^{-1}|^{-1} = T_1T_2/|T_1 - T_2|}$ **в случае сонаправленного движения планет по орбитам;**

$\boldsymbol{|T_1^{-1} + T_2^{-1}|^{-1} = T_1T_2/|T_1 + T_2|}$ **в случае взаимно противоположного движения планет.**

Планетарная система проходит все свои возможные конфигурации в периодической последовательности. В качестве начала этой последовательности может быть выбрана любая конфигурация, например, когда планеты находятся на одном луче, исходящем от звезды. Искомый период совпадает с интервалом времени, за который система проходит все возможные конфигурации и возвращается к исходному состоянию: для выбранного начала последовательности обе планеты вновь оказываются на одном луче.

За некоторое время t каждая из планет проходит долю своего полного оборота по орбите $\alpha_1 = t/T_1$ и $\alpha_2 = t/T_2$ соответственно. Если планеты вращаются в одну сторону, то они вновь окажутся на одном луче, когда одна из них совершит на один оборот больше, чем вторая:

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = 1. \tag{1}$$

Если планеты вращаются в противоположные стороны, то они попадут на один луч, когда доли поворота каждой из них в сумме составят один полный оборот:

$$|\alpha_1 + \alpha_2| = 1. \tag{2}$$

Подставляем определения $\alpha_1 = t/T_1$ и $\alpha_2 = t/T_2$ в уравнения (1) и (2):

$$|t/T_1 - t/T_2| = t\,|1/T_1 - 1/T_2| = 1$$

и

$$|t/T_1 + t/T_2| = t\,|1/T_1 + 1/T_2| = 1.$$

Получаем искомый период

$$t = \frac{1}{|1/T_1 - 1/T_2|} = \frac{T_1 T_2}{|T_1 - T_2|}$$

в случае сонаправленного движения планет и

$$t = \frac{1}{|1/T_1 + 1/T_2|} = \frac{T_1 T_2}{|T_1 + T_2|}$$

в случае противонаправленного вращения.

Планеты образуются из общего вращающегося пылевого облака (диска) на стадии формирования звезды. Поэтому их общее происхождение обеспечивает вращение в одну сторону. В свою очередь, если центральное тело «захватывает» пролетающий объект на орбиту вокруг себя, то возможно формирование системы с ретроградным движением. Примером служит Тритон — крупнейший спутник Нептуна, предположительно захваченный планетой из пояса Койпера.

4. 10 км; немного выше Эвереста.

Центральную часть горы можно представить в виде вертикального цилиндра с основанием достаточно произвольной формы (квадратной, круговой или в виде ленты для горного хребта), площадь которого S. Высота цилиндра равна высоте h горы (хребта). Объём цилиндра V равен Sh (как для прямого параллелепипеда), а его масса $m = \rho V = \rho Sh$, где $\rho = 3$ т/м^3 — плотность гранита.

Выделенная центральная часть горы давит на подстилающее основание с силой F, равной силе тяжести mg ($g = 10$ м/с^2 — ускорение свободного падения). Тем самым вершина создаёт под собой давление $p = F/S = mg/S = \rho Shg/S = \rho gh$ (вариант формулы для гидростатического давления). Приравнивая давление ρgh максимальному допустимому значению $p_{\text{макс}}$ без разрушения материала, находим максимальную возможную высоту горы $h_{\text{макс}} = p_{\text{макс}}/(\rho g) = 3 \cdot 10^8$ Па$/(3\,000$ кг/м$^3 \times 10$ м/с$^2) = 10\,000$ м $= 10$ км.

Решение задач 10 класса

1. а) 2) Пиблз.
б) 4) Эллиптические.
в) 1) Венера.
г) 3) 4,6 млрд лет.
д) 4) Метеорит.
е) 4) Юпитер.
ж) 3) От 4 000 до 10 000.

2. 46°.

Сигнал в виде гравитационной волны представляет собой расширяющуюся сферу (сферический слой), на которой сосредоточено возмущение ускорения свободного падения (точнее, метрики пространства — времени). Центр сферы совпадает с положением источника сигнала, а радиус сферы увеличивается со скоростью света c. Приёмник регистрирует сигнал, когда указанная сфера возмущений пересекает местоположение детектора.

Поэтому задержка в приёме сигнала в разных пунктах на Земле связана тем, что сфера возмущений проходит через эти пункты в разное время. Если приёмные пункты расположены на отрезке, перпендикулярном направлению на источник, то сфера возмущений проходит по детекторам одновременно и задержка отсутствует. В свою очередь, если пункты расположены строго на одном луче в направлении на источник, то временная задержка равна времени, которое требуется сигналу пройти расстояние между пунктами d со скоростью $c = 300\,000$ км/с.

В общем случае временная задержка в приёме определяется разностью расстояний от приёмных пунктов до источника сигнала. Если пространственный отрезок между приёмными пунктами составляет некоторый угол θ с направлением на источник, то указанная разность расстояний равна $d\cos\theta$ — проекции отрезка на направление на источник. Получаем временную задержку в приёме сигналов $\tau = (d\cos\theta)/c$.

Вместе с тем при известной величине τ последнее равенство определяет отклонение θ направления на источник от линии пунктов на Земле:

$$\theta = \arccos(c\tau/d). \tag{1}$$

Таким образом, возможные источники принятого сигнала могут располагаться на конической поверхности в виде направлений, составляющих угол θ с прямой, соединяющей пункты на Земле. Указанная коническая поверхность поднимается над местным горизонтом в точности на угол θ (который и требуется найти в задаче).

Расстояние между пунктами оценим в приближении локально плоской поверхности Земли. Расстояние между пунктами по линии «север — юг» определяется разностью $|\Theta_{\text{Л}} - \Theta_{\text{Х}}|$ широт пунктов $\Theta_{\text{Л}} = 30{,}6°$ и $\Theta_{\text{Х}} = 46{,}5°$:

$$d_{\text{с-ю}} = L_{\text{э}}\,|\Theta_{\text{Л}} - \Theta_{\text{Х}}|/360°. \tag{2}$$

где $L_{\text{э}} = 40\,000$ км — длина экватора.

В свою очередь, линия постоянной широты представляет собой окружность, радиус и длина которой меньше радиуса и длины экватора в $1/(\cos\Theta)$ раз. В качестве широты Θ примем среднее значение широт пунктов $(\Theta_{\text{Л}} + \Theta_{\text{Х}})/2 = 38{,}6°$. Тогда расстояние между пунктами по линии «восток — запад» определяется аналогично формуле (2) с заменой длины экватора на длину линии постоянной широты $L_э \cos[(\Theta_Л + \Theta_Х)/2)]$, а значения широт — на значения долгот $\varphi_Л = 90{,}8°$ и $\varphi_Х = 119{,}4°$:

$$d_{\text{в-з}} = L_э \cos[(\Theta_Л + \Theta_Х)/2)]\,|\varphi_Л - \varphi_Х|/360°. \tag{3}$$

Полное расстояние между пунктами находим по теореме Пифагора:

$$d = \left(d_{\text{с-ю}}^2 + d_{\text{в-з}}^2\right)^{1/2} = L_э \left\{|\Theta_Л - \Theta_Х|^2 + \cos^2[(\Theta_Л + \Theta_Х)/2)]\,|\varphi_Л - \varphi_Х|^2\right\}^{1/2}/360° =$$
$$= 40\,000 \text{ км} \times \left\{|30{,}6° - 46{,}5°|^2 + \cos^2(38{,}6°)\,|90{,}8° - 119{,}4°|^2\right\}^{1/2}/360° =$$
$$= 40\,000 \text{ км} \times \left(15{,}9^2 + 0{,}782^2 \times 28{,}6^2\right)^{1/2}/360 = 3\,050 \text{ км}.$$

Подставляем полученное расстояние d в формулу (1):

$$\theta = \arccos\left(\frac{300\,000 \text{ км/с} \times 0{,}007 \text{ с}}{3\,050 \text{ км}}\right) = \arccos(0{,}69) \approx 46°.$$

3. $\boldsymbol{\alpha = \eta^3\,(\eta^2 + 3\eta + 3)/(3\eta^2 + 3\eta + 1)}$**.**

Поскольку расстояния в системе постоянны, то звёзды вращаются по окружностям вокруг общего центра масс, который расположен на некоторых расстояниях $r_{\text{цм-1}}$ и $r_{\text{цм-2}}$ до каждой из звёзд. Взаимное притяжение светил обеспечивает соответствующее центростремительное ускорение $\omega^2 r_{\text{цм-1}}$ и $\omega^2 r_{\text{цм-2}}$ для каждого объекта:

$$\omega^2 r_{\text{цм-1}} = \frac{GM_2}{(R_1 + R_2)^2}\,, \qquad \omega^2 r_{\text{цм-2}} = \frac{GM_1}{(R_1 + R_2)^2}\,,$$

где ω — угловая частота вращения системы вокруг её центра масс, G — гравитационная постоянная. Складываем последние уравнения Ньютона для ускорений и учитываем, что $r_{\text{цм-1}} + r_{\text{цм-2}} = R_1 + R_2$ — расстояние между звёздами. Получаем выражение для квадрата угловой частоты вращения системы

$$\omega^2 = \frac{G\,(M_1 + M_2)}{(R_1 + R_2)^3} = \frac{GM_1}{R_1^3}\,\frac{1 + \alpha}{(1 + \eta)^3} \tag{4}$$

(третий закон Кеплера в двойной системе). Здесь $\alpha = M_2/M_1$ — отношение масс компонент системы, $\eta = R_2/R_1$ — отношение расстояний от корабля до звёзд.

Расстояние от первой звезды до центра масс составляет величину

$$r_{\text{цм-1}} = \frac{M_2\,(R_1 + R_2)}{M_1 + M_2} = \frac{\alpha\,(R_1 + R_2)}{1 + \alpha} = \frac{R_1 \alpha\,(1 + \eta)}{1 + \alpha}\,. \tag{5}$$

Тогда космический корабль удалён от центра масс на «расстояние»

$$r_{\text{цм-к}} = R_1 - r_{\text{цм-1}} = \frac{R_1\,(1 - \alpha\eta)}{1 + \alpha}\,. \tag{6}$$

Можно показать, что корабль смещён от центра масс к более лёгкой звезде. Поэтому величина $r_{\text{цм-к}}$ положительна, если вторая звезда легче ($\alpha < 1$), и отрицательна, если $\alpha > 1$.

Притяжение корабля к звёздам должно обеспечить необходимое центростремительное ускорение:

$$\omega^2 r_{\text{цм-к}} = \frac{GM_1}{R_1^2} - \frac{GM_2}{R_2^2}\,. \tag{7}$$

Последнее уравнение «автоматически» справедливо при любом отношении масс α и не требует постановки модулей у каких-либо величин. Подставляем в уравнение Ньютона для станции (7) выражение (4) для квадрата частоты и выражение (6) для расстояния $r_{\text{цм-к}}$, а также нормируем силы в правой части (7) на силу притяжения к первой звезде GM_1/R_1^2:

$$\left[\frac{GM_1}{R_1^3}\,\frac{1+\alpha}{(1+\eta)^3}\right]\frac{R_1\,(1-\alpha\eta)}{1+\alpha} = \frac{GM_1}{R_1^2}\,\left(1-\frac{\alpha}{\eta^2}\right).$$

После сокращения общих множителей в последнем уравнении приходим к равенству

$$\frac{1-\alpha\eta}{(1+\eta)^3} = 1 - \frac{\alpha}{\eta^2}\,. \tag{8}$$

Уравнение (8) линейно для искомого отношения масс α, что позволяет найти его решение в явном виде:

$$\alpha = \frac{1-(1+\eta)^{-3}}{\eta^{-2}-\eta\,(1+\eta)^{-3}} = \eta^2\,\frac{(1+\eta)^3-1}{(1+\eta)^3-\eta^3} = \eta^2\,\frac{\eta^3+3\eta^2+3\eta}{1+3\eta^2+3\eta} = \eta^3\,\frac{\eta^2+3\eta+3}{3\eta^2+3\eta+1}\,.$$

Если рассматривать последнее выражение как уравнение для параметра $\eta = R_2/R_1$ относительно параметра $\alpha = M_2/M_1$, то оно определяет положение одной из пяти так называемых точек Лагранжа (точки L_1, которая расположена между массивными телами). При малом отношении масс ($\alpha \ll 1$, например, для системы Солнце — Земля) решение позволяет выразить в явном виде расстояние от лёгкого тела до первой точки Лагранжа: $\eta = (\alpha/3)^{1/3}$.

4. 0,9 ≈ 1.

Распад вимпов создаёт одинаковое излучение во всех точках, удалённых на одинаковое расстояние от скопления галактик — источника. Указанные точки образуют поверхность в виде сферы с центром в источнике. В частности, Солнечная система находится на сфере с радиусом, равным расстоянию $r = 100$ Мпк до скопления галактик Кома (1 пк $= 3\cdot 10^{16}$ м).

Пусть за время t' в скоплении галактик распались N' вимпов и, соответственно, породили N' фотонов. Последние уходят от скопления равномерно во всех направлениях и пересекают указанную сферу с радиусом r. Если вся сфера «перехватывает» все фотоны, то площадка $\Delta S = 1$ м^2 «перехватывает» лишь долю фотонов, равную отношению площади ΔS к площади всей сферы $4\pi r^2$. Соответственно, через площадку ΔS пройдут $n' = N'\,\Delta S/(4\pi r^2)$ фотонов за время t'.

В свою очередь, за интервал $\Delta t = 1$ с площадку пересекут фотоны в количестве p', пропорциональном отношению времени наблюдения Δt к времени t':

$$p' = n'\,\frac{\Delta t}{t'} = \frac{N'\,\Delta S\,\Delta t}{4\pi r^2 t'}\,. \tag{9}$$

Число N вимпов в скоплении галактик Кома равно отношению массы тёмной материи ηM к массе одного вимпа $m_{\text{в}} = 50 m_{\text{p}}$ ($m_{\text{p}} = 1{,}7\cdot 10^{-27}$ кг — масса протона):

$$N = \eta M/m_{\text{в}},$$

где $\eta = 90$ % — доля тёмной материи, $M = 3 \cdot 10^{15} M_\odot$ — полная масса скопления ($M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг — масса Солнца). За время $t' = T_{1/2} = 10^{13}$ лет в системе распадётся половина вимпов ($N' = N/2 = \eta M/(2m_\text{в})$).

Подставляем последние значения t' и N' в выражение (9), что определяет искомое число

$$p' = \frac{(N/2)\,\Delta S\,\Delta t}{4\pi r^2 T_{1/2}} = \frac{[\eta M/(2m_\text{в})]\,\Delta S\,\Delta t}{4\pi r^2 T_{1/2}} =$$
$$= \frac{\{0{,}9 \times [(3 \cdot 10^{15}) \cdot (2 \cdot 10^{30}\ \text{кг})]/(2 \times 50 \times 1{,}7 \cdot 10^{-27}\ \text{кг})\} \times 1\ \text{м}^2 \times 1\ \text{с}}{4 \times 3{,}14 \times [(100 \cdot 10^6) \times (3 \cdot 10^{16}\ \text{м})]^2\,[10^{13}\ \text{лет} \times (365 \times 24 \times 3600)\ \text{с/год}]} = 0{,}9 \approx 1.$$

Решение задач 11 класса

1. а) 2) С экваторе на восток.
б) 1) «Вояджер-1».
в) 3) Третьим законом Кеплера.
г) 3) 10 парсек.
д) 2) Примерно такая же.
е) 2) Венеры.
ж) 4) Тритон.

Примечание. Температура поверхности Венеры почти одинакова на дневной и ночной стороне и составляет примерно 470 °C. Последнее значение превышает температуру 430 °C на дневной стороне Меркурия.

2. $m = -8{,}3^{\mathrm{m}}$.

Если бы плоский элемент спутника (антенна) представлял собой бесконечную плоскость, то в нём было бы видно изображение всего диска Солнце (как в ровной водной поверхности типа лужи или озера). В таком пределе звёздная величина вспышки совпала бы с аналогичной величиной источника $m_\odot = -26{,}7^{\mathrm{m}}$.

Свет на Земле от изображения Солнца в антенне-зеркале такой, как если бы источник в виде светила поместили в направлении за зеркалом на расстоянии, равном радиусу орбиты Земли. В свою очередь зеркало конечных размеров становится эквивалентным прямоугольному отверстию в бесконечном непрозрачном экране, через который видно светило сквозь такой экран. Тогда предел максимальной возможной яркости вспышки $m_\odot = -26{,}7^{\mathrm{m}}$ сохранялся бы, если бы через «отверстие» был виден весь диск Солнца, для чего угловой размер отражающего элемента должен превышать превышать видимый угловой диаметр светила 0,5°.

Однако видимый угловой размер антенны $a/h < 2$ м/800 км $= 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ рад существенно меньше соответствующей величины для Солнца $\theta_\odot = 0{,}5^\circ = 0{,}5 \times \pi/180^\circ$ рад $=$ $= 8{,}7 \cdot 10^{-3}$ рад. (Здесь $a < 2$ м — размер антенны, $h = 800$ км — высота полёта спутника.) Поэтому в зеркале-антенне (вспомогательном «отверстии» в экране) видно с Земли только часть диска Солнца. Тогда поток излучения в «солнечном зайчике» на Земле F составляет такую долю от потока излучения от полного Солнца $F_\odot$, какую долю диска Солнца видно в отражающем элементе. Указанная доля есть отношение площади отражателя ab на спутнике к площади круга, который на высоте полёта спутника в точности перекрывал бы диск Солнца ($a = 90$ см и $b = 180$ см — размеры отражателя). Диаметр d указанного круга равен $h\theta_\odot$, а его площадь $S_\odot = \pi\,(d/2)^2 = \pi h^2\theta^2/4$. Таким образом, находим отношение потоков на Земле от отражателя и полного Солнца $F/F_\odot = ab/[\pi h^2\theta^2/4]$ и искомую максимальную звёздную величину «вспышки» спутника

$$m = m_\odot - 2{,}5\lg(F/F_\odot) = m_\odot - 2{,}5\lg\left(\frac{4ab}{\pi h^2\theta^2}\right) =$$
$$= -26{,}7^{\mathrm{m}} - 2{,}5\lg\left(\frac{4 \times 0{,}9\ \text{м} \times 1{,}8\ \text{м}}{3{,}14 \times (800\,000\ \text{м})^2 \times (8{,}7 \cdot 10^{-3})^2}\right) = -8{,}3^{\mathrm{m}}.$$

3. 560 Гц $\approx$ 600 Гц.

Для оценки частоты вращения системы будем рассматривать чёрные дыры как материальные точки с массами M_1 и M_2 (не обязательно одинаковыми). Они вращаются вокруг общего центра масс по окружностям с некоторыми радиусами R_1 и R_2. Соответствующее центростремительное ускорение обеспечено взаимным притяжением объектов:

$$\omega^2 R_1 = \frac{GM_2}{(R_1+R_2)^2}\,, \qquad \omega^2 R_2 = \frac{GM_1}{(R_1+R_2)^2}\,, \tag{1}$$

где ω — угловая частота вращения системы. Сложив уравнения (1), находим квадрат угловой скорости вращения

$$\omega^2 = \frac{G\,(M_1+M_2)}{(R_1+R_2)^3}$$

(третий закон Кеплера для двойной системы). Подставляем в последнее выражение расстояния R_1 и R_2 в виде радиусов чёрных дыр $r_G = 2GM_\text{ч}/c^2$:

$$\omega^2 = \frac{c^6}{8G^2\,(M_1+M_2)^2}\,,$$

и находим частоту вращения системы для $M_1 = M_2 = 20M_\odot$:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c^3}{4\sqrt{2}\,\pi G\,(M_1+M_2)} =$$
$$= \frac{(3\cdot 10^8\ \text{м/с})^3}{4\times 1{,}41\times 3{,}14\times[6{,}7\cdot 10^{-11}\ \text{м}^3/(\text{кг}\cdot\text{с}^2)]\times(40\cdot 2\cdot 10^{30}\ \text{кг})} = 280\ \text{Гц} \approx 300\ \text{Гц}.$$

В случае одинаковых чёрных дыр, гравитационное поле в системе повторяет своё распределение не через период вращения системы $T = 1/\nu$, а через половину периода: чёрные дыры меняются местами и создают то же гравитационное поле в системе. Частота излучаемой гравитационной волны совпадает с частотой изменения гравитационного поля и, следовательно, равна удвоенной частоте вращения системы $2\nu = c^3/[2\sqrt{2}\pi G\,(M_1 + M_2)] \approx 600$ Гц.

4. Обратно пропорционально квадрату расстояния до центра галактики.

Движение звезды по круговой орбите с некоторым радиусом r внутри сферически-симметричной галактики определяется её притяжением звёздами, расположенными внутри сферы, по поверхности которой проходит орбита, как по экватору (большому кругу). В свою очередь, звёзды вне указанной сферы создают нулевое гравитационное поле (ускорение свободного падения) на орбите и поэтому не влияют на движение выбранной звезды.

Звёзды внутри выбранной сферы создают на орбите ускорение свободного падения $g(r)$ такое же, как точечное тело с той же массой $m(r)$, помещённое в центр галактики:

$$g(r) = \frac{Gm(r)}{r^2}$$

($m(r)$ — масса звёзд внутри сферы с радиусом r; G — гравитационная постоянная). Ускорение свободного падения совпадает с центростремительным ускорением v^2/r на орбите:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{Gm(r)}{r^2}\,.$$

Данное уравнение определяет, как масса $m(r)$ «звёздного» шара внутри галактики зависит от его радиуса:

$$m(r) = rv^2/G.$$

В случае постоянной скорости v движения по орбите произвольного радиуса, масса $m(r)$ пропорциональна радиусу r. Соответственно, масса Δm, заключённая в слое между двумя сферами с радиусами r_1 и r_2, зависит только от его толщины $\Delta r = r_2 - r_1$:

$$\Delta m = m(r_2) - m(r_1) = (r_2 - r_1)\, v^2/G = \Delta r\, v^2/G. \tag{2}$$

Чтобы определить плотность вещества в галактике $\rho(r)$ на некоторой удалённости r от её центра, выделим сферический слой с малой толщиной $\Delta r \ll r$, содержащий внутри себя сферу с радиусом r. Объём тонкого слоя произвольной формы равен произведению его площади (одной из сторон) на его толщину. В частности, объём ΔV рассматриваемого сферического слоя равен $4\pi r^2\, \Delta r$, а его масса

$$\Delta m = \rho(r)\, \Delta V = 4\pi r^2\, \Delta r\, \rho(r) \tag{3}$$

(изменением плотности вещества $\rho(r)$ внутри тонкого слоя пренебрегаем).

Приравниваем выражения (2) и (3) для массы слоя, которые пропорциональны толщине слоя и поэтому вспомогательная величина Δr «выпадает». Получаем искомый радиальный профиль концентрации

$$\rho(r) = \frac{v^2}{4\pi r^2 G} = \frac{\text{const}}{r^2} \propto r^{-2}\,.$$

Условия и решение задач
Открытой городской олимпиады по астрономии, астрофизике
и физике космоса им. В. С. Троицкого
05 февраля 2023 г.

8–9 классы

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Небесное тело Плутон назвали в честь:
   1) древнегреческого философа;
   2) древнегреческого героя;
   3) римского бога;
   4) химического элемента, обнаруженного на планете.

б) Расстояние от Земли до Солнца равно:
   1) 1 астрономической единице;
   2) 1 парсеку;
   3) 1 световому году;
   4) 380 тыс. км?

в) Самая близкая к Солнцу звезда находится в созвездии:
   1) Кита;
   2) Лебедя;
   3) Ориона;
   4) Центавра?

г) Характерная толщина атмосферы Земли по сравнению с высотой горы Эверест:
   1) того же порядка величины;
   2) существенно больше;
   3) существенно меньше?

д) Какое из перечисленных созвездий наименьшее по площади на небе:
   1) Большая Медведица;
   2) Кассиопея;
   3) Пегас?

е) Свет проходит расстояние от Земли до Луны и обратно примерно:
   1) за 3 миллисекунды,
   2) за 3 секунды,
   3) за 3 минуты.

ж) Скорость движения Луны как спутника Земли:
   1) меньше, 2) равна, 3) больше,
первой космической скорости на Земле.

2. Длина тени в Нижнем Новгороде в августовский полдень близка к высоте предметов. Какова длина тени от вертикального шеста высотой 1 метр в полдень того же дня в Кейптауне на широте 34°. Географическая широта Нижнего Новгорода равна 56°.

3. Во сколько раз Венера ближе к Солнцу, чем Земля, если максимальное угловое расстояние на небе между Солнцем и Венерой достигает 47°?

4. Оцените, на какую долю своего радиуса смещается Солнце при вращении системы «Солнце — Юпитер» вокруг своего центра масс. Отношение массы Солнца к массе Юпитера и отношение расстояния от Солнца до Юпитера к радиусу Солнца примерно равны 1 000.

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Ярчайшая звезда неба Сириус видна:
1) зимой в Нижегородской области,
2) летом в Нижегородской области,
3) только в южной части России?

б) Основной источник энергии Солнца:
1) химические реакции,
2) распад ядер,
3) синтез ядер,
4) гравитационное сжатие?

в) Расстояние от Земли до Солнца составляет примерно 8 световых:
1) секунд;
2) минут;
3) часов;
4) дней?

г) Растущая Луна в первой четверти восходит в Нижнем Новгороде:
1) в 6 утра;
2) в полдень;
3) в 6 вечера.
4) в полночь?

д) Ядра железа на Земле образовались:
1) в начале жизни Вселенной;
2) при взрывах сверхновых;
3) при образовании Солнца;
4) при формировании Земли?

е) Магнитные бури на Земле вызваны:
1) гравитационными волнами в ионосфере;
2) солнечным ветром;
3) антициклонами в атмосфере;
4) электрическими токами в Земле?

ж) Гравитационные волны зарегистрированы:
1) наземным телескопом VLT; 2) интерферометром LIGO;
3) орбитальным телескопом «Кеплер»; 4) спутниками GPS и ГЛОНАСС?

2. Каким станет период обращения Земли вокруг Солнца, если масса Земли увеличится до массы Солнца и объекты продолжат вращение с прежним расстоянием между ними по круговым орбитам?

3. Система отсчёта, связанная с вращающейся вокруг своей оси Землёй, представляет собой так называемую неинерциальную систему отсчёта. В этой системе Солнце обращается вокруг Земли за 1 сутки в основном под действием сил инерции: противоположно направленных друг другу «притягивающей» силы Кориолиса и «отталкивающей» центробежной силы. При этом сила Кориолиса в 2 раза превышает центробежную силу. Во сколько раз сила Кориолиса превышает силу гравитационного притяжения между Солнцем и Землёй, если масса Солнца в 333 000 раз больше массы Земли?

4. Когда космонавты долетят до Марса, смогут ли они увидеть без телескопа нашу Луну? Наблюдения проводят в момент наибольшего углового расстояния между Землёй и Солнцем на небе Марса; радиус орбиты Марса 1,5 а. е. (1 а. е. = 150 млн км); радиус орбиты Луны 380 тыс. км; Луна в первой четверти воспринимается на Земле как объект с видимой звёздной величиной $m_{\text{ЛЗ}} = -9{,}0^{\text{m}}$. Человек видит невооружённым глазом звёзды до величины 6^{m}, угловое разрешение глаза около $1'$.

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Луна находилась в наивысшей точке над горизонтом ровно в полночь с субботы на воскресенье. Тогда предыдущая кульминация была:
   1) в пятницу;
   2) в субботу;
   3) в воскресенье;
   4) в понедельник?

б) Если бы Земля завращалась вокруг своей оси с той же скоростью в противоположном направлении относительно неподвижных звёзд, то солнечные сутки:
   1) стали бы короче,
   2) стали бы длиннее,
   3) остались бы теми же?

в) Галактика Млечный Путь:
   1) клочковатая;
   2) линзовидная;
   3) спиральная;
   4) эллиптическая?

г) Кольца Сатурна в основном состоят:
   1) из силикатной пыли;
   2) из минеральных камней;
   3) из водяного льда;
   4) из метанового льда?

д) Размер нейтронной звезды порядка:
   1) Нижнего Новгорода,
   2) Земли,
   3) Солнца?

е) Зонд «Розетта» обращался бы вокруг кометы Чурюмова—Герасименко, если бы его скорость была порядка:
   1) 1 см/с;
   2) 1 м/с;
   3) 100 м/с;
   4) 8 км/с?

ж) Пусть в полнолуние Луна занимает наиболее высокое возможное положение на небе. Тогда лунное или солнечное затмения можно ожидать примерно через:
   1) две недели; 2) три месяца; 3) полгода; 4) год?

2. Покажите, что сила притяжения Луны к Солнцу больше силы притяжения Луны к Земле. Попробуйте объяснить, почему же всё-таки Луна вращается вокруг Земли. Радиус орбиты Земли $R_З = 150$ млн. км, Луна удалена от Земли на расстояние $R_Л = 380$ тыс. км и делает один оборот вокруг Земли примерно за месяц.

3. Простейший телескоп (Галилея) представляет собой две фокусирующие линзы с некоторыми фокусными расстояниями f_1 и f_2. Линзы располагают в трубе на расстоянии $d = f_1 + f_2$ (конфокальная конфигурация). Чему равно угловое увеличение телескопа, которое показывает, во сколько раз увеличивается видимый в телескоп угол между двумя объектами по сравнению с истинным угловым расстоянием между объектами на небе?

4. Оцените кинетическую энергию E частицы космических лучей, которые могут удерживаться в нашей Галактике межзвёздным магнитным полем с индукцией 10^{-10} Тл. Диаметр Галактики принять равным 90 тыс. световых лет. Энергия $E = pc$ релятивистской частицы пропорциональна её импульсу p и скорости света $c = 300\,000$ км/с. Электрический заряд частицы считать равным элементарному заряду $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Ответ выразите в электронвольтах: 1 эВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

1. а) 3) Римского бога.
б) 1) 1 астрономической единице.
в) 4) Центавра.
г) 1) Того же порядка величины.
д) 2) Кассиопея.
е) 2) За 3 секунды.
ж) 1) меньше.

2. 1 метр.

Сумма географических широт Нижнего Новгорода и Кейптауна составляет $56 + 34 = 90$ градусов. Следовательно, полуденные вертикали в Нижнем Новгороде и Кейптауне образуют прямой угол — 90°. Из равенства длины тени и высоты предмета в Нижнем Новгороде следует, что направление на Солнце составляет угол 45° с полуденной вертикалью в Нижнем Новгороде и отклонено к югу. Таким образом, направление на Солнце является биссектрисой прямого угла между полуденными вертикалями в Нижнем Новгороде и Кейптауне. Точки в Нижнем Новгороде и Кейптауне (в соответствующие полдни) расположены зеркально симметрично относительно направления на Солнце и, следовательно, одинаковые предметы в Нижнем Новгороде и Кейптауне отбрасывают равные тени. В частности, шест высотой 1 метр отбрасывает тень, равную своей высоте 1 метр.

3. В $1/\sin(47°) \approx 1{,}37$ раза.

При движении Венеры по орбите вокруг Солнца луч зрения на планету максимально отклоняется от светила, когда он становится касательной к орбите. В такой конфигурации луч зрения «Земля — Венера» перпендикулярен отрезку «Солнце — Венера». Соответственно указанные отрезки «Земля — Венера» и «Солнце — Венера» образуют катеты в прямоугольном треугольнике, а гипотенуза — отрезок «Солнце — Земля». Тогда отношение катета «Солнце — Венера» к гипотенузе «Солнце — Земля» равно синусу угла 47° между Солнцем и Венерой. Искомое отношение расстояний «Солнце — Земля» и «Солнце — Венера» равно $1/\sin(47°) \approx 1{,}37$.

4. Солнце смещается на расстояние порядка своего радиуса. В качестве ответа принимается как амплитуда смещения в один радиус, так и удвоенная амплитуда (размах) в два радиуса — диаметр Солнца.

Пусть $d_{\text{Ю}}$ — расстояние от Солнца до Юпитера, $M_\odot$ и $M_{\text{Ю}}$ — массы Солнца и Юпитера. Согласно своему определению, центр масс системы «Солнце — Юпитер» удалён от центра Солнца на расстояние

$$r = \frac{M_{\text{Ю}} d_{\text{Ю}}}{M_\odot + M_{\text{Ю}}} = \frac{d_{\text{Ю}}}{(M_\odot/M_{\text{Ю}}) + 1} = \frac{d_{\text{Ю}}}{1\,000 + 1} \approx \frac{d_{\text{Ю}}}{1\,000},$$

где использовано данное в задаче отношение масс $M_\odot/M_{\text{Ю}} = 1\,000$. Вместе с тем согласно условию задачи радиус Солнца равен тому же расстоянию $d_{\text{Ю}}/1\,000$. Следовательно, центр масс системы находится на поверхности Солнца, и Солнце вращается вокруг этого центра масс по окружности радиуса r, который совпадает с радиусом звезды. Таким образом, в своём вращении Солнце смещается от центра масс на расстояние, равное своему радиусу.

Для справки приведём численные значения масс и расстояний: $M_\odot = 2{,}0 \cdot 10^{30}$ кг, $M_{\text{Ю}} = 1{,}9 \cdot 10^{27}$ кг, $d_{\text{Ю}} = 780$ млн. км $= 5{,}2$ а. е., радиус Солнца $R_\odot = 700$ тыс. км.

Решение задач 10 класса

1. а) 1) Зимой в Нижегородской области.
б) 3) Синтез ядер.
в) 2) 8 минут.
г) 2) В полдень.
д) 2) При взрывах сверхновых.
е) 2) Солнечным ветром.
ж) 2) Интерферометром LIGO.

2. (1 год)/$\sqrt{2} \approx$ 8,5 месяцев.

Объекты продолжат вращение вокруг общего центра масс, который уже будет находиться не в Солнце, а посередине между Солнцем и Землёй. Соответственно, радиус орбиты Земли (измеряемый от центра вращения) уменьшится в два раза. В свою очередь, центростремительное ускорение Земли останется прежним: сила гравитационного притяжения к Солнцу увеличится пропорционально гравитационной массе Земли, однако инерционная масса Земли увеличится во столько же раз.

Земля совершает оборот по окружности радиуса r со скоростью v за время $T = 2\pi r/v$. В свою очередь, центростремительное ускорение Земли $a = v^2/r$, что даёт выражение для скорости $v = \sqrt{ar}$. Подставляем его в выражение для периода: $T = 2\pi\sqrt{r/a}$. Видно, что уменьшение радиуса вращения в два раза при сохранении величины центростремительного ускорения приводит к уменьшению периода вращения в $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ раз. Период обращения Земли станет равным (1 год)/$\sqrt{2} \approx 8{,}5$ месяцев.

3. Сила Кориолиса превышает силу тяготения в $9 \cdot 10^{10}$ раз.

Движение Солнца в неинерциальной системе отсчёта, связанной с Землёй, представляет собой «быстрое» суточное вращение вокруг оси мира вместе с остальными звёздами, а также «медленное» периодическое годовое перемещение поперёк плоскости небесного экватора и постепенное отставание в суточном вращении от звёзд — перемещение по зодиакальным созвездиям. Суточное вращение Солнца обусловлено силой Кориолиса и центробежной силой, а более медленные движения — ещё и поступательной силой инерции, связанной с ускорением центра масс Земли в гравитационном поле Солнца.

Угол ϕ между направлением на Солнце и осью мира есть не что иное, как угол между направлением на Солнце и осью вращения Земли. Этот угол меняется в течение года (вместе с перемещением Солнца поперёк плоскости небесного экватора). Он достигает максимального значения 90° в дни весеннего и осеннего равноденствий (когда Солнце находится в плоскости небесного экватора в созвездиях Рыб и Девы, во времена Гиппарха — Овна и Весов) и уменьшается до $66{,}5° = 90° - 23{,}5°$ в дни летнего и зимнего солнцестояний, когда Солнца поднимается (опускается) над плоскостью небесного экватора на максимальную высоту (глубину) 23,5° — угол наклона земной оси к плоскости эклиптики.

Таким образом, если расстояние r от Земли до Солнца принять постоянным, то расстояние $r\sin\phi$ от Солнца до оси вращения — оси мира, — строго говоря, меняется в течение года. Однако последнее расстояние уменьшается от своего максимального значения менее чем на 10 %, поэтому для упрощения оценок пренебрежём этим изменением.

В таком случае Солнце совершает оборот вокруг Земли за одни сутки, что в 365 раз быстрее, чем годовое движение Земли вокруг Солнца в гелиоцентрической системе отсчёта. Соответственно, в геоцентрической системе скорость движения Солнца в 365 раз, а ускорение — в 365^2 раз больше соответствующих величин для Земли в гелиоцентрической системе отсчёта. Но ускорение Земли в гелиоцентрической системе вызвано гравитационным взаимодействием с Солнцем. Следовательно, сумма сил инерции, действующих на Солнце, больше силы гравитации в отношение ускорений и масс объектов $365^2 \cdot 333\,000$ раз.

По условию задачи сила Кориолиса в 2 раза больше центробежной силы, следовательно, половина силы Кориолиса компенсирует центробежную силу, а вторая половина как раз и создаёт суммарную силу инерции, обеспечивающую необходимое центростремительное ускорение. Таким образом, сила Кориолиса в $2 \cdot 365^2 \cdot 333\,000 = 9 \cdot 10^{10}$ раз больше силы гравитационного притяжения Солнца и Земли.

4. Смогут. Видимая звёздная величина Луны на Марсе $4{,}3^{\mathrm{m}} < 6^{\mathrm{m}}$, угловое расстояние между Луной и Землёй достаточно большое — примерно четверть видимого диаметра Луны на Земле.

Когда угловое расстояние между Солнцем и Землёй на небе Марса достигает максимального значения (элонгация), луч зрения с Марса на Землю касается орбиты Земли. В такой конфигурации отрезки «Солнце — Земля» (1 а. е.) и «Марс — Земля» образуют катеты в прямоугольном треугольнике, а гипотенуза — отрезок «Солнце — Марс» (1,5 а. е.). Тогда по теореме Пифагора расстояние от Марса до Земли $r_{\text{МЗ}} = \sqrt{1{,}5^2 - 1^2}$ а. е. $\approx$ 1,12 а. е. = 170 млн км. Увеличение расстояния до объекта в α раз уменьшает плотность потока принимаемого излучения в α^2 раз и, следовательно, увеличивает видимую звёздную величину объекта на $2{,}5 \lg(\alpha^2) = 5 \lg \alpha$ магнитуды. Таким образом, увеличение расстояния до Луны от 380 тыс. км до 170 млн км увеличивает её видимую звёздную величину на $5 \lg(170/0{,}38) \approx 13{,}3^{\mathrm{m}}$.

Поскольку лучи от Солнца падают на Землю и Луну перпендикулярно лучу зрения с Марса на Землю, то Луна видна как серп в первой (или третьей) четверти (в зависимости от того, с какой из двух возможных сторон от Солнца находится Земля). Звёздная величина Луны в первой (или третьей) четверти составляет $m_{\text{ЛЗ}} = -9{,}0^{\mathrm{m}}$.

Таким образом, видимая звёздная величина Луны составит «земную» величину $m_{\text{ЛЗ}} = -9{,}0^{\mathrm{m}}$, увеличенную на найденное изменение $13{,}3^{\mathrm{m}}$: $-9{,}0^{\mathrm{m}} + 13{,}3^{\mathrm{m}} = 4{,}3^{\mathrm{m}}$. Найденная звёздная величина не превышает максимальную звёздную величину 6^{m} видимых невооружённым глазом звёзд. Поэтому Луна будет видна с Марса невооружённым глазом.

Угловое расстояние между Луной и Землёй составит 380 тыс. км/(170 млн км) рад $= 0{,}13^\circ$ — примерно 1/4 от видимого диаметра Луны на Земле $0{,}5^\circ$, что вполне позволяет глазу разрешить Луну и Землю как два объекта.

1. а) 1) В пятницу (ближайшую).
б) 1) Стали бы короче.
в) 3) Спиральная.
г) 3) Из водяного льда.
д) 1) Нижнего Новгорода.
е) 2) 1 м/с.
ж) 2) Три месяца.

2. На орбите Земли (и Луны) Солнце создаёт ускорение свободного падения $g_\odot = 0{,}60$ см/с^2, тогда как Земля создаёт примерно в 2 раза меньшее ускорение $g_З = 0{,}26$ см/с^2 на орбите Луны. Луна вращается вокруг Земли, поскольку отклонение гравитационного поля от однородного на орбите Луны определяется именно Землёй, а не Солнцем.

Земля равномерно движется вокруг Солнца с некоторой скоростью v по круговой орбите с радиусом $R_З$. Следовательно, планета имеет центростремительное ускорение

$$a_\odot = \frac{v^2}{R_З}\,.$$

Это ускорение обеспечивается притяжением Солнца, оно одинаково для Земли, Луны, и равно ускорению свободного падения к Солнцу на орбите Земли $g_\odot = GM_\odot/R_З^2$, где G — гравитационная постоянная, $M_\odot$ — масса Солнца. Скорость v связана с периодом обращения $T_З = 1$ год соотношением $vT = 2\pi R_З$, так что ускорение $g_\odot = a_\odot$ перепишем как

$$g_\odot = \frac{(2\pi R_З/T_З)^2}{R_З} = \frac{(2\pi)^2\,R_З}{T_З^2} = \frac{(2\pi)^2\cdot(1{,}5\cdot 10^{11})}{(365\cdot 24\cdot 60\cdot 60)^2}\ \text{м/с}^2 = 0{,}60\ \text{см/с}^2.$$

Аналогичным образом вычисляем ускорение свободного падения к Земле на орбите Луны, рассматривая движение Луны по круговой орбите вокруг Земли:

$$g_З = \frac{(2\pi)^2\,R_Л}{T_Л^2} = \frac{(2\pi)^2\cdot(3{,}8\cdot 10^{8})}{(28\cdot 24\cdot 60\cdot 60)^2}\ \text{м/с}^2 = 0{,}26\ \text{см/с}^2,$$

где $T_Л = 28$ дней ≈ 1 месяц — период обращения Луны. Ускорение свободного падения $g_\odot$ больше $g_З$, поэтому сила притяжения Луны к Солнцу

$$F_\odot = M_Л g_\odot = \frac{GM_Л M_\odot}{R_З^2}$$

примерно в 2 раза больше силы притяжения к Земле

$$F_З = M_Л g_З = \frac{GM_Л M_З}{R_Л^2}\,,$$

где $M_Л$ и $M_З$ — массы Луны и Земли.

Тем не менее Луна вращается вокруг Земли (и одновременно вокруг Солнца). Действительно, если бы притяжение между Землёй и Луной вообще отсутствовало, то эти объекты всё равно могли двигаться рядом, например, по одной окружности вокруг Солнца (в гравитационном поле тела с разными массами движутся по одинаковым траекториям, если их начальные координаты и скорости совпадают). Чтобы Луна не уходила от Земли и вращалась вокруг неё достаточно, чтобы на орбите Луны отклонения гравитационного поля от однородного определялись Землёй, а не Солнцем. Так, в диаметрально противоположных точках лунной орбиты центрально-симметричное гравитационное поле Земли одинаково по абсолютной величине, но направлено в противоположные стороны. Так что отклонение земного поля от однородного составляет $\Delta g_З = 2g_З = 0{,}51$ см/с^2 — порядка самого $g_З$. Напротив, солнечное гравитационное поле на орбите Луны практически однородно. Его неоднородность определяются небольшим изменением расстояния между Луной и Солнцем. Разность ускорений свободного падения, обусловленных Солнцем, в наиболее близкой и удалённой от Солнца точках лунной орбиты составляет

$$\Delta g_\odot = \frac{GM_\odot}{(R_З - R_Л)^2} - \frac{GM_\odot}{(R_З + R_Л)^2} = GM_\odot \frac{4R_З R_Л}{(R_З - R_Л)^2\,(R_З + R_Л)^2} \approx$$
$$\approx \frac{4GM_\odot R_Л}{R_З^3} = g_\odot \frac{4R_Л}{R_З} = 0{,}01 g_\odot = 0{,}006 \text{ см/с}^2,$$

что примерно в 100 раз меньше $\Delta g_З$.

3. В f_1/f_2 раз.

Почти параллельный пучок лучей от звезды, распространяющийся под углом α к оптической оси телескопа, собирается в фокальной плоскости входной (первой) линзы на расстоянии $h = f_1 \operatorname{tg}\alpha \underset{\alpha \ll 1}{\approx} \alpha f_1$ от той же оптической оси. Выходная (вторая) линза преобразует полученное в фокальной плоскости изображение в параллельный пучок лучей, идущих под углом $\beta = \operatorname{arctg}(h/f_2) \underset{h/f_2 \ll 1}{\approx} h/f_2 = \alpha f_1/f_2$ к оптической оси телескопа. Таким образом, на выходе из телескопа лучи от звёзд распространяются под f_1/f_2 раза бóльшими углами к оптической оси по сравнению с исходными лучами до телескопа. Во столько же раз увеличиваются и видимые углы между звёздами.

4. Меньше $1{,}3 \cdot 10^{19}$ эВ.

Если частица с зарядом e движется со скоростью v поперёк магнитного поля с индукцией B, то на неё действует сила Лоренца $F = evB$. Сила Лоренца направлена перпендикулярно скорости частицы, как центростремительное ускорение. Поэтому частица движется по окружности (с так называемым ларморовским радиусом). Изменение импульса частицы $\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$ направлено к центру окружности и равно ωp (по аналогии с центростремительным ускорением $a = \omega v$), где ω — круговая частота вращения по окружности (так называемая гирочастота). Согласно второму закону Ньютона

$$\omega p = evB,$$

что определяет гирочастоту $\omega = evB/p$ и ларморовский радиус

$$r = \frac{v}{\omega} = \frac{p}{eB}.$$

Межзвёздное магнитное поле удерживает частицу в Галактике, если диаметр ларморовской окружности $2r$ меньше диаметра Галактики D. Поэтому в Галактике удерживаются частицы с энергией

$$E \equiv pc < eBDc/2.$$

Подставляем в последнее неравенство диаметр Галактики в виде $D = ct$, где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света, а $t = 9 \cdot 10^4$ лет $= 9 \cdot 10^4 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600$ с $= 2{,}8 \cdot 10^{12}$ с, и выражаем энергию в электрон-вольтах $\mathcal{E}[\text{эВ}] = E[\text{Дж}]/e[\text{Кл}]$, получаем максимальную энергию удерживаемых частиц

$$\mathcal{E}_{\max}[\text{эВ}] = B[\text{Тл}] \cdot (c[\text{м/с}])^2 \cdot t[\text{с}]/2 = 10^{-10} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \cdot (2{,}8 \cdot 10^{12})/2 = 1{,}3 \cdot 10^{19}.$$

Эта величина приходится на так называемую «лодыжку» в распределении космических лучей по энергии (но не является её причиной). Частицы с меньшей энергией существенно отклоняются магнитным полем Галактики и направление их прихода на Землю не совпадает с направлением на источник (если источник внегалактический).